RAIRO. ANALYSE NUMÉRIQUE

CLAUDE JOURON

Sur un problème d'optimisation ou la contrainte porte sur la fréquence fondamentale

RAIRO. Analyse numérique, tome 12, nº 4 (1978), p. 349-375

<http://www.numdam.org/item?id=M2AN_1978__12_4_349_0>

R.A.I.R.O. Analyse numérique/Numerical Analysis
(vol. 12, n° 4, 1978, p. 349 à 374)

SUR UN PROBLÈME D'OPTIMISATION OU LA CONTRAINTE PORTE SUR LA FRÉQUENCE FONDAMENTALE (*)

par Claude JOURON [1]

Communiqué par P. G. CIARLET

Résumé. — *Ce papier étudie le problème d'optimisation suivant : trouver le poids minimal d'une structure dans le cas où la fréquence fondamentale est fixée et où l'on a des contraintes sur l'épaisseur de la structure. La fréquence fondamentale est la plus petite valeur propre d'un problème elliptique du second ordre. Nous faisons également l'approximation numérique, par une méthode d'éléments finis, de ce problème.*

1. INTRODUCTION

Un certain nombre de problèmes d'optimisation en théorie des structures se présentent sous la forme suivante : minimiser le poids de la structure en conservant une valeur fixe pour la fréquence fondamentale de vibration avec des contraintes supplémentaires portant sur l'épaisseur de la structure. Si Ω est la forme de la structure, u son épaisseur, $\lambda(u)$ sa fréquence fondamentale de vibration,

$$J(u)=\int_{\Omega} u(x)\,dx \tag{1.1}$$

son poids, C un ensemble convexe caractérisant les contraintes portant sur u et λ_1 la fréquence fondamentale d'une structure de référence d'épaisseur uniforme, alors le problème considéré s'exprime sous la forme suivante :

$$(\mathscr{P}) \quad \operatorname*{Inf}_{\substack{u\in C \\ \lambda(u)=\lambda_1}} J(u).$$

(*) Reçu octobre 1977.

([1]) Département de Mathématiques, Université Paris-Sud, 91405 Orsay.

Par un changement de variable, on peut se ramener au cas où

$$\lambda_1 = \lambda(u_1) \qquad \text{avec} \quad u_1(x) \equiv 1. \tag{1.2}$$

Les travaux sur ce sujet sont nombreux, citons Armand et Vitte [1], Armand [2], Haug, Pan et Streeter [9], Prager et Taylor [17], Taylor [22] et [23], Turner [25], Weissharr [28], *cf.* aussi le livre à paraître de P. Brousse [3]. Nous n'étudierons ici que le cas où la fréquence fondamentale est la plus petite valeur propre d'un problème spectral de la forme

$$\left.\begin{aligned} &\operatorname{div}(a(u)\operatorname{grad} w) + \lambda b(u)\, w = 0,\\ &a(u)\frac{\partial w}{\partial \nu}\Big|_{\Gamma_2} = 0,\\ &w\big|_{\Gamma_1} = 0, \end{aligned}\right\} \tag{1.3}$$

où (Γ_1, Γ_2) est une partition de la frontière Γ de Ω et ν la normale à Γ_2 extérieure à Ω. $a(u)$ et $b(u)$ sont des fonctions de u vérifiant certaines hypothèses que l'on précisera ultérieurement. Naturellement, le principe de maximum va jouer un rôle fondamental.

Le convexe C sera ici :

$$C_{\alpha,\beta} = \{ u \in L^\infty(\Omega);\ \alpha \leqq u(x) \leqq \beta \text{ p. p. dans } \Omega \}, \tag{1.4}$$

où

$$0 < \alpha < 1 < \beta \leqq +\infty. \tag{1.5}$$

C'est l'un des problèmes que nous avions étudié en [10]. Nous indiquons ici les résultats essentiels obtenus.

Le plan de ce travail est le suivant. Au paragraphe 2 nous étudions les propriétés de la fonction $\lambda(u)$, nous démontrons en particulier que λ est dérivable, pseudo-concave et s. c. s. pour la topologie faible $*$ de $L^\infty(\Omega)$. Au paragraphe 3 nous obtenons des conditions nécessaires et suffisantes d'optimalité pour le problème $(\mathscr{P})$ ainsi qu'un théorème d'existence de solutions. Au paragraphe 4, nous étudions l'approximation de $(\mathscr{P})$ par une méthode d'éléments finis. Nous terminons ce paragraphe en décrivant brièvement un essai numérique effectué sur un exemple précis. Enfin, en Appendice, nous rappelons la définition et les propriétés des fonctions pseudo-concaves, puis nous obtenons des conditions nécessaires et suffisantes d'optimalité pour un problème d'optimisation abstrait, résultats que nous appliquons aux paragraphes 3 et 4.

2. ETUDE DE $\lambda(u)$

2.1. Énoncé du problème spectral

Soit Ω un ouvert borné connexe de $\mathbf{R}^n$ de frontière Γ lipschitzienne. On désigne par $(.\,,.)$ [resp. $((.\,,.))$] le produit scalaire de $L^2(\Omega)$ [resp. $H_0^1(\Omega)$], par

$\|\cdot\|_0$ [resp. $\|\cdot\|$] la norme de $L^2(\Omega)$ [resp. $H_0^1(\Omega)$] par $\langle\cdot,\cdot\rangle$ le crochet de dualité entre $H_0^1(\Omega)$ et son dual $H^{-1}(\Omega)$ et par $|\cdot|_\infty$ la norme de $L^\infty(\Omega)$.

Soit $\mathscr{U}$ l'ouvert de $L^\infty(\Omega)$ défini par

$$\mathscr{U}=\{u\in L^\infty(\Omega);\ \exists\,\alpha(u)>0 \text{ tel que } u(x)\geqq\alpha(u)>0\ p.\,p.\} \tag{2.1}$$

Soient **a** et **b** deux fonctions possédant les propriétés suivantes :

$$\mathbf{a}:]0,+\infty[\to]0,+\infty[\text{ de classe } \mathscr{C}^2, \text{ concave}, \tag{2.2}$$

$$\mathbf{b}:]0,+\infty[\to]0,+\infty[\text{ de classe } \mathscr{C}^2, \text{ convexe}. \tag{2.3}$$

Pour tout $u\in\mathscr{U}$ on peut définir $a(u)\in L^\infty(\Omega)$ par

$$a(u)(x)=\mathbf{a}(u(x)). \tag{2.4}$$

De la même façon, on définit $b(u)$. Il est facile de voir que a et b possèdent les propriétés suivantes :

$$a(u) \text{ et } b(u) \text{ sont des éléments de } \mathscr{U}, \tag{2.5}$$

$$a \text{ et } b \text{ sont de classe } \mathscr{C}^1 \text{ sur } \mathscr{U} \text{ et si } h\in L^\infty(\Omega), \tag{2.6}$$

$$a'(u).h : x\in\Omega \rightsquigarrow \mathbf{a}'(u(x))\,h(x),$$

$$b'(u).h : x\in\Omega \rightsquigarrow \mathbf{b}'(u(x))\,h(x),$$

$$\left.\begin{array}{l} a \text{ et } -b \text{ sont concaves sur } \mathscr{U} \\ \text{par rapport au cône des fonctions positives p. p.}\end{array}\right\} \tag{2.7}$$

Soit $u\in\mathscr{U}$; appelons A_u l'isomorphisme de $H_0^1(\Omega)$ sur $H^{-1}(\Omega)$ défini par

$$\langle A_u w,\varphi\rangle=\int_\Omega a(u)(x)\nabla w(x).\nabla\varphi(x)\,dx, \tag{2.8}$$

où $(w,\varphi)\in(H_0^1(\Omega))^2$. A_u est un opérateur auto-adjoint de $L^2(\Omega)$ dont l'opérateur réciproque est un opérateur compact de $L^2(\Omega)$. Soit B_u l'opérateur de $L^2(\Omega)$ défini par :

$$B_u w=b(u)\,w. \tag{2.9}$$

Pour tout $u\in\mathscr{U}$ A_u et B_u vérifient :

$$\alpha(a(u))\|w\|^2\leqq\langle A_u w,w\rangle\leqq|a(u)|_\infty\|w\|^2, \tag{2.10}$$

$$\alpha(b(u))\|w\|_0^2\leqq(B_u w,w)\leqq|b(u)|_\infty\|w\|_0^2 \tag{2.11}$$

On sait, *voir* par exemple Miklin [14], que le problème spectral

$$A_u w=\lambda B_u w, \tag{2.12}$$

admet un ensemble dénombrable de valeurs propres

$$0<\lambda_1 \leqq \lambda_2 \leqq \ldots \leqq \lambda_n \leqq \ldots,$$

$$\lambda_n \to +\infty, \qquad n \to +\infty.$$

En utilisant le principe du maximum de Stampachia [20], on montre que la plus petite valeur propre $\lambda(u)=\lambda_1$ est simple et on peut caractériser cette valeur propre par (2.13) (2.14).

PROPOSITION 2.1 : *Pour tout* $u\in\mathcal{U}$ *il existe un et un seul couple* $(\lambda(u), w(u))\in \mathbf{R}\times H_0^1(\Omega)$ *vérifiant* (2.12) *et tel que*

$$w(u;\, x) \geqq 0 \text{ p. p. dans } \Omega, \tag{2.13}$$

$$\int_\Omega w^2(u;\, x)\,dx=1. \tag{2.14}$$

De plus, $\lambda(u)$ *est la plus petite valeur propre de* (2.12), *elle est simple et elle vérifie :*

$$\lambda(u)=\inf_{\substack{w\in H_0^1(\Omega)\\ w\neq 0}} \frac{\langle A_u w, w\rangle}{(B_u w, w)}=\frac{(A_u w(u), w(u))}{(B_u w(u), w(u))}. \tag{2.15}$$

REMARQUE 2.1 : On a considéré, pour fixer les idées, un problème où les conditions aux limites sont de type Dirichlet. On peut très bien considérer un problème de type (1.3); il suffit de remplacer $H_0^1(\Omega)$ par

$$W=\{\, w\in H^1(\Omega);\ w|_{\Gamma_1}=0 \,\}$$

et de supposer que la mesure superficielle de Γ_1 est non nulle.

Avant d'étudier les propriétés de $\lambda(u)$, nous allons indiquer les exemples qui nous ont conduit à faire les hypothèses (2.2) et (2.3).

Exemple 1 *:* On prend

$$a(u)=u, \qquad b(u)=1$$

c'est l'exemple traité dans [1].

Exemple 2 *:*

$$a(u)=u, \qquad b(u)=u+\delta$$

où δ est un scalaire strictement positif. C'est l'exemple étudié par Armand et Vitte [1] dans le cas $n=1$, puis par Armand [2] pour $n=2$.

Exemple 3 :

$$a(u)=1, \qquad b(u)=\frac{1}{u^2},$$

c'est l'un des exemples de [9].

Nous allons maintenant étudier les propriétés de $\lambda(u)$ comme fonction de u.

2.2. Propriétés de λ (u)

PROPOSITION 2.2 : *Les applications*

$$u \in \mathcal{U} \to \lambda(u) \in \mathbf{R},$$

$$u \in \mathcal{U} \to w(u) \in H_0^1(\Omega),$$

sont continues.

Démonstration : Soit une suite (u_n) de $\mathcal{U}$ telle que $u_n \to u \in \mathcal{U}$ quand $n \to +\infty$. Grâce à (2.5), (2.6), (2.10), (2.11), (2.15), on montre que $\lambda(u_n)$ est borné dans $\mathbf{R}$ et que $w(u_n)$ est borné dans $H_0^1(\Omega)$. On peut donc, de la suite (u_n), extraire une sous-suite toujours notée (u_n) telle que :

$$\lambda(u_n) \to \lambda_* \text{ dans } \mathbf{R},$$

$$w(u_n) \to w_* \text{ dans } H_0^1(\Omega) \text{ faible et dans } L^2(\Omega) \text{ fort},$$

$$w(u_n(x); x) \to w_*(x) \text{ p. p. } x \in \Omega.$$

Si on passe à la limite dans

$$\langle A_{u_n} w(u_n), \varphi \rangle = (B_{u_n} w(u_n), \varphi) \qquad \text{pour} \quad \varphi \in H_0^1(\Omega),$$

on constate que (λ_*, w_*) vérifie (2.12), (2.13), (2.14). La proposition 2.1 permet alors d'affirmer que

$$(\lambda_*, w_*) = (\lambda(u), w(u))$$

et que ce sont les suites toutes entières qui convergent vers $(\lambda(u), w(u))$.

Il nous reste à démontrer que

$$w(u_n) \to w(u) \quad \text{dans } H_0^1(\Omega) \text{ fort.} \tag{2.16}$$

Posons

$$E_n = \langle A_{u_n}(w(u_n) - w(u)), w(u_n) - w(u) \rangle.$$

On a pour n assez grand :

$$E_n \geqq \frac{\alpha(u)}{2} \| w(u_n) - w(u) \|^2.$$

Et donc, pour démontrer (2.16) il suffit de vérifier que

$$E_n \to 0 \quad \text{quand } n \to +\infty. \tag{2.17}$$

D'après (2.12) et (2.15) E_n peut s'écrire

$$E_n = E_{n,1} + E_{n,2} + E_{n,3}$$

où

$$E_{n,1} = \int_\Omega (a(u_n) - a(u))(x) \, |\nabla w(u; x)|^2 \, dx,$$

$$E_{n,2} = \lambda_n \int_\Omega (b(u_n)(x) \, w(u_n; x) \{ w(u_n; x) - w(u; x) \} \, dx,$$

$$E_{n,3} = \int_\Omega \{ \lambda(u) \, b(u)(x) \, w(u; x) - \lambda(u_n) \, b(u_n)(x) \, w(u_n; x) \} \, w(u; x) \, dx.$$

Constatons que chacun des termes $E_{n,i}$ pour $i = 1, 2, 3$ tend vers zéro quand $n \to +\infty$, ce qui implique (2.17).

REMARQUE 2.2 : Murat [15] a montré qu'il existait des exemples simples pour lesquels l'application $u \to \lambda(u)$ n'est pas continue pour la *topologie faible* $*$ *de* $L^\infty(\Omega)$. Il a considéré l'exemple 1 avec $\Omega =]0, 1[$ et a exhibé, en utilisant ses travaux [16] une suite (u_n) vérifiant :

$u_n \in C_{\alpha, \beta}$,

$u_n \to u$ pour la topologie faible $*$,

$\dfrac{1}{u_n} \to \dfrac{1}{v}$ pour la topologie faible $*$,

$\lambda(u_n) \to \lambda(v)$,

$w(u_n) \to w(v)$ dans $H_0^1(\Omega)$,

avec

$\lambda(v) \neq \lambda(u)$.

THÉORÈME 2.1 : *Les applications*

$u \to \lambda(u)$,

$u \to w(u)$,

sont différentiables en tout point u_0 *de* $\mathcal{U}$, *de plus*

$$\lambda'(u_0) \cdot v = \frac{\displaystyle\int_\Omega \{ (a'(u_0) \cdot v)(x) \, |\nabla w_0(x)|^2 - \lambda_0 (b'(u_0) \cdot v)(x) \, w_0^2(x) \} \, dx}{\displaystyle\int_\Omega b(u_0)(x) \, w_0^2(x) \, dx}, \tag{2.18}$$

où

$$w_0 = w(u_0), \quad \lambda_0 = \lambda(u_0), \qquad v \in L^\infty(\Omega).$$

Démonstration : La démonstration est identique à celle de Mignot [12] ou [13] qui a traité un cas particulier.

Considérons la fonction F de

$\mathscr{U} \times H_0^1(\Omega) \times \mathbf{R}$ dans H^{-1},

définie par

$$F(u, w, \lambda) = A_u w - \lambda B_u w.$$

Compte tenu de (2.6), il est facile de voir que F est de classe $\mathscr{C}^1$ sur $\mathscr{U} \times H_0^1(\Omega) \times \mathbf{R}$.

Posons

$$Y = (w, \lambda),$$

$$A_0 = A_{u_0}, \qquad B_0 = B_{u_0},$$

$$\left(\frac{\partial F}{\partial w}\right)_0 = \frac{\partial F}{\partial w}(u_0, w_0, \lambda_0), \qquad \left(\frac{\partial F}{\partial \lambda}\right)_0 = \frac{\partial F}{\partial \lambda}(u_0, w_0, \lambda_0),$$

$$\left(\frac{\partial F}{\partial u}\right)_0 = \frac{\partial F}{\partial u}(u_0, w_0, \lambda_0),$$

$$S_1 = \{ w \in L^2(\Omega);\ \| w \|_0 = 1 \}.$$

On a

$$\left(\frac{\partial F}{\partial \lambda}\right)_0 . \lambda = -\lambda B_0 w_0,$$

par conséquent

$$\left(\frac{\partial F}{\partial \lambda}\right)_0 \text{ est un isomorphisme de } \mathbf{R} \text{ sur } \mathbf{R} B_0 w_0. \tag{2.19}$$

On a

$$\left(\frac{\partial F}{\partial w}\right)_0 = A_0 - \lambda_0 B_0 = \lambda_0 A_0 \left(\frac{1}{\lambda_0} I - G_0 B_0\right), \tag{2.20}$$

où G_0 est l'opérateur réciproque de A_0 isomorphisme de $H_0^1(\Omega)$ sur $H^{-1}(\Omega)$. Remarquons que $B_0 w_0$ est un vecteur propre de $(G_0 B_0)^* = B_0 G_0$, associée à la valeur propre simple $1/\lambda_0$ et, par conséquent, d'après l'alternative de

Freedholm : $(1/\lambda_0)\, I - G_0\, B_0$ est un isomorphisme de $w_0^\perp$ sur $(B_0\, w_0)^\perp$ et donc de $H_0^1(\Omega) \cap w_0^\perp$ sur $H_0^1(\Omega) \cap (B_0\, w_0)^\perp$ [$^\perp$ désigne l'orthogonalité par rapport au produit scalaire de $L^2(\Omega)$]. D'autre part, A_0 est un isomorphisme de $H_0^1(\Omega) \cap (B_0\, w_0)^\perp$ sur w_0^0 où

$$w_0^0 = \{ f \in H^{-1}(\Omega);\ \langle w_0, f \rangle = 0 \}$$

et donc l'expression (2.20) de $(\partial F/\partial w)_0$ montre que

$$\left(\frac{\partial F}{\partial w}\right)_0 \text{ est un isomorphisme de } w_0^\perp \cap H_0^1(\Omega) \text{ sur } w_0^0. \tag{2.21}$$

Comme

$$\left(\frac{\partial F}{\partial Y}\right)_0 .(w, \lambda) = \left(\frac{\partial F}{\partial \lambda}\right)_0 .\lambda + \left(\frac{\partial F}{\partial w}\right)_0 .w$$

(2.19) et (2.21) impliquent que

$$\left(\frac{\partial F}{\partial Y}\right)_0 \text{ est un isomorphisme de } \mathbf{R} \times (H_0^1(\Omega) \cap w_0^\perp) \text{ sur } H^{-1}(\Omega), \tag{2.22}$$

car $\mathbf{R}\, B_0\, w_0 \oplus w_0^0 = H^{-1}(\Omega)$.

On peut alors appliquer le théorème des fonctions implicites à la fonction F définie sur

$$\mathscr{U} \times \{ (H_0^1(\Omega) \cap S_1) \times \mathbf{R} \},$$

au point $(u_0, (w_0, \lambda_0))$. Et, par conséquent, il existe une boule D de centre u_0 et une fonction continue unique $Y(u)$ définie dans D de classe $\mathscr{C}^1$ telles que

$$Y(u_0) = (w_0, \lambda_0), \tag{2.23}$$

$$Y(u) \in (H_0^1(\Omega) \cap S_1) \times \mathbf{R}, \qquad \forall u \in D, \tag{2.24}$$

$$F(u, Y(u)) = 0, \qquad \forall u \in D. \tag{2.25}$$

Or, si l'on pose $\hat{Y}(u) = (w(u), \lambda u)$, $\hat{Y}(u)$ vérifie (2.23), (2.24), (2.25) et est continue (prop. 2.2), par suite $\hat{Y}(u) = Y(u)$ et $w(u)$ et $\lambda(u)$ sont différentiables au point u_0. La première partie du théorème 2.1 est démontrée.

D'après (2.25), on a

$$\left(\frac{\partial F}{\partial \lambda}\right)_0 .(\lambda'(u_0).v) + \left(\frac{\partial F}{\partial w}\right)_0 .(w'(u_0).v) = -\left(\frac{\partial F}{\partial u}\right)_0 .v.$$

Compte tenu de (2.21) on a

$$\left\langle \left(\frac{\partial F}{\partial \lambda}\right)_0 . (\lambda'(u_0).v), w_0 \right\rangle = - \left\langle \left(\frac{\partial F}{\partial u}\right)_0 . v, w_0 \right\rangle,$$

ce qui nous donne, tout calcul fait, (2.18).

REMARQUE 2.3 : Constatons que $\lambda'(u)$ n'est pas un élément quelconque de $(L^\infty(\Omega))'$ puisqu'il appartient à $L^1(\Omega)$.

REMARQUE 2.4 : Pour l'instant, la concavité de a et de $-b$ n'est pas intervenue. Nous allons maintenant faire intervenir cette hypothèse.

THÉORÈME 2.2 : *Pour tout $(u, v) \in \mathcal{U} \times \mathcal{U}$ on a*

$$\lambda(v) \leqq \lambda(u) + \lambda'(u).(v-u) \frac{\int_\Omega b(u)(x) w^2(u; x)\, dx}{\int_\Omega b(v)(x) w^2(u; x)\, dx}. \tag{2.26}$$

Démonstration : La propriété (2.7) implique

$$a'(u).(v-u) \geqq a(v) - a(u),$$

$$b'(u).(v-u) \leqq b(v) - b(u).$$

Appelons Δ la quantité située à droite dans l'inégalité (2.26). Si, dans Δ on remplace $\lambda'(u).(v-u)$ par son expression (2.18), on obtient, compte tenu des inégalités précédentes,

$$\Delta \geqq \frac{\int_\Omega a(v)(x) |\nabla w(u; x)|^2\, dx}{\int_\Omega b(v)(x) w^2(u; x)\, dx}$$

et donc

$$\Delta \geqq \lambda(v).$$

COROLLAIRE 2.1 : *La fonction*

$$u \to \lambda(u),$$

est pseudo-concave sur $\mathcal{U}$.

Démonstration : Cela résulte de la définition des fonctions pseudo-concaves (*cf.* Appendice) de (2.26) et de (2.11).

COROLLAIRE 2.2 : *La fonction*

$u \to \lambda(u)$.

est S. C. S. (semi-continue supérieurement) sur le convexe C_α *pour la topologie faible* $*$ *de* $L^\infty(\Omega)$ *où*

$C_\alpha = \{u \in L^\infty(\Omega);\ u(x) \geqq \alpha > 0$ p. p. dans $\Omega\}$, α *étant fixé.*

Démonstration : Il suffit de montrer que

$$\limsup_{\substack{u \rightharpoonup \bar{u} \in C_\alpha \\ u \in C_\gamma}} \lambda(u) \leqq \lambda(\bar{u}). \tag{2.27}$$

Écrivons (2.26) pour $(u, \bar{u})$:

$$\lambda(u) \leqq \lambda(\bar{u}) + \lambda'(\bar{u}).(u-\bar{u}) \frac{\displaystyle\int_\Omega b(\bar{u})(x)\, w^2(\bar{u};\, x)\, dx}{\displaystyle\int_\Omega b(u)(x)\, w^2(\bar{u};\, x)\, dx}.$$

Puisque u converge vers $\bar{u}$ pour la topologie faible $*$ de $L^\infty(\Omega)$ u est borné dans $L^\infty(\Omega)$ et donc

$0 < \alpha_1 \leqq b(u)(x) < \beta_1 \leqq +\infty$ p. p.

D'où une nouvelle majoration de $\lambda(u)$:

$$\lambda(u) \leqq \lambda(\bar{u}) + \lambda'(\bar{u}).(u-\bar{u}) \frac{1}{\alpha_1} \int_\Omega b(\bar{u})\, w^2(\bar{u})\, dx. \tag{2.28}$$

D'après la remarque 2.3 $\lambda'(u)$ est un élément de $L^1(\Omega)$, par conséquent,

$$\lim_{u \rightharpoonup \bar{u}} \lambda'(\bar{u}).(u-\bar{u}) = 0$$

Et donc, si on passe à la lim sup dans (2.28), on obtient (2.27).

REMARQUE 2.5 : Les résultats précédents s'appliquent aux trois exemples considérés. Dans le cas de l'exemple 1, il est facile de voir que λ est concave, par contre dans le cas de l'exemple 3, on montre que λ n'est pas concave.

3. ÉTUDE DU PROBLÈME D'OPTIMISATION

Le problème $(\mathscr{P})$ décrit dans le paragraphe 1 est maintenant bien défini

$$(\mathscr{P}) \quad \inf_{\substack{u \in C_{\alpha,\beta} \\ \lambda(u) = \lambda_1}} J(u),$$

où J, λ_1 et $C_{\alpha,\beta}$ sont définis respectivement par (1.1), (1.2) et (1.4), (α, β) étant donné et vérifiant (1.5).

Considérons la fonction u_α définie par

$$u_\alpha(x) \equiv \alpha.$$

Cette fonction vérifie :

$$J(u_\alpha) < J(u), \qquad \forall u \in C_{\alpha,\beta}, \quad u \neq u_\alpha.$$

Nous allons appliquer les résultats, obtenus dans un cadre abstrait, énoncés et démontrés dans l'Appendice. Introduisons le problème

$$(\mathcal{Q}) \qquad \operatorname*{Inf}_{\substack{u \in C_{\alpha,\beta} \\ \lambda(u) \geqq \lambda_1}} J(u).$$

THÉORÈME 3.1 : *On suppose que*

$$\lambda(u_\alpha) < \lambda_1 \tag{3.1}$$

$$\exists\, u_\gamma \in C_{\alpha,\beta} \text{ tel que } \lambda(u_\gamma) > \lambda_1 \tag{3.2}$$

alors :

(i) *les problèmes* $(\mathcal{P})$ *et* $(\mathcal{Q})$ *sont équivalents;*

(ii) $\bar{u} \in C_{\alpha,\beta}$ *est solution de* $(\mathcal{P})$ *si et seulement si* $\lambda(\bar{u}) = \lambda_1$ *et* $\exists\, \bar{\eta} < 0$ *tel que*

$$J(v) - J(\bar{u}) + \bar{\eta}\, \lambda'(\bar{u}).(v - \bar{u}) \geqq 0, \qquad \forall v \in C_{\alpha,\beta}, \tag{3.3}$$

(iii) *l'ensemble* $S(\mathcal{P})$ *des solutions de* $(\mathcal{P})$ *est convexe et* $\{w(u);\, u \in S(\mathcal{P})\}$ *est réduit à un élément;*

(iv) si $\beta < +\infty$, *le problème* $(\mathcal{P})$ *admet au moins une solution.*

Démonstration (*i*) *et* (*ii*) découlent du corollaire A.1, J étant affine, on a $J'(\bar{u}).(v - \bar{u}) = J(v) - J(\bar{u})$.

Démontrons (iii). L'ensemble

$$K = \{u \in C_{\alpha,\beta};\, \lambda(u) \geqq \lambda_1\}$$

est convexe d'après la proposition A.1. Par conséquent, le problème $(\mathcal{Q})$ est convexe et donc $S(\mathcal{P})$ est convexe.

Soient u_1 et u_2 deux solutions de $(\mathcal{P})$. Posons $w_1 = w(u_1)$ et $w_2 = w(u_2)$. λ est constant sur le segment $[u_1, u_2]$ par suite :

$$\lambda'(u_2).(u_1 - u_2) = 0.$$

Si l'on remplace $\lambda'(u_2).(u_1-u_2)$ par son expression (2.18), on obtient, compte tenu de la propriété (2.7) :

$$\int_\Omega (a(u_1)-a(u_2))(x)\,|\nabla w_2(x)|^2\,dx \leqq \lambda_1 \int_\Omega (b(u_1)-b(u_2))\,(x)\,w_2^2(x)\,dx.$$

D'où

$$\lambda_1 \geqq \frac{\displaystyle\int_\Omega a(u_1)(x)\,|\nabla w_2(x)|^2\,dx}{\displaystyle\int_\Omega b(u_1)(x)\,|w_2(x)|^2\,dx}.$$

Par conséquent, w_2 est un vecteur propre associé à λ_1 et donc $w_2=w_1$.

Démontrons (iv). La fonction $\lambda(u)$ étant faible $*$ S. C. S., l'ensemble K est faible $*$ fermé. Comme cet ensemble est borné, il est faiblement $*$ compact. J est faible $*$ continue, par suite, le problème $(\mathscr{Q})$ et, donc le problème $(\mathscr{P})$, admet au moins une solution.

PROPOSITION 3.1 : *La condition* (3.3) *est équivalente à :* $\exists\, e>0$ *vérifiant :*

$$g(\bar{u};\,x) \leqq e \quad \text{p. p. } x\in\Omega_\beta=\{x\in\Omega;\ \bar{u}(x)<\beta\} \tag{3.4}$$

et

$$g(\bar{u};\,x) \geqq e \quad \text{p. p. } x\in\Omega_\alpha=\{x\in\Omega;\ \bar{u}(x)>\alpha\}, \tag{3.5}$$

où

$$g(\bar{u};\,x)=\mathbf{a}'(\bar{u}(x))\,|\nabla w(\bar{u};\,x)|^2-\lambda_1\,\mathbf{b}'(\bar{u}(x))\,w^2(\bar{u};\,x).$$

La démonstration de ce résultat est classique.

REMARQUE 3.1. Dans le cas des exemples 1, 2 et 3, il est très facile de voir que l'hypothèse (3.1) est vérifiée. Si l'on considère la fonction u_γ définie par

$$u_\gamma(x)\equiv\gamma,$$

où

$$1<\gamma<\beta,$$

l'hypothèse (3.2) est vérifiée. On peut par conséquent appliquer le théorème 3.1 et la proposition 3.1.

Dans le cas de l'exemple 3, la condition nécessaire et suffisante d'optimalité s'écrit $\exists e > 0$ tel que

$$\frac{w^2(\bar{u};x)}{\bar{u}^3(x)} \leqq e \quad \text{p. p.} \quad x \in \Omega_\beta,$$

$$\frac{w^2(\bar{u};x)}{\bar{u}^3(x)} \geqq e \quad p.\ p. \quad x \in \Omega_\alpha$$

et grâce à ces relations on peut montrer *l'unicité de la solution*.

REMARQUE 3.2 : C'est D. Serre qui, dans le cas de l'exemple 2, a associé au problème $(\mathscr{P})$ le problème $(\mathscr{Q})$.

REMARQUE 3.3 : Dans le cas de l'exemple 1, puisque λ est concave, l'hypothèse (A.19) est vérifiée et on peut appliquer la proposition A.4.

4. APPROXIMATION DU PROBLÈME $(\mathscr{P})$

On suppose, bien que cela ne soit pas nécessaire, que le domaine Ω est à frontière polygonale.

Soit $\mathscr{T}_h$ une suite régulière de triangulations de Ω (*cf.* Ciarlet [5]). On supposera que ces triangulations vérifient l'hypothèse supplémentaire suivante : si $\bar{\theta}(h)$ est le plus grand des angles de tous les triangles de $\mathscr{T}_h$ on a

$$\forall h, \quad \bar{\theta}(h) \leqq \frac{\pi}{2}. \tag{4.1}$$

On désigne par $s_1, s_2, s_3, \ldots, s_N$ les sommets de la triangulation, par $\mathscr{S}_h$ l'ensemble de ces sommets et par $T_1, T_2, \ldots, T_P$ les triangles de $\mathscr{T}_h$.

4.1. Approximation des espaces

Soit W_h l'ensemble des fonctions affines sur chaque triangle de $\mathscr{T}_h$, continues sur $\bar{\Omega}$ et nulles sur la frontière Γ de Ω. W_h est un sous-espace de $H_0^1(\Omega)$. On désigne par $\varphi_{1,h}, \varphi_{2,h}, \ldots, \varphi_{N,h}$ la base habituelle de W_h et par $W_1\ W_2 \ldots W_N$ les composantes suivant cette base d'un vecteur w_h de W_h. On identifiera w_h au vecteur (W_i) *de* $\mathbf{R}^N$.

Pour tout $w \in \mathscr{C}^2(\bar{\Omega}) \cap H_0^1(\Omega)$, on définit $r_h w \in W_h$ par

$$r_h w(s_j) = w(s_j), \qquad \forall j = 1, 2, \ldots, N.$$

On a d'après [24] :

LEMME 4.1 : *Pour tout* $w \in H_0^1(\Omega)$ *et tout* $h > 0$, *il existe* $w_h \in W_h$ *telle que si* $w \in C^2(\overline{\Omega})$, $w_h = r_h w$ *et* w_h *converge vers* w *dans* $H_0^1(\Omega)$, *quand* h *tend vers zéro. On définit ainsi* r_h *sur tout* $H_0^1(\Omega)$.

Soit U_h l'ensemble des fonctions constantes sur chaque triangle de $\mathscr{C}_h$. L'ensemble (χ_k) des fonctions caractéristiques de ces triangles forme une base de U_h. On identifiera tout élément u_h de U_h au vecteur (U_k) de $\mathbf{R}^p$ où U_k est la composante de u_h suivant χ_k.

Pour tout $u \in C_{\alpha, \beta}$ on définit :

$$q_h u = (U_k),$$

où

$$U_k = \frac{1}{\text{aire } T_k} \int_{T_k} u(x)\, dx.$$

LEMME 4.2 : *Pour tout* $u \in C_{\alpha, \beta}$, $q_h u$ *est un élément de* $C_{\alpha, \beta}$, $q_h u$ *converge vers* u *dans* $L^1(\Omega)$ *pour la topologie forte et* $q_h u$ *converge vers* u *dans* $L^\infty(\Omega)$ *pour la topologie faible* $*$ *si* $\beta < +\infty$.

Démonstration : On démontre facilement que

$$q_h u \to u \quad \text{dans } L^1(\Omega) \text{ fort.}$$

D'autre part, si $\beta < +\infty$ $q_h u$ est borné dans $L^\infty(\Omega)$ et par suite

$$q_h u \to u \quad \text{dans } L^\infty(\Omega) \text{ faible } *.$$

4.2. Approximation du problème spectral

On va approximer le problème spectral (2.12) par : trouver $(w_h, \lambda_h) \in W_h \times \mathbf{R}$ tel que

$$\left.\begin{aligned} &\int_\Omega a(u_h)(x)\, \nabla w_h(x) \cdot \nabla \varphi_h(x)\, dx = \lambda_h \int_\Omega b(u_h)(x)\, w_h(x)\, \varphi_h(x)\, dx, \\ &\forall \varphi_h \in W_h. \end{aligned}\right\} \tag{4.3}$$

Le système (4.3) s'écrit sous la forme matricielle suivante :

$$A_{h, u_h} w_h = \lambda_h B_{h, u_h} w_h \tag{4.4}$$

où A_{h,u_h} et B_{h,u_h} sont des matrices carrées d'ordre N définies par

$$A_{h,u_h} = (a_{ij}(u_h)),$$
$$B_{h,u_h} = (b_{ij}(u_h)),$$

avec

$$a_{ij}(u_h) = \sum_{k=1}^{p} \mathbf{a}(u_k) \int_{T_k} \nabla \varphi_{i,h}(x) \,.\, \nabla \varphi_{j,h}(x)\, dx, \tag{4.5}$$

$$b_{ij}(u_h) = \sum_{k=1}^{p} \mathbf{b}(u_k) \int_{T_k} \varphi_{i,h}(x)\, \varphi_{j,h}(x)\, dx. \tag{4.6}$$

Les matrices A_{h,u_h} et B_{h,u_h} sont symétriques définies positives. Grâce à l'hypothèse (4.1) et les travaux [4] et [6] la matrice A_{h,u_h} est une matrice irréductible dont les éléments non diagonaux sont négatifs ou nuls, les éléments diagonaux étant positifs. La matrice $A_{h,u_h}^{-1}\, B_{h,u_h}$ est donc une matrice dont les éléments sont strictement positifs. On peut, par conséquent, appliquer le théorème de Perron-Frobenius et obtenir la caractérisation suivante de la plus petite valeur propre de (4.4) :

PROPOSITION 4.1 : *Il existe un et un seul couple* $(\lambda_h(u_h),\, w_h(u_h)) \in \mathbf{R} \times W_h$ *vérifiant* (4.4) :

$$W_k(u_h) \geqq 0 \qquad (w_h(u_h) = (W_k(u_h))) \tag{4.7}$$

et

$$\int_\Omega w_h^2(u_h; x)\, dx = 1. \tag{4.8}$$

De plus $\lambda_h(u_h)$ *est la plus petite valeur propre du problème* (4.4), *elle est simple, elle vérifie*

$$\lambda_h(u_h) = \operatorname*{Inf}_{\substack{w_h \in W_h \\ w_h \neq 0}} \frac{\displaystyle\int_\Omega a(u_h)(x)\, |\nabla w_h(x)|^2\, dx}{\displaystyle\int_\Omega b(u_h)(x)\, |w_h^2(x)|\, dx}$$

$$= \frac{\displaystyle\int_\Omega a(u_h)(x)\, |\nabla\, w_h(u_h;\, x)|^2\, dx}{\displaystyle\int_\Omega b(u_h)(x)\, w_h^2(u_h;\, x)\, dx}. \tag{4.9}$$

THÉORÈME 4.1 : *Les applications*

$u_h \in \mathcal{U} \cap U_h \to \lambda_h(u_h) \in \mathbf{R},$

$u_h \in \mathcal{U} \cap U_h \to w_h(u_h) \in W_h,$

sont différentiables en tout point $u_h^{(0)}$ de $\mathcal{U} \cap U_h$, de plus

$$\lambda_h'(u_h^{(0)}) \cdot v_h = \frac{\displaystyle\int_\Omega \{ \mathbf{a}'(u_h^{(0)}(x)) \, |\nabla w_h^{(0)}(x)|^2 - \lambda_h^{(0)} \mathbf{b}'(u_h^{(0)}(x)) \, w_h^{(0)}(x)^2 \} \, v_h(x) \, dx}{\displaystyle\int_\Omega \mathbf{b}(u_h^{(0)}(x)) \, w_h^{(0)}(x)^2 \, dx}, \tag{4.10}$$

où

$$w_h^{(0)} = w_h(u_h^{(0)}) \quad et \quad \lambda_h^{(0)} = \lambda_h(u_h^{(0)}), \qquad v_h \in U_h.$$

Démonstration : On démontre tout d'abord, comme dans la proposition 2.2, que ces deux applications sont continues. Puis l'on fait la même démonstration que celle du théorème 2.1 en prenant comme fonction F la fonction :

$$F_h(u_h, w_h, \lambda) = A_{h,u_h} w_h - \lambda B_{h,u_h} w_h$$

de $\mathcal{U} \cap U_h \times W_h \times \mathbf{R}$ dans W_h.

Comme dans le paragraphe 2, on démontre :

THÉORÈME 4.2 : *Pour tout $(u_h, v_h) \in (\mathcal{U} \cap U_h)^2$, on a*

$$\lambda_h(v_h) \leqq \lambda_h(u_h) + \lambda_h'(u_h) \cdot (v_h - u_h) \frac{\displaystyle\int_\Omega \mathbf{b}(u_h(x)) \, w_h^2(u_h; x) \, dx}{\displaystyle\int_\Omega \mathbf{b}(v_h(x)) \, w_h^2(u_h; x) \, dx}. \tag{4.11}$$

On en déduit :

COROLLAIRE 4.1 : *λ_h est pseudo-concave sur $\mathcal{U} \cap U_h$.*

REMARQUE 4.1 : Dans le cas de l'exemple 1 λ_h est concave.

4.3. Approximation de $(\mathcal{P})$

On pose

$$\lambda_{h,1} = \lambda_h(1),$$

et on va approximer le problème $(\mathcal{P})$ par

$$(\mathcal{P}_h) \qquad \operatorname*{Inf}_{\substack{u_h \in C_{\alpha\beta} \cap U_h \\ \lambda_h(u_h) = \lambda_{h,1}}} J(u_h).$$

On considère également le problème

$$(\mathcal{Q}_h) \qquad \inf_{\substack{u_h \in C_{\alpha,\beta} \cap U_h \\ \lambda_h(u_h) \geqq \lambda_{h,1}}} J(u_h).$$

Constatons que la fonction $u_\alpha(x) \equiv \alpha$ est un élément de U_h, et qu'elle vérifie

$$J(u_\alpha) < J(u_h), \qquad \forall u_h \in C_{\alpha,\beta} \cap U_h.$$

THÉORÈME 4.3 : *On suppose que*

$$\lambda_h(u_\alpha) < \lambda_{1,h}, \tag{4.12}$$

$$\exists\, u_{\gamma,h} \in C_{\alpha,\beta} \cap U_h \quad \textit{tel que} \;\; \lambda_h(u_{\gamma,h}) > \lambda_{1,h}, \tag{4.13}$$

alors ;

(i) *les problèmes* $(\mathcal{P}_h)$ *et* $(\mathcal{Q}_h)$ *sont équivalents;*

(ii) $\bar{u}_h \in C_{\alpha,\beta} \cap U_h$ *est solution du problème* $(\mathcal{P}_h)$ *ou* $(\mathcal{Q}_h)$ *si et seulement si*

$$\lambda_h(\bar{u}_h) = \lambda_{h,1}$$

et $\exists\, \bar{\eta}_h < 0$ *tel que*

$$J(v) - J(\bar{u}) + \bar{\eta}_h \lambda'_h(\bar{u}_h) \cdot (v_h - \bar{u}_h) \geqq 0, \qquad \forall v_h \in C_{\alpha,\beta} \cap U_h; \tag{4.14}$$

(iii) *l'ensemble* $S(\mathcal{P}_h)$ *des solutions de* $(\mathcal{P}_h)$ *est convexe et* $\{ w_h(u_h) \mid u_h \in S(\mathcal{P}_h) \}$ *est réduit à un élément;*

(iv) *le problème* $(\mathcal{P}_h)$ *admet toujours au moins une solution* ($\beta \leqq +\infty$).

La démonstration de ce théorème est identique à celle du théorème 3.1. Si $\beta = +\infty$ on a existence, car pour $u_h \in C_{\alpha,\beta} \cap U_h$ $J(u_h)$ est une norme.

4.4. Étude de la convergence

Nous allons maintenant étudier, *dans le cas de l'exemple* 1, la convergence de ce problème $(\mathcal{P}_h)$ lorsque le pas de discrétisation h tend vers zéro.

THÉORÈME 4.4 : *Dans le cas de l'exemple* 1, *si* $\beta < +\infty$ *et si* $\bar{u}_h$ *est une solution de* $(\mathcal{P}_h)$ *on a le résultat suivant :*

(i) $\lim_{h \to 0} J(\bar{u}_h) = \operatorname{Inf}(\mathcal{P})$ *et*

(ii) *on peut extraire de la suite* $(\bar{u}_h)$ *une sous-suite convergeant vers une solution* u *du problème* $(\mathcal{P})$ *pour la topologie faible* $*$ *de* $L^\infty(\Omega)$.

Démonstration : Puisque λ_h est concave, on peut appliquer la proposition A.4. Par suite $\exists\, \bar{\eta}_h < 0$ tel que

$$J(v_h) - J(\bar{u}_h) + \bar{\eta}_h (\lambda_h(v_h) - \lambda_h(\bar{u}_h)) \geqq 0, \qquad \forall v_h \in C_{\alpha,\beta} \cap U_h,$$

en particulier

$$J(q_h v) - J(u_h) + \bar{\eta}_h (\lambda_h (q_h v) - \lambda_h(\bar{u}_h)) \geqq 0, \qquad \forall v \in C_{\alpha,\beta}. \tag{4.15}$$

Admettons pour l'instant le :

LEMME 4.3 : *On a :*

(i) $\lambda_{h,1} > \lambda_1$ *et* $\lambda_{h,1} \to \lambda_1$ *quand* $h \to 0$,

(ii) $c \leqq \bar{\eta}_h < 0$ *où c est une constante négative,*

(iii) $\lim\sup\ \lambda_h(u_h) \leqq \lambda(u)$ *si* (u_h) *est une suite d'éléments de* $C_{\alpha,\beta} \cap U_h$ *convergeant vers u pour la topologie faible* $*$,

(iv) $\forall v \in C_{\alpha,\beta} \lim_{h \to 0} \lambda_h(q_h v) = \lambda(v)$.

Donc, on peut extraire de $(\bar{\eta}_h)$ et de $(\bar{u}_h)$ des sous-suites toujours notées $(\bar{\eta}_h)(\bar{u}_h)$ telles que

$$\bar{\eta}_h \to \eta^*,$$

$$\bar{u}_h \rightharpoonup u^*.$$

On passe à la limite dans (4.15) et on obtient :

$$J(v) - J(u^*) + \eta^* \{\lambda(v) - \lambda_1\} \geqq 0, \qquad \forall v \in C_{\alpha,\beta}.$$

De plus,

$$\lambda_1 = \lim \lambda_{h,1} = \lim\sup\ \lambda_h(\bar{u}_h) \leqq \lambda(u^*).$$

Par conséquent, d'après la proposition A.4, u^* est une solution du problème $(\mathscr{P})$.

On vient donc de montrer la partie (ii) de ce théorème. La démonstration de (i) à partir de ce résultat est classique.

Démonstration du lemme 4.3 : Le résultat (i) est dans Strang et Fix [21].

Écrivons (4.15) avec $v(x) = u_\beta(x) \equiv \beta$, on obtient alors :

$$\frac{J(u_\alpha) - J(u_\beta)}{\beta - 1} \leqq \bar{\eta}_h \lambda_{1,h} \leqq \bar{\eta}_h \lambda_1,$$

d'où (ii).

Démontrons (iii). D'après (4.9), on a

$$\lambda_h(u_h) \leqq \frac{\int_\Omega u_h(x) \left|\nabla r_h w(u; x)\right|^2 dx}{\int_\Omega r_h w(u; x)^2 dx}$$

et, en passant à la limite, compte tenu du lemme 4.1, on obtient le résultat.

Démontrons (iv). D'après (4.9), on a

$$\lambda_h(q_h u) \leqq \frac{\displaystyle\int_\Omega q_h u(x) \left| \nabla r_h w(u; x) \right|^2 dx}{\displaystyle\int_\Omega \left| r_h w(u; x) \right|^2 dx}$$

et donc $\lambda_h(q_h u)$ est borné indépendamment de h. Et comme

$$\int_\Omega q_h u \left| \nabla w_h(q_h(u; x)) \right|^2 dx = \lambda_h(q_h u),$$

$w_h(q_h u)$ est borné dans $H_0^1(\Omega)$.

Par conséquent, il existe des sous-suites $(\lambda_{h'}(q_{h'} u))$ et $(w_{h'}(q_{h'} u))$ telles que

$\lambda_{h'}(q_{h'} u) \to \lambda^*$,

$w_{h'}(q_{h'} u) \to w^*$ dans $H_0^1(\Omega)$ faible et dans $L^2(\Omega)$ fort,

$w_{h'}(q_{h'} u; x) \to w^*(x)$ p. p. $x \in \Omega$.

D'après (4.3) on a, pour tout $w \in H_0^1(\Omega)$:

$$\int_\Omega q_{h'} u(x) \nabla w_{h'}(q_{h'} u; x) \nabla r_h w(x)\, dx = \lambda_{h'}(q_{h'} u) \int_\Omega w_{h'}(q_{h'} u; x)\, r_{h'} w(x)\, dx.$$

Puisque ∇w_h est constant sur chaque triangle T_k pour tout $w_h \in W_h$ et que $q_h u$ est définie par (4.2), l'égalité précédente s'écrit :

$$\int_\Omega u(x) \nabla w_{h'}(q_{h'} u; x) \nabla r_h w(x)\, dx = \lambda_{h'}(q_{h'} u) \int_\Omega w_{h'}(q_{h'} u)\, r_{h'} w(x)\, dx.$$

On peut alors passer à la limite et grâce aux lemmes 4.1 et 4.2, on obtient

$$\int_\Omega u(x) \nabla w^*(x) . \nabla w(x)\, dx = \lambda^* \int_\Omega w^*(x) w(x)\, dx, \qquad \forall w \in H_0^1(\Omega).$$

Comme w^* vérifie (2.13) et (2.14), la proposition 2.1 permet d'affirmer que

$\lambda(u) = \lambda^*$,

$w(u) = w^*$

et que ce sont toutes les suites $\lambda_h(q_h u)$ et $w_h(q_h u)$ qui convergent vers $\lambda(u)$ et $w(u)$.

REMARQUE 4.2 : Dans le cas de l'exemple 2, le lemme 4.3 est vérifié mais on ne peut écrire (4.15) car l'on n'a pas pu démontrer que $v_h \to J(v_h + \eta\lambda_h(v_h))$ est une fonction pseudo-convexe sur $C_{\alpha,\beta} \cap U_h$ pour tout $\eta < 0$.

4.5. Résultats numériques

On a résolu le problème $(\mathscr{P}_h)$ par la méthode du Lagrangien augmenté *cf.* Rockafellar [18] et [19] et Fortin [7]. Décrivons brièvement cette méthode.

Pour tout $\varepsilon > 0$, $u_h \in U_h \cap C_{\alpha,\beta}$, $p \in \mathbf{R}_-$.

On pose

$$\mathscr{L}_\varepsilon(u_h, p) = J(u_h) + \frac{\varepsilon}{2}\left\{\left(p + \frac{\lambda_h(u_h) - \lambda_{h,1}}{\varepsilon}\right)_-^2 - p^2\right\},$$

où

$$\xi_- = \begin{cases} -\xi & \text{si } \xi < 0, \\ 0 & \text{si } \xi \geqq 0. \end{cases}$$

On démontre facilement que si $(\bar{u}_{\varepsilon,h}, \bar{p}_{\varepsilon,h})$ est point selle sur $C_{\alpha,\beta} \cap U_h \times \mathbf{R}_-$ de $\mathscr{L}_\varepsilon(u_h, p)$ alors $\bar{u}_{\varepsilon,h}$ est solution du problème $(\mathscr{P}_h)$. La méthode du Lagrangien augmenté consiste à trouver un point selle de $\mathscr{L}_\varepsilon(u_h, p)$ de la façon suivante : on part de $p^{(0)} \in \mathbf{R}_-$. On calcule $u_h^{(1)}, p^{(1)}, \ldots, u_h^{(n)}, p^{(n)}$.

On détermine $u_h^{(n+1)} \in C_{\alpha,\beta} \cap U_h$ qui minimise sur $C_{\alpha,\beta} \cap U_h$:

$$u_h \to \mathscr{L}_\varepsilon(u_h, p^{(n)}) \tag{4.16}$$

et on pose

$$p^{(n+1)} = \left(p^{(n)} + \frac{\lambda_h(u_h^{(n+1)}) - \lambda_{h,1}}{\varepsilon}\right)_- . \tag{4.17}$$

On résoud (4.16) par une méthode de gradient. La détermination d'une valeur approchée de $\lambda_h(u_h^{(n+1)})$ a été faite par la méthode de la puissance inverse itérée.

Nous avons effectué des essais dans le cas des exemples 2 et 3 avec des domaines Ω de $\mathbf{R}$ et de $\mathbf{R}^2$. Nous indiquons ici les résultats obtenus dans le cas de l'exemple 3 avec $\Omega =]0, 1[$, $\beta = +\infty$ et comme conditions aux limites

$$w(0) = w'(1) = 0.$$

On peut résoudre les conditions nécessaires et suffisantes (3.4), (3.5) couplées avec (2.12). Si on pose

$$\xi = \frac{\sqrt{\lambda_1}}{\alpha},$$

$$\mu(\theta) = 4\sqrt{\frac{\lambda_1}{3}}\frac{\sin^2\theta}{\alpha}.$$

On obtient alors pour l'épaisseur de la structure optimale

$$\bar{u}(x) = \begin{cases} \alpha & 0 \leqq x \leqq x_0, \\ \dfrac{\alpha}{\sin^2 \theta_0} \sin(\theta(x)) & x_0 \leqq x \leqq 1, \end{cases}$$

où (x_0, θ_0) est solution du système

$$\left.\begin{aligned} &2\theta_0 - \sin 2\theta_0 - \pi = \mu(\theta_0)(x_0 - 1) \\ &\frac{\operatorname{tg} \xi x_0}{\alpha\xi} = \frac{\operatorname{tg} \theta_0}{3\sqrt{\dfrac{\lambda_1}{3}}} \end{aligned}\right\}$$

et $\theta(x)$ est solution de

$$2\theta - \sin 2\theta - \pi = \mu(\theta_0)(x - 1).$$

Afin de considérer les mêmes données physiques que [9], nous avons pris

$$u_1(x) \equiv \frac{4}{10\pi}\sqrt{\frac{\pi}{3}} = 0{,}130\,294\,0\ldots$$

[au lieu de $u_1(x) \equiv 1$]

et $\alpha = 0{,}05$.

Dans ce cas, on a

$$\lambda_1 = \lambda(u_1) = 0{,}041\,887\,9\ldots$$

et le poids minimal

$$\mathrm{M} = \int_0^1 \bar{u}(x)\, dx = 0{,}114\,034\ldots$$

On a discrétisé l'intervalle [0, 1] en 20 intervalles (donc $P = 20$ et $h = 1/20$). On a obtenu, au bout de 5 itérations de la méthode de la puissance inverse itérée

$$\lambda_{1,h} = 0{,}041\,912.$$

La convergence et la vitesse de convergence dépendent du choix de la méthode du gradient et de ε. Pour l'un de ces choix, nous avons obtenu la convergence en 4 itérations et

$$\lambda_h(u_h^{(4)}) = 0{,}0419\,36,$$

$$\int_0^1 u_h^{(4)}(x)\, dx = 0{,}114\,123,$$

$$\frac{\max\limits_{1 \leqq k \leqq P} \left| \bar{u}((k-(1/2))h) - U_k^{(4)} \right|}{\max\limits_{x \in [0, 1]} \bar{u}(x)} \leqq 0{,}0013,$$

$u_h^{(4)} = (U_k^{(4)}) \in \mathbf{R}^P.$

REMARQUE 4.3 : Nous n'avons pu démontrer la convergence du problème approché vers le problème continu dans le cas des exemples 2 et 3. Néanmoins, les essais numériques effectués, dont l'un deux est décrit ici, ont montré que $\bar{u}_h$ solution de $(\mathscr{P}_h)$ approxime bien une solution $\bar{u}$ de $(\mathscr{P})$.

APPENDICE

Nous allons étudier, dans un cadre abstrait, un certain problème d'optimisation afin d'appliquer, les résultats obtenus, à notre problème d'optimisation en théorie des structures.

Auparavant rappelons les propriétés des fonctions pseudo-convexes et quasi convexes. On trouvera dans Mangazarian [11] la démonstration de ces résultats dans le cas où E est de dimension finie mais ces démonstrations sont valables dans le cas où E est de dimension infinie.

Soient E un E. L. C. S. sur $\mathbf{R}$, C un convexe de E et G une application de C dans $\mathbf{R}$. Posons pour tout $e \in \mathbf{R}$:

$\Lambda_e = \{ u;\ G(u) \leqq e \}.$

DÉFINITION A.1 : (i) *on dit que G est pseudo-convexe sur C si G est Gateaux différentiable sur C et si*

$$\forall (u, v) \in C \times C, \quad G'(u).(v-u) \geqq 0 \quad \Rightarrow \quad G(v) \geqq G(u); \tag{A.1}$$

(ii) *on dit que G est pseudo-concave sur C si $-G$ est pseudo-convexe.*

REMARQUE A.1 : Une fonction convexe et Gateaux différentiable sur C est pseudo-convexe.

PROPOSITION A.1 : *Si G est pseudo-convexe sur C alors :*

(i) Λ_e *est convexe pour tout* $e \in \mathbf{R}$;

(ii) $\forall (u, v) \in C \times C \, \forall \xi \in [0, 1]$,

$$G(\xi v + (1-\xi) u) \leqq \operatorname{Max}(G(u), G(v)); \tag{A.2}$$

(iii) $\forall (u, v) \in C \times C$ *tel que* $G(v) \leqq G(u)$ *alors* $G'(u).(v-u) \leqq 0$; (A.3)

(iv) $\forall (u, v) \in C \times C$ *tel que* $G(v) \neq G(u)$ *alors* $\forall \xi \in]0, 1[$;

on a

$$G(\xi v + (1-\xi) u) < \operatorname{Max}(G(u), G(v)). \tag{A.4}$$

REMARQUE A.2 : Les propriétés (i) et (ii) sont équivalentes; on dit dans ce cas que G est quasi convexe. La propriété (iii) est équivalente à l'une des deux premières si G est Gateaux différentiable.

Soient J et λ deux fonctions de E dans $\mathbf{R}$. On s'intéresse aux problèmes d'optimisation suivants :

$$(\mathscr{P}) \quad \operatorname*{Inf}_{\substack{u \in C \\ \lambda(u) = \lambda_1}} J(u),$$

$$(\mathscr{Q}) \quad \operatorname*{Inf}_{\substack{u \in C \\ \lambda(u) \geqq \lambda_1}} J(u),$$

où $\lambda_1 = \lambda(u_1)$, $u_1 \in C$.

PROPOSITION A.2 : *On suppose que*

J est pseudo-convexe sur C, (A.5)

λ est continue sur C, (A. 6)

$\exists\, u_\alpha \in C$ tel que $\lambda(u_\alpha) < \lambda_1$ et pour tout $u \in C$ $u \neq u_\alpha$ implique $J(u) > J(u_\alpha)$ alors les problèmes $(\mathscr{P})$ et $(\mathscr{Q})$ sont équivalents, c'es-à-dire toute solution de $(\mathscr{P})$ est solution de $(\mathscr{Q})$ et réciproquement. (A.7)

Démonstration : On a

$$\operatorname{Inf} \mathscr{Q} \leqq \operatorname{Inf} \mathscr{P}.$$

Supposons que cette inégalité soit stricte, cela signifie

$$\exists\, v \in C \quad \text{tel que } \lambda(v) > \lambda_1,$$
$$J(v) < \operatorname{Inf} \mathscr{P},$$

(A.7) et (A.2) montrent que

$$\forall\, \xi \in [0, 1], \quad J(\xi u_\alpha + (1-\xi) v) \leqq \operatorname{Max}(J(u_\alpha), J(v)) = J(v) < \operatorname{Inf} \mathscr{P}. \tag{A.8}$$

λ étant continue sur $[u_\alpha, v]$ il existe $\xi_0 \in]0, 1[$ tel que

$$\lambda(\xi_0\, u_\alpha + (1-\xi_0) v) = \lambda_1$$

et, par conséquent,

$$J(\xi_0 u_\alpha + (1-\xi_0) v) \geqq \operatorname{Inf} \mathscr{P},$$

ce qui est en contradiction avec (A.8). Par suite, on a

$$\operatorname{Inf} \mathscr{P} = \operatorname{Inf} \mathscr{Q} \tag{A.9}$$

Cette relation nous montre que si $\bar{u}$ est une solution de $(\mathscr{P})$, alors $\bar{u}$ est une solution de $(\mathscr{Q})$. Étudions la réciproque.

Soit $\bar{u}$ une solution de $(\mathscr{Q})$. Si $\lambda(\bar{u})=\lambda_1$, alors $\bar{u}$ est une solution de $(\mathscr{P})$. La proposition sera complètement démontrée si l'on montre que l'assertion

$$\lambda(\bar{u}) > \lambda_1 \tag{A.10}$$

est absurde.

Supposons (A.10) vérifiée, alors $\exists\, \xi_0 \in]0,1[$ tel que $\lambda(\xi_0\, u_\alpha+(1-\xi_0)\,\bar{u})=\lambda_1$. De plus, d'après (A.7) (A.4), on a

$$J(\xi_0\, u_\alpha+(1-\xi_0)\,\bar{u}) < \operatorname{Max}(J(u_\alpha), J(\bar{u}))=\operatorname{Inf} \mathscr{Q}.$$

Compte tenu de (A.9), on arrive à la contradiction

$$J(\xi_0\, u_\alpha+(1-\xi_0)\,\bar{u}) < \operatorname{Inf} \mathscr{P}.$$

PROPOSITION A.3 : *Sous les hypothèses* (A.5) :

$$\lambda \text{ pseudo-concave sur } C, \tag{A.11}$$

$$\exists\, u_\gamma \in C \text{ tel que } \lambda(u_\gamma) > \lambda_1, \tag{A.12}$$

on a : $\bar{u}\in C$, *vérifiant* $\lambda(\bar{u}) \geqq \lambda_1$, *est solution du problème* $(\mathscr{Q})$ *si et seulement si* $\exists\, \bar{\eta} \leqq 0$ *tel que*

$$J'(\bar{u}).(v-\bar{u})+\bar{\eta}\,\lambda'(\bar{u}).(v-\bar{u}) \geqq 0, \qquad \forall v\in C, \tag{A.13}$$

$$\bar{\eta}\,(\lambda(\bar{u})-\lambda_1)=0. \tag{A.14}$$

Démonstration : (i) Nous allons tout d'abord montrer que la condition est nécessaire. Soit $\bar{u}$ une solution de $(\mathscr{Q})$, alors, d'après Halkin [8] $\exists\,(\eta_0, \eta_1)\in \mathbf{R}^2$ tel que

$$(\eta_0, \eta_1)\neq(0,0),$$

$$\eta_0 \leqq 0\ \eta_1 \leqq 0,$$

$$\eta_0\, J'(\bar{u}).(v-\bar{u})-\eta_1\,.\,\lambda'(\bar{u}).(v-\bar{u}) \leqq 0, \qquad \forall v\in C, \tag{A.15}$$

$$\eta_1\,(\lambda(\bar{u})-\lambda_1)=0. \tag{A.16}$$

On va montrer que $\eta_0\neq 0$ car, alors en divisant (A.15) et (A.16) par η_0, on obtiendra (A.13) et (A.14).

1^er^ *cas :* $\eta_1=0$ alors $\eta_0\neq 0$.

2^e^ *cas :* $\eta_1\neq 0$ alors dans ce cas on a

$$\lambda(u)=\lambda_1.$$

Supposons $\eta_0=0$ la relation (A.15) s'écrit alors

$$\lambda'(\bar{u}).(v-\bar{u}) \leqq 0, \qquad \forall v\in C$$

et donc, d'après (A.11) :

$$\lambda(v) \leqq \lambda(\bar{u}), \qquad \forall v \in C.$$

En particulier

$$\lambda(u_\gamma) \leqq \lambda_1$$

ce qui est en contradiction avec (A.12).

(ii) Montrons que la condition est suffisante. Soit $\bar{u} \in C$ vérifiant $\lambda(\bar{u}) \geqq \lambda_1$, (A.13) et (A.14).

1^er^ *cas :* $\eta = 0$. (A.13), (A.5) impliquent alors

$$J(v) \geqq J(\bar{u}), \quad \forall v \in C$$

et donc $\bar{u}$ est solution de $(\mathscr{Q})$.

2^e^ *cas :* $\eta \neq 0$ alors nécessairement $\lambda(\bar{u}) = \lambda_1$.

Soit $v \in C$ vérifiant :

$$\lambda(v) \geqq \lambda_1 = \lambda(\bar{u}),$$

alors (A.11) implique :

$$\lambda'(\bar{u}).(v - \bar{u}) \geqq 0$$

et donc

$$J'(\bar{u}).(v - \bar{u}) \geqq 0,$$

ce qui, d'après (A.5) montre que $\bar{u}$ est solution de $(\mathscr{Q})$.

COROLLAIRE A.1 : *On fait les hypothèses* (A.5), (A.7), (A.11) et (A.12). *Soit $\bar{u} \in C$ tel que $\lambda(\bar{u}) = \lambda_1$, alors $\bar{u}$ est solution de $(\mathscr{P})$ si et seulement si $\exists\, \bar{\eta} < 0$ tel que :*

$$J'(\bar{u}).(v - \bar{u}) + \bar{\eta}\,\lambda'(\bar{u}).(v - \bar{u}) \geqq 0, \qquad \forall v \in C.$$

De plus, $(\mathscr{P})$ et $(\mathscr{Q})$ sont équivalents.

Démonstration : On applique les deux propositions précédentes et on montre, grâce à (A.7) que $\bar{\eta} \neq 0$.

REMARQUE A.3 : La somme de deux fonctions pseudo-convexes n'est pas nécessairement pseudo-convexe. Et donc, on ne peut déduire de (A.17) une condition du type :

$$J(v) - J(\bar{u}) + \bar{\eta}\,(\lambda(v) - \lambda_1) \geqq 0, \qquad \forall v \in C. \tag{A.18}$$

Par contre, si l'on suppose que

$$\forall \eta \leqq 0, \quad J(v)+\eta\lambda(v) \text{ est pseudo-convexe,} \tag{A 19}$$

on obtient

PROPOSITION A 4 *On fait les hypothèses* (A 5), (A 7), (A 11), (A 12) et (A 19) *Soit* $\bar{u} \in C$ *alors* $\bar{u}$ *est solution du problème* $(\mathscr{Q})$, *et donc de* $(\mathscr{P})$ *si, et seulement si*

$$\lambda(\bar{u}) \geqq \lambda_1$$

et

$\exists \bar{\eta} \leqq 0$ *vérifiant* (A 18)

Démonstration Le corollaire A 1 et l'hypothèse A 19 montrent que la condition est nécessaire D'autre part, il est évident que la condition est suffisante

BIBLIOGRAPHIE

1 J L P ARMAND et W J VITTE, *Foundations of Aeroelastic Optimization and Some Applications to Continuous Systems*, S U D A A R , n° 390, Stanford University 1970

2 J L P ARMAND, *Applications of the Theory of Optimal Control of Distributed Parameter Systems to Structural Optimization*, N A S A , C R 2044, juin 1972

3 P BROUSSE, *Les problemes d'optimisation en mecanique des structures*, Monographie (à paraître)

4 P G CIARLET, *Discrete Maximum Principle for Finite Difference Operators*, Acquationes Math vol 4 1970 p 338-352

5 P G CIARLET, *Numerical Analysis of the Finite Element Method*, Seminaire de Mathematiques Superieures, 1975 Les Presses de l'Universite de Montreal 1976

6 P G CIARLET et P A RAVIART, *Maximum Principle and Uniform Convergence for the Finite Element Method*, Comp Methods in Appl Mech and Engin , vol 2, 1973, p 17-31

7 M FORTIN *Cours d'Analyse convexe* Universite Paris-Sud, Publications Mathematiques d Orsay 78 3

8 H HALKIN *Calculus of Variations Classical and Modern*, C I M E 1966 p 177-192

9 E J HAUG K C PAN et T D STREETER, *A Computational Method for Optimal Structural Design I Piecewise Uniform Structures*, Int J num Meth Eng , vol 5 1972, p 171-184, *II Continuous Problems*, Int J num Meth Eng , vol 9, 1975, p 649-667

10 C JOURON, *Analyse theorique et numerique de quelques problemes d'optimisation intervenant en theorie des structures*, These de Doctorat d'Etat, Universite Paris-Sud 1976

11 O L MANGASARIAN *Nonlinear Programming* McGraw-Hill 1969

12 F MIGNOT *Controle de fonctions propres* C R Acad Sci Paris 280 serie A 1975 p 333-335

13. F MIGNOT, *Inéquations variationnelles et contrôle*, Thèse de Doctorat d'État, Université Paris-VI, 1975.
14. S. G MIKLIN, *Variational Methods in Mathematical Physics*, Pergamon Press, 1964.
15. F. MURAT, Communication personnelle.
16. F MURAT, *Contre exemple pour divers problèmes où le contrôle intervient dans les coefficients*, Ann. Math. Pur. Appl., vol. 112, 1977, p. 49-68
17. W. PRAGER et J. E TAYLOR, *Problems of Optimal Structural design*, J Appl. Mech., série E, vol 35, 1968, p 102-107
18. R T. ROCKAFELLAR, *The Multiplier Method of Hestenes and Powell Applied to Convex Programming*, J of Opt. Th and Appl., vol. 12, 1973, p 555-562.
19. R. T. ROCKAFELLAR, *Augmented Lagrange Multiplier Functions and Duality in non Convex Programming*, S.I.A M. J Control, vol. 12, 1974, p. 268-285.
20. G. STAMPACCHIA, *Equations elliptiques du second ordre à coefficients discontinus*, Séminaire de Mathématiques Supérieures 1965, Les Presses de l'Université de Montréal, 1966
21 F. STRANG et G FIX, *An Analysis of the Finite Element Method*, Prentice Hall, 1973.
22. J E. TAYLOR, *Minimum Mass bar for Axial Vibration at Specified Natural Frequency*, A.I A.A. Journal, vol 5, 1965, p 1911-1913
23. J. E. TAYLOR, *Optimum Design of a Vibrating bar with Specified Minimum Cross Section*, A I.A A. Journal, vol 6, 1968, p 1379-1381.
24. R. TEMAM, *On the Theory and Numerical Analysis of the Navier-Stokes Equations*, North-Holland-Elsevier, Amsterdam-New York, 1977
25. M I. TURNER, *Design of Minimum Mass Structures with Specified Natural Frequencies*, A I A.A. Journal, vol. 5, 1967, p. 406-412
26. J. P. VAN DE WIELE, *Résolution numérique d'un problème de contrôle optimal de valeurs propres et vecteurs propres*, Thèse 3e cycle, Université Paris-VI, 1974.
27. R. VARGA, *Matrix Iterative Analysis*, Prentice Hall, 1962.
28. T A. WEISSHAAR, *An application of Control Theory Methods to the Optimization of Structures Having Dynamic or Aeroelastic Constrains*, S.U.D A A R., n° 412, Stanford University, 1970