RAIRO. ANALYSE NUMÉRIQUE

JEAN DUCHON

Sur l'erreur d'interpolation des fonctions de plusieurs variables par les D^m-splines

RAIRO. Analyse numérique, tome 12, nº 4 (1978), p. 325-334
<http://www.numdam.org/item?id=M2AN_1978__12_4_325_0>

R.A.I.R.O. Analyse numérique/Numerical Analysis
(vol. 12, n° 4, 1978, p. 325 à 334)

SUR L'ERREUR D'INTERPOLATION DES FONCTIONS DE PLUSIEURS VARIABLES PAR LES D^m-SPLINES (*)

par Jean DUCHON [1]

Communiqué par P. G. CIARLET

Résumé. — *Considérant une fonction f de $H^m(\Omega)$ et la D^m-spline f_m^A qui interpole f sur un sous-ensemble donné A de $\overline{\Omega}$ en minimisant la semi-norme $\| D^m v \|_{L^2(\mathbf{R}^n)}$, on établit des estimations de l'erreur $f-f_m^A$ et de ses dérivées en fonction de la distance h de A à $\overline{\Omega}$, du type $\| D^k(f-f_m^A) \|_{L^p(\Omega)} = o(h^{m-k-(n/2)+(n/p)})$.*

INTRODUCTION

La D^m-spline d'interpolation f_m^A de f sur A est par définition la solution, unique si A contient un sous-ensemble P_{m-1}-unisolvent, du problème : minimiser $\| D^m u \|_{L^2(\mathbf{R}^n)}$ parmi les fonctions $u \in D^{-m} L^2$ qui coïncident avec f sur A. On suppose $m > n/2$ de sorte que les éléments de $D^{-m} L^2$ (distributions dont les dérivées d'ordre m sont dans $L^2(\mathbf{R}^n)$) sont en fait des fonctions continues.

$D^m u(t)$ désigne la dérivée m-ième de u en $t = (t_1, \ldots, t_n) \in \mathbf{R}^n$, c'est une forme m-linéaire sur $(\mathbf{R}^n)^m$, et $| D^m u(t) |$ est sa norme comme élément du produit tensoriel euclidien $\otimes^m \mathbf{R}^n$:

$$| D^m u(t) | = \left(\sum_{i_1, \ldots, i_m = 1}^{n} \left| \frac{\partial^m u(t)}{\partial t_{i_1} \ldots \partial t_{i_m}} \right|^2 \right)^{1/2}.$$

Ainsi

$$\| D^m u \|_{L^2(\mathbf{R}^n)} = \left(\int_{\mathbf{R}^n} | D^m u(t) |^2 \, dt \right)^{1/2} = \left(\sum_{i_1, \ldots, i_m = 1}^{n} \int_{\mathbf{R}^n} \left| \frac{\partial^m u(t)}{\partial t_{i_1} \ldots \partial t_{i_m}} \right|^2 dt \right)^{1/2}.$$

Le terme de D^m-spline est en accord avec la terminologie usuelle, où on appelle

(*) Reçu février 1978.
[1] Laboratoire I.M.A.G., Université de Grenoble, Grenoble.

L-spline (à une variable) ce qu'on obtient en minimisant $\int_a^b |Lu|^2$, L étant un opérateur différentiel, [7].

Mais ici D^m est un opérateur différentiel à valeurs dans $\otimes^m \mathbf{R}^n$, et on minimise la norme de $|D^m u|$ dans $L^2(\mathbf{R}^n)$ et non dans un $L^2(\Omega)$, Ω borné. *Voir* [5] pour la caractérisation de f_m^A en vue du calcul, lorsque A est fini.

Nous allons montrer que, si Ω est un ouvert borné assez régulier de $\mathbf{R}^n$, f une fonction de $H^m(\Omega)$, et A un sous-ensemble de $\overline{\Omega}$, on a

$$\| D^k(f-f_m^A) \|_{L^p(\Omega)} = o(h^{m-k-(n/2)+(n/p)}),$$

où $h = \sup_{t \in \Omega} \inf_{a \in A} |t-a|$, chaque fois que $p \in [2, \infty]$ et l'entier $k=0, 1, \ldots$ sont tels que l'immersion $H^m = W^{m,2} \subset W^{k,p}$ ait lieu (pour un ouvert borné régulier : d'après le théorème de Sobolev, c'est le cas si $m-k-(n/2)+(n/p) \geqq 0$, *sauf*, si n est pair, pour $k=m-(n/2)$ avec $p=\infty$).

Décrivons schématiquement la démonstration.

On commence par majorer $\| D^k(f-f_m^A) \|_{L^p(\Omega)}$ en fonction de $\| D^m(f_m^\Omega - f_m^A) \|_{L^2(\mathbf{R}^n)}$, où f_m^Ω est la D^m-spline d'interpolation de f sur Ω, qui est définie sur tout $\mathbf{R}^n$ et coïncide avec f sur Ω (et même sur $\overline{\Omega}$, ce sont des fonctions continues). Compte tenu du fait que $f_m^\Omega - f_m^A$ s'annule sur A, on doit majorer $\| D^k u \|_{L^p(\Omega)}$ en fonction de $\| D^m u \|_{L^2(\mathbf{R}^n)}$ (et h) pour les fonctions $u \in D^{-m} L^2$ qui s'annulent sur A. Pour cela on définit un recouvrement (Ω_i) de Ω par des boules de rayon proportionnel à h, chacune contenant un ensemble P_{m-1}-unisolvent $A_i \subset \overline{A}$. Dans chaque Ω_i on majore l'erreur de P_{m-1}-interpolation de Lagrange sur A_i. En « recollant les morceaux » (c'est là qu'intervient la condition $2 \leqq p \leqq \infty$) on obtient

$$(\star) \quad \| D^k(f-f_m^A) \|_{L^p(\Omega)} \leqq C h^{m-k-(n/2)+(n/p)} \| D^m(f_m^\Omega - f_m^A) \|_{L^2(\mathbf{R}^n)}.$$

Il reste à montrer que pour $f \in H^m(\Omega)$, $\| D^m(f_m^\Omega - f_m^A) \|_{L^2(\mathbf{R}^n)} \to 0$ lorsque A varie de telle sorte que $h \to 0$.

C'est d'ailleurs classique : s'agissant d'interpolation « d'énergie minimale », l'énergie de l'erreur d'interpolation tend vers zéro; c'est par exemple une conséquence du résultat abstrait de J. L. Joly [6], comme indiqué dans [5], du moins pour une *suite* (A_k). On le démontre ici directement en utilisant $(\star)$.

Nous allons préciser :

– le recouvrement de Ω par des boules Ω_i (§ 1);

– comment estimer l'erreur de P_{m-1}-interpolation de Lagrange sur A_i, dans Ω_i (§ 2);

– comment « recoller les morceaux » pour obtenir les inégalités $(\star)$ (§ 3);

– l'argument permettant de montrer la convergence « en énergie » $\| D^m (f_m^{\Omega} - f_m^A) \|_{L^2(\mathbf{R}^n)} \to 0$ (§ 4).

Une analyse d'erreur analogue à celle-ci a été faite par R. Arcangeli [1] pour les splines définies par M. Atteia [3] (où la semi-norme minimisée est $\| D^m u \|_{L^2(\Omega)}$ au lieu de $\| D^m u \|_{L^2(\mathbf{R}^n)}$) avec les différences suivantes : Ω est supposé triangulé par A, donc polyédrique avec des points de A sur le bord; h est un paramètre dépendant de la triangulation; enfin l'erreur et ses dérivées sont estimées seulement dans $L^2(\Omega)$.

1. RECOUVREMENT DE Ω

PROPOSITION 1 : *Soit Ω un ouvert de $\mathbf{R}^n$ ayant la propriété du cône intérieur d'angle $\theta > 0$ et de rayon $r > 0$: pour tout $t \in \Omega$ il existe un vecteur unitaire $\xi(t) \in \mathbf{R}^n$ tel que le cône*

$$C(t, \xi(t), \theta, r) = \{ t + \lambda\eta : \eta \in \mathbf{R}^n, |\eta| = 1, \eta . \xi(t) \geqq \cos\theta, 0 \leqq \lambda \leqq 1 \}$$

soit contenu dans Ω.

Il existe M et M_1 (dépendant de n et θ) et $\varepsilon_0 > 0$ (dépendant de θ et r) tels que, pour tout $\varepsilon \leqq \varepsilon_0$ strictement positif, il existe $T_\varepsilon \subset \Omega$ vérifiant :

(i) $B(t, \varepsilon) \subset \Omega, \forall t \in T_\varepsilon$;

(ii) $\Omega \subset \bigcup_{t \in T_\varepsilon} B(t, M\varepsilon)$;

(iii) $\sum_{t \in T_\varepsilon} 1_{B(t, M\varepsilon)} \leqq M_1$;

où $B(t, R)$ désigne la boule fermée de centre t et de rayon R, et 1_E est la fonction indicatrice de l'ensemble E, égale à 1 sur E et 0 ailleurs (la condition (iii) *signifie que tout point de $\mathbf{R}^n$ se trouve dans au plus M_1 boules de rayon $M\varepsilon$ centrées sur T_ε).*

Démonstration : Considérons dans $\mathbf{R}^n$ l'ensemble Z^n des points de coordonnées entières. Quel que soit $t \in \mathbf{R}^n$, il existe $t' \in Z^n$ tel que $| t - t' | \leqq \sqrt{n}/2$ ($t'_i = t_i$ arrondi à l'entier le plus proche). Par une homothétie de centre 0 et de rapport $2\varepsilon/\sqrt{n}$, on voit que toute boule de rayon ε rencontre $(2\varepsilon/\sqrt{n})\, Z^n$, donc toute boule de rayon 2ε contient une boule de rayon ε centrée sur $(2\varepsilon/\sqrt{n})\, Z^n$.

D'autre part, posant $r' = r \sin\theta/(1 + \sin\theta)$, la boule de rayon r' et de centre $t + (r - r')\, \xi(t)$ est contenue dans le cône $C(t, \xi(t), \theta, r)$, donc dans Ω. Posons $\varepsilon_0 = r'/2$, et soit $\varepsilon = \lambda\varepsilon_0$ avec $0 < \lambda \leqq 1$. Pour chaque $t \in \Omega$, le cône $C(t, \xi(t), \theta, \lambda r)$ est contenu dans $C(t, \xi(t), \theta, r)$ donc dans Ω, et contient une boule de rayon

$\lambda r' = 2\varepsilon$, qui elle-même contient une boule de rayon ε centrée sur $(2\varepsilon/\sqrt{n})\, Z^n$. Le centre t' de cette boule se trouve dans $C(t, \xi(t), \theta, \lambda r)$ donc $|t-t'| \leqq \lambda r$, donc la boule de centre t' et de rayon $\lambda r = (r/\varepsilon_0)\, \varepsilon$ contient t.

On obtient ainsi (i) et (ii) avec

$$\varepsilon_0 = \frac{r}{2}\,\frac{\sin\theta}{1+\sin\theta} \qquad \text{et} \qquad M = \frac{r'}{\varepsilon_0} = 2 + \frac{2}{\sin\theta},$$

et

$$T_\varepsilon = \left\{ t \in \frac{2\varepsilon}{\sqrt{n}} Z^n : B(t, \varepsilon) \subset \Omega \right\}.$$

Pour obtenir (iii) il suffit de remarquer que la boule $B(t, M\varepsilon)$ est contenue dans le cube $\prod_{i=1}^{n} [t_i - M\varepsilon,\ t_i + M\varepsilon]$, qui contient au plus $(M\sqrt{n}+1)^n$ points de $(2\varepsilon\sqrt{n})\, Z^n$. On peut donc prendre $M_1 = (M\sqrt{n}+1)^n$, par exemple.

2. BORNES IMPLICITES DE L'ERREUR DE P_{m-1}-INTERPOLATION DE LAGRANGE

Soit m entier $> n/2$, et appelons N la dimension de l'espace P_{m-1} des polynômes (à n variables) de degré $\leqq m-1$.

LEMME : *Soit Ω un ouvert borné connexe de $\mathbf{R}^n$, à frontière lipschitzienne.*

Soit $B \subset \Omega^N$ un ensemble compact *de N-uplets $b = (b^1, \ldots, b^N)$ P_{m-1}-unisolvents, et soit Π^b l'opérateur de P_{m-1}-interpolation de Lagrange, défini pour $u \in H^m(\Omega)$ $(\subset C(\overline{\Omega}))$ par :*

$$\begin{cases} \Pi^b u \in P_{m-1}, \\ \Pi^b u(b^i) = u(b^i), \qquad i = 1, \ldots, N. \end{cases}$$

Soit enfin k entier $\geqq 0$ et $p \in [1, \infty]$ tels que

$$H^m(\Omega) = W^{m,2}(\Omega) \subset W^{k,p}(\Omega).$$

Il existe C (dépendant de Ω, B, k et p) tel que l'on ait :

$$\| D^k (u - \Pi^b u) \|_{L^p(\Omega)} \leqq C \, \| D^m u \|_{L^2(\Omega)}$$

pour tout $b \in B$ et toute $u \in H^m(\Omega)$.

Démonstration : Pour chaque b, l'application $u \mapsto u - \Pi^b u$ de $H^m(\Omega)$ dans $H^m(\Omega)$ est linéaire, continue, et s'annule sur P_{m-1}. Donc $I - \Pi^b$: $u + P_{m-1} \mapsto u - \Pi^b u$ est linéaire continue de $H^m(\Omega)/P_{m-1}$ dans $H^m(\Omega)$. Comme Ω

est connexe et assez régulier, l'application $u+P_{m-1} \to \|D^m u\|_{L^2(\Omega)}$ est une norme sur $H^m(\Omega)/P_{m-1}$, équivalente à la norme hilbertienne quotient.

Par ailleurs si k et p sont tels que $H^m(\Omega)=W^{m,2}(\Omega) \subset W^{k,p}(\Omega)$ (auquel cas l'injection est nécessairement continue, d'après le théorème du graphe fermé), on a

$$\|D^k u\|_{L^p(\Omega)} \leqq C|u|_{H^m(\Omega)}, \qquad \forall u \in H^m(\Omega).$$

Finalement il existe une constante $C(b)$ telle que

$$\|D^k(u-\Pi^b u)\|_{L^p(\Omega)} \leqq C(b)\|D^m u\|_{L^2(\Omega)}, \qquad \forall u \in H^m(\Omega).$$

C'est tout à fait classique (*voir* [4] par exemple).

Il reste à montrer que $C(b)$ reste borné lorsque b décrit B, un ensemble compact de N-uplets P_{m-1}-unisolvents. Pour cela on applique le théorème dit « principe de la borne uniforme » à la famille (indexée par $b \in B$) des opérateurs linéaires continus $I-\Pi^b$ de $H^m(\Omega)/P_{m-1}$ dans $H^m(\Omega)$: il suffit de montrer que pour u fixée $\in \mathrm{H}^m(\Omega)$, l'ensemble $\{\Pi^b u : b \in B\}$ est borné dans $H^m(\Omega)$.

Soit $p_1, \ldots, p_N$ une base de P_{m-1}, et $M(b)$ la matrice $N \times N$ de terme général $m_{ij}(b)=p_j(b^i)$; notons $m_{ij}^{-1}(b)$ le terme général de la matrice inverse $M^{-1}(b)$. On a alors

$$\Pi^b u = \sum_{i,j} u(b^i)\, m_{ij}^{-1}(b)\, p_j.$$

Mais u est continue sur $\overline{\Omega}$ donc

$$|\Pi^b u|_{H^m(\Omega)} \leqq C(u) \sum_{i,j} |m_{ij}^{-1}(b)|\,|p_j|_{H^m(\Omega)}.$$

D'autre part, l'inversion d'une matrice est une opération continue, et $M(b)$ dépend continûment de b, donc chaque fonction $m_{ij}^{-1}(b)$ est continue sur B compact, chaque $\{m_{ij}^{-1}(b) : b \in B\}$ est borné. Donc $|\Pi^b u|_{H^m(\Omega)}$ reste borné quand b décrit B.

On a donc $|u-\Pi^b u|_{H^m(\Omega)} \leqq C\|D^m u\|_{L^2(\Omega)}$, $\forall b \in B$, $\forall u \in H^m(\Omega)$. Utilisant encore $\|D^k u\|_{L^p(\Omega)} \leqq C|u|_{H^m(\Omega)}$, on obtient le résultat.

REMARQUE : Pour $p=2$, avec Ω convexe par exemple, ce résultat peut être déduit de celui de R. Arcangeli et J. L. Gout [2], où de plus une borne *explicite* est donnée pour la constante C, faisant intervenir les normes (dans $L^\infty(\Omega)$) des polynômes de base d'interpolation de Lagrange sur chaque ensemble $\{b^1, \ldots, b^N\}$.

PROPOSITION 2 : *Il existe $R > 0$ (dépendant de n et m) et (pour tout $M \geqq 1$, k entier $\geqq 0$ et $p \in [1, \infty]$ tels que $W^{m,2} \subset W^{k,p}$) une constante C (dépendant* *de M, n, m, k et p) vérifiant ceci : pour tout $h > 0$ et tout $t \in \mathbf{R}^n$, la boule $B(t, Rh)$ contient N boules $\beta_1, \ldots, \beta_N$ de rayon h telles que l'on ait :*

$$\| D^k u \|_{L^p(B(t, MRh))} \leqq C h^{m-k-(n/2)+(n/p)} \| D^m u \|_{L^2(B(t, MRh))}$$

pour toute $u \in H^m(B(t, MRh))$ qui s'annule en au moins un point de chacune des boules $\beta_1, \ldots, \beta_N$.

Démonstration : Soit $\{ b_0^1, \ldots, b_0^N \}$ un ensemble P_{m-1}-unisolvent (par exemple les N points de la forme $(k_1, \ldots, k_n)$ où les k_i sont des entiers $\geqq 0$ vérifiant $k_1 + \ldots + k_n \leqq m-1$). L'ensemble des N-uplets P_{m-1}-unisolvents est ouvert dans $(\mathbf{R}^n)^N$ (son complémentaire est l'ensemble des solutions d'un système d'équations algébriques), donc il existe $\delta > 0$ tel que $\{ b^1, \ldots, b^N \}$ soit encore P_{m-1}-unisolvent si $| b^i - b_0^i | \leqq \delta$. Par une homothétie de rapport $1/\delta$, posant $a^i = (1/\delta) b_0^i$, on obtient N boules $B(a^i, 1)$: le produit $\prod_{i=1}^{N} B(a^i, 1)$ est un compact de $(\mathbf{R}^n)^N$ formé de N-uplets P_{m-1}-unisolvents. L'ensemble $\bigcup_{i=1}^{N} B(a^i, 1)$ est borné donc contenu dans une boule $B(a, R)$ (dont le rayon R dépend de n et m).

Soit $M \geqq 1$. On peut appliquer le lemme précédent à la boule ouverte $\mathring{B}(a, MR)$: il existe une constante c (dépendant de M, n, m, k et p) telle que

$$\| D^k (u - \Pi^b u) \|_{L^p(B(a, MR))} \leqq c \| D^m u \|_{L^2(B(a, MR))}$$

si $u \in H^m(B(a, MR))$ et $b = (b^1, \ldots, b^N)$ avec $| b^i - a^i | \leqq 1$.

Mettant ce résultat sous une autre forme, on peut écrire :

$$\| D^k u \|_{L^p(B(a, MR))} \leqq c \| D^m u \|_{L^2(B(a, MR))}$$

pour toute $u \in H^m(B(a, MR))$ qui s'annule en un point de chacune des boules $B(a^i, 1)$.

Utilisons maintenant la technique (classique) du *changement d'échelle.*

Soit $h > 0$ et $t \in \mathbf{R}^n$. L'application $F : x \to t + h(x-a)$ transforme $B(a, MR)$ en $B(t, MRh)$; elle est affine, bijective, et a pour matrice jacobienne (constante) $h I_n$, de déterminant h^n. On a donc pour toute fonction φ définie sur $B(t, MRh)$:

$$\int_{B(t, MRh)} \varphi(x)\, dx = h^n \int_{B(a, MR)} \varphi(F^{-1}(y))\, dy.$$

D'autre part

$$D^k u(x) = h^{-k} D^k (u_0 F^{-1}) (F(x))$$

d'où si $u \in H^m(B(t, MRh))$:

$$\| D^k u \|_{L^p(B(t, MRh))} = h^{-k+(n/p)} \| D^k (u_0 F^{-1}) \|_{L^p(B(a, MR))} \qquad \text{pour} \quad 1 \leqq p < \infty,$$

et évidemment

$$\| D^k u \|_{L^\infty(B(t,\, MRh))} = h^{-k} \| D^k (u_0 F^{-1}) \|_{L^\infty(B(a,\, MR))},$$

et de même

$$\| D^m u \|_{L^2(B(t,\, MRh))} = h^{-m+(n/2)} \| D^m (u_0 F^{-1}) \|_{L^2(B(a,\, MR))}.$$

On obtient le résultat en posant $\beta_i = F(B(a^i, 1)) = B(t + h(a^i - a), h)$.

3. BORNES IMPLICITES DE L'ERREUR $f - f_m^A$

PROPOSITION 3 : *Soit Ω un ouvert borné connexe de $\mathbf{R}^n$, à frontière lipschitzienne, ayant la propriété du cône intérieur d'angle $\theta > 0$ et de rayon $r > 0$. Soit m entier $> n/2$. Il existe $h_0 > 0$ (dépendant de θ, r, n et m), K (dépendant de Ω et m), et, si k entier $\geqq 0$ et $p \in [2, \infty]$ sont tels que $H^m(\Omega) = W^{m,\,2}(\Omega) \subset W^{k,\,p}(\Omega)$, il existe C (dépendant de θ, n, m, k et p), tels que l'on ait, pour toute fonction $f \in H^m(\Omega)$ et tout ensemble $A \subset \overline{\Omega}$ vérifiant :*

$$h = \sup_{t \in \overline{\Omega}} \inf_{a \in A} | t - a | \leqq h_0,$$

$$(\star) \quad \begin{aligned} \| D^k (f - f_m^A) \|_{L^p(\Omega)} &\leqq C\, h^{m-k-(n/2)+(n/p)} \| D^m (f_m^\Omega - f_m^A) \|_{L^2(\mathbf{R}^n)} \\ &\leqq C\, h^{m-k-(n/2)+(n/p)} \| D^m f_m^\Omega \|_{L^2(\mathbf{R}^n)} \\ &\leqq KC\, h^{m-k-(n/2)+(n/p)} \| D^m f \|_{L^2(\Omega)}. \end{aligned}$$

LEMME 3.1 : *Pour toute $f \in H^m(\Omega)$, le problème : minimiser $\| D^m u \|_{L^2(\mathbf{R}^n)}$ parmi les $u \in D^{-m} L^2$ vérifiant $u|_\Omega = f$, a une solution unique f_m^Ω. De plus, il existe $K = K_m(\Omega)$ tel que l'on ait*

$$\| D^m f_m^\Omega \|_{L^2(\mathbf{R}^n)} \leqq K \| D^m f \|_{L^2(\Omega)}, \qquad \forall f \in H^m(\Omega).$$

Démonstration : L'ouvert Ω, à frontière lipschitzienne, a la propriété de m-prolongement : toute $f \in H^m(\Omega)$ a un prolongement $\tilde{f} \in H^m(\mathbf{R}^n)$. Comme évidemment $H^m(\mathbf{R}^n) \subset D^{-m} L^2$, la D^m-spline d'interpolation f_m^Ω de f sur Ω existe. Par définition, $\| D^m f_m^\Omega \|_{L^2(\mathbf{R}^n)} = \inf \{ \| D^m u \|_{L^2(\mathbf{R}^n)} : u \in D^{-m} L^2, u|_\Omega = f \}$. Donc l'application $f + P_{m-1} \to \| D^m f_m^\Omega \|_{L^2(\mathbf{R}^n)}$ n'est autre que la norme hilbertienne transportée de $D^{-m} L^2 / P_{m-1}$ sur $H^m(\Omega)/P_{m-1}$. Comme $\| D^m f \|_{L^2(\Omega)} \leqq \| D^m f_m^\Omega \|_{L^2(\mathbf{R}^n)}$, cette norme est plus fine que $f + P_{m-1} \to \| D^m f \|_{L^2(\Omega)}$, dont on a vu que, Ω étant connexe (et assez régulier), elle est équivalente à la norme hilbertienne quotient sur $H^m(\Omega)/P_{m-1}$. D'après un théorème de Banach, elles sont équivalentes, d'où le résultat.

REMARQUE : Si $F : \mathbf{R}^n \to \mathbf{R}^n$ est une *similitude* (application affine conservant les angles), on a $K_m(F(\Omega)) = K_m(\Omega)$. En effet $f_m^{F(\Omega)} = (f_0 F^{-1})_m^\Omega$ (l'interpolation D^m-spline commute avec les similitudes) puisque

$$\| D^m u \|_{L^2(\Omega)} = \lambda^{-m+(n/2)} \| D^m (u_0 F^{-1}) \|_{L^2(F(\Omega))} \quad \text{si} \quad u \in H^m(\Omega),$$

et $\| D^m u \|_{L^2(\mathbf{R}^n)} = \lambda^{-m+(n/2)} \| D^m u \|_{L^2(\mathbf{R}^n)}$ si $u \in D^{-m} L^2$, λ étant le rapport de similitude. Autrement dit *la constante K de l'énoncé ne dépend*, pour chaque m, *que de la forme de* Ω. On peut évidemment, si c'est utile, encadrer $K_m(F(\Omega))$ en fonction de $K_m(\Omega)$ pour une application affine inversible quelconque F.

En dimension $n=1$, on a toujours $K=1$: toute $f \in H^m(a, b)$ peut être prolongée (par son développement de Taylor à l'ordre $m-1$ en a et b) de telle sorte que $\int_{-\infty}^{\infty} |D^m f|^2 = \int_a^b |D^m f|^2$.

LEMME 3.2 : *Pour tout* $A \subset \overline{\Omega}$ *et toute* $f \in H^m(\Omega)$ *on a*

$$\| D^m f_m^\Omega \|_{L^2(\mathbf{R}^n)}^2 = \| D^m f_m^A \|_{L^2(\mathbf{R}^n)}^2 + \| D^m (f_m^\Omega - f_m^A) \|_{L^2(\mathbf{R}^n)}^2 .$$

Démonstration : $f_m^A + P_{m-1}$ est la projection orthogonale de 0 $(\in D^{-m} L^2 / P_{m-1})$ sur le sous-espace affine fermé des $u + P_{m-1}$ où $u = f$ sur A. Donc $f_m^A + P_{m-1}$ est orthogonal au sous-espace vectoriel parallèle : $\{ v + P_{m-1} : v = 0 \text{ sur } A \}$, donc à $f_m^\Omega - f_m^A + P_{m-1}$. D'où le résultat.

Cette relation est connue dans la littérature sur les fonctions-spline comme la *première relation intégrale*.

Notons également que $f_m^A + P_{m-1}$ est aussi la projection orthogonale de $f_m^\Omega + P_{m-1}$ sur l'orthogonal de $\{ v + P_{m-1} : v = 0 \text{ sur } A \}$ dans $D^{-m} L^2 / P_{m-1}$. (En particulier l'application $f_m^\Omega + P_{m-1} \to f_m^A + P_{m-1}$ est linéaire.)

Démonstration de la proposition 3 : Compte tenu des deux lemmes précédents, il suffit de montrer la première inégalité de ($\star$).

Toute boule de centre $t \in \overline{\Omega}$ et de rayon $h = \sup_{t \in \overline{\Omega}} \inf_{a \in A} | t - a |$ rencontre $\overline{A}$ (qui est compact). D'autre part la fonction $f_m^\Omega - f_m^A$ s'annule sur A donc, étant continue, sur $\overline{A}$. On peut appliquer la proposition 2 à $f_m^\Omega - f_m^A$ et écrire :

$$(\star\star) \quad \| D^k (f_m^\Omega - f_m^A) \|_{L^p(B(t, MRh))} \leq c h^{m-k+(n/2)-(n/p)} \| D^m (f_m^\Omega - f_m^A) \|_{L^2(B(t, MRh))}$$

où c dépend de n, m, k, p (vérifiant $W^{m,2} \subset W^{k,p}$) mais ne dépend pas de h, $f \in H^m(\Omega)$, et $t \in \Omega$; et R dépend seulement de n et m. On peut appliquer la proposition 1 avec $\varepsilon = R h$ dès que $h \leq h_0 = \varepsilon_0 / R$, où ε_0 dépend seulement de r et

θ : il existe un ensemble $S_h \subset \overline{\Omega}$ tel que toute boule de rayon Rh centrée sur S_h soit contenue dans Ω, chaque point de Ω appartenant à au moins une et au plus M_1 boules de rayon MR_h centrées sur S_h. M et M_1 sont des constantes dépendant seulement de θ et n.

L'inégalité ($\star\star$) est valable pour tout $t \in S_h$. *Si* $p \in [2, \infty[$ on peut appliquer *l'inégalité de Jensen* $(\Sigma x_i^p)^{1/p} \leqq (\Sigma x_i^2)^{1/2}$ et écrire :

$$\left(\sum_{t\in S_h}\int_{B(t,MRh)} |D^k(f_m^\Omega - f_m^A)|^p\right)^{1/p}$$
$$\leqq ch^{m-k-(n/2)+(n/p)}\left(\sum_{t\in S_h}\int_{B(t,MRh)} |D^m(f_m^\Omega - f_m^A)|^2\right)^{1/2}.$$

Comme $1_\Omega \leqq \sum_{t\in S_h} 1_{B(t,MRh)} \leqq M_1$ on a le résultat voulu avec $C = c\sqrt{M_1}$. Le cas $p=\infty$ est plus simple : on a

$$\|D^k(f_m^\Omega - f_m^A)\|_{L^\infty(\Omega)} \leqq \sup_{t\in S_h}\|D^k(f_m^\Omega - f_m^A)\|_{L^\infty(B(t,MRh))}$$
$$\leqq ch^{m-k-(n/2)}\left(\sum_{t\in S_h}\int_{B(t,MRh)} |D^m(f_m^\Omega - f_m^A)|^2\right)^{1/2}$$
$$\leqq ch^{m-k-(n/2)}\left(\mathrm{M}_1\int_{\mathbf{R}^n} |D^m(f_m^\Omega - f_m^A)|^2\right)^{1/2}$$
$$= c\sqrt{M_1}\, h^{m-k-(n/2)}\|D^m(f_m^\Omega - f_m^A)\|_{L^2(\mathbf{R}^n)}.$$

4. CONVERGENCE EN ÉNERGIE

PROPOSITION 4 : *Dans les conditions de la proposition* 3, *pour toute* $f \in H^m(\Omega)$ *et tout* $\varepsilon > 0$, *il existe* $h_1 > 0$ *tel que l'on ait :*

$$\|D^m(f_m^\Omega - f_m^A)\|_{L^2(\mathbf{R}^n)} \leqq \varepsilon$$

pour tout $A \subset \overline{\Omega}$ *vérifiant* $h = \sup_{t\in\overline{\Omega}}\inf_{a\in A}|t-a| \leqq h_1$.

Démonstration : Dans $D^{-m}L^2/P_{m-1}$ muni de la norme hilbertienne $u + P_{m-1} \mapsto \|D^m u\|_{L^2(\mathbf{R}^n)}$, $f_m^A + P_{m-1}$ est orthogonal à $g + P_{m-1}$ si $g = 0$ sur A. En particulier $\int_{\mathbf{R}^n} D^m f_m^A \cdot D^m(f_m^\Omega - f_m^A) = 0$. Donc

$$\|D^m(f_m^\Omega - f_m^A)\|^2_{L^2(\mathbf{R}^n)} = \int_{\mathbf{R}^n} D^m f_m^\Omega \cdot D^m(f_m^\Omega - f_m^A).$$

D'autre part, soit j l'injection $H^m(\Omega)/P_{m-1} \to L^2(\Omega)/P_{m-1}$. Sa transposée $j' : (L^2(\Omega)/P_{m-1})' \to (H^m(\Omega)/P_{m-1})'$ a une image dense. Munissons $H^m(\Omega)/P_{m-1}$ de la norme $f + P_{m-1} \mapsto \|D^m f_m^\Omega\|_{L^2(\mathbf{R}^n)}$ qui en fait un Hilbert, et soit I l'isomorphisme canonique de $(H^m(\Omega)/P_{m-1})'$

sur $H^m(\Omega)/P_{m-1}$. L'application Ij' de $(L^2(\Omega)/P_{m-1})'$ dans $H^m(\Omega)/P_{m-1}$ est encore d'image dense.

Si f appartient à cette image, c'est-à-dire $f = Ij'\ \varphi$, $\varphi \in (L^2(\Omega)/P_{m-1})'$, on a

$$\| D^m(f_m^\Omega - f_m^A)\|^2_{L^2(\mathbf{R}^n)} = \int_{\mathbf{R}^n} D^m f_m^\Omega . D^m(f_m^\Omega - f_m^A) = \langle \varphi, f - f_m^A + P_{m-1} \rangle$$

où $\langle . , . \rangle$ est la dualité entre $(L^2(\Omega)/P_{m-1})'$ et $L^2(\Omega)/P_{m-1}$. Mais,

$$\langle \varphi, f - f_m^A + P_{m-1} \rangle \leqq |\varphi|_{(L^2(\Omega)/P_{m-1})'} |f - f_m^A|_{L^2(\Omega)}.$$

D'après la proposition 3, on a

$$|f - f_m^A|_{L^2(\Omega)} \leqq C h^m \| D^m(f_m^\Omega - f_m^A)\|_{L^2(\mathbf{R}^n)}$$

dès que h est assez petit. Donc

$$\| D^m(f_m^\Omega - f_m^A)\|_{L^2(\mathbf{R}^n)} \leqq C h^m |\varphi|_{(L^2(\Omega)/P_{m-1})'}.$$

Soit maintenant $\varepsilon > 0$ et $f \in H^m(\Omega)$. Puisque $\mathcal{R}(Ij')$ est dense, il existe $\tilde{f} + P_{m-1} = Ij'\ \varphi$ tel que $\| D^m(f_m^\Omega - \tilde{f}_m^\Omega)\|_{L^2(\mathbf{R}^n)} \leqq \varepsilon/3$, donc aussi $\| D^m(f_m^A - \tilde{f}_m^A)\|_{L^2(\mathbf{R}^n)} \leqq \varepsilon/3$. $\tilde{f}$ et φ étant fixés, il existe $h_1 > 0$ tel que $C h_1^m |\varphi|_{(L^2(\Omega)/P_{m-1})'} \leqq \varepsilon/3$, et alors $\| D^m(f_m^\Omega - f_m^A)\|_{L^2(\mathbf{R}^n)} \leqq \varepsilon/3$ pour tout $A \subset \overline{\Omega}$ tel que $h \leqq h_1$. D'où finalement $\| D^m(f_m^\Omega - f_m^A)\|_{L^2(\mathbf{R}^n)} \leqq \varepsilon$.

Joignant les propositions 3 et 4, on obtient le :

THÉORÈME : *Soit Ω un ouvert borné à frontière lipschitzienne de $\mathbf{R}^n$, m entier $> n/2$, $p \in [2, \infty]$ et k entier $\leqq m - (n/2) + (n/p)$* (sauf *éventuellement $k = m - n/2$ si $p = \infty$). Quels que soient $f \in H^m(\Omega)$ et $\varepsilon > 0$, il existe h_0 tel que, pour tout $A \subset \Omega$ vérifiant :*

$$h = \sup_{t \in \Omega} \inf_{a \in A} |t - a| \leqq h_0,$$

on ait

$$\| D^k(f - f_m^A)\|_{L^p(\Omega)} \leqq \varepsilon\, h^{m-k-(n/2)+(n/p)}.$$

BIBLIOGRAPHIE

1. R. ARCANGELI, *Étude de problèmes de type elliptique ou parabolique avec conditions ponctuelles*, Thèse, Toulouse, 1974.
2. R. ARCANGELI et J. L. GOUT, *Sur l'évaluation de l'erreur d'interpolation de Lagrange dans un ouvert de* $\mathbf{R}^n$, R.A.I.R.O. Analyse Numérique, vol. 10, n° 3, 1976, p. 5-27.
3. M. ATTEIA, *Existence et détermination des fonctions « spline » à plusieurs variables*, C.R. Acad. Sci., Paris, 262, 1966, p. 575-578.
4. P. G. CIARLET et P. A. RAVIART, *General Lagrange and Hermite Interpolation in* $\mathbf{R}^n$ *with Applications to Finite Element Methods*, Arch. Rat. Mech. Anal., 46, 1972, p. 177-199.
5. J. DUCHON, *Interpolation des fonctions de deux variables suivant le principe de la flexion des plaques minces*, R.A.I.R.O. Analyse Numérique, vol. 10, n° 12, 1976, p. 5-12.
6. J. L. JOLY, *Théorèmes de convergence des fonctions « spline » générales d'interpolation et d'ajustement*, C.R. Acad. Sci., Paris, 264, 1967, p. 126-128.
7. M. H. SCHULTZ et R. S. VARGA, *L-Splines*, Nümer. Math., vol. 10, 1967, p. 345-369.