

ALAIN DIGUGLIELMO

**Méthode de décomposition pour un problème  
unilatéral de type parabole**

*RAIRO. Analyse numérique*, tome 12, n° 2 (1978), p. 121-152

[http://www.numdam.org/item?id=M2AN\\_1978\\_\\_12\\_2\\_121\\_0](http://www.numdam.org/item?id=M2AN_1978__12_2_121_0)

© AFCET, 1978, tous droits réservés.

L'accès aux archives de la revue « RAIRO. Analyse numérique » implique l'accord avec les conditions générales d'utilisation (<http://www.numdam.org/conditions>). Toute utilisation commerciale ou impression systématique est constitutive d'une infraction pénale. Toute copie ou impression de ce fichier doit contenir la présente mention de copyright.

NUMDAM

Article numérisé dans le cadre du programme  
Numérisation de documents anciens mathématiques  
<http://www.numdam.org/>

## MÉTHODE DE DÉCOMPOSITION POUR UN PROBLÈME UNILATÉRAL DE TYPE PARABOLIQUE (\*)

par Alain DIGUGLIELMO (<sup>1</sup>)

Communiqué par J. CÉA

---

*Résumé.* — On propose une méthode de décomposition pour une inéquation parabolique avec second membre, comportant des coefficients dépendant du temps. On montre que, moyennant certaines hypothèses complémentaires, la décomposition est possible et conduit à des solutions approchées convergeant faiblement vers la solution exacte de l'inéquation. On donne également un exemple, pour lequel des essais numériques ont été effectués.

On propose une méthode de décomposition pour une famille d'inéquations paraboliques avec second membre, comportant des coefficients dépendant du temps. On montre que, moyennant certaines hypothèses complémentaires, la décomposition est possible et conduit à des solutions approchées convergeant faiblement vers la solution exacte de l'inéquation; on note en particulier que, pour des schémas semi-implicites du type Crank-Nicholson ( $1/2 \leq \Theta \leq 1$ ), il n'est pas nécessaire d'imposer une condition de stabilité, contrairement au cas des problèmes d'inéquations paraboliques étudiés dans [9]. Les méthodes précédentes sont mises en œuvre sur un exemple, permettant leur comparaison à l'aide des résultats numériques obtenus (<sup>2</sup>).

### 1. PROBLÈME ÉTUDIÉ

Soient  $\Omega$  un ouvert borné de  $\mathbf{R}^m$  de frontière  $\Gamma$ ,  $T > 0$ , et  $\Sigma = \Gamma \times ]0, T[$ . Soit  $\{a(t; y, z), t \in [0, T]\}$  une famille de formes bilinéaires continues et  $V$ -elliptiques sur  $V = H^1(\Omega)$ . Soit  $j$  une fonction convexe s. c. i. sur  $\mathbf{R}$  à valeurs dans  $[0, +\infty]$  avec  $j(r) \neq +\infty$ ; on définit à partir de  $j$  la fonctionnelle  $\varphi : \varphi \rightarrow [0, +\infty]$  par

$$\varphi(u) = \int_{\Gamma} j(u|_{\Gamma}) d\sigma,$$

---

(\*) Manuscrit reçu le 25 juin 1976.

(<sup>1</sup>) Faculté des Sciences et des Techniques de Besançon.

(<sup>2</sup>) Un résumé de ce travail a été publié dans [5].

si cette intégrale existe,  $\varphi(u) = +\infty$  sinon. On définit également

$$\Phi : L^2(0, T; V) \rightarrow [0, +\infty]$$

par

$$\Phi(u) = \int_0^T \varphi(u) dt,$$

si cette intégrale existe,  $\Phi(u) = +\infty$  sinon. On note  $D(\Phi) = \{u \in V, \Phi(u) \neq +\infty\}$ . On donne enfin  $y_0 \in L^2(\Omega) = H$  et  $g \in L^2(\Sigma)$ . On considère l'inéquation variationnelle

$$(P) \quad \left\{ \begin{array}{l} \int_0^T \left[ \left( \frac{dz}{dt}, z-y \right) + a(t; y, z-y) \right] dt + \Phi(z) - \Phi(y) \\ \geq \int_0^T (g, z-y)_{L^2(\Gamma)} dt - \frac{1}{2} \|z(0) - y_0\|_{L^2(\Omega)}^2, \\ \forall z \in D(\Phi) \cap W(0, T). \end{array} \right.$$

D'après [2] (chap. II, cor. II-1), il existe une solution unique à ce problème  $y \in D(\Phi) \cap \mathcal{C}([0, T], L^2(\Omega))$ .

Ce problème variationnel est une formulation faible d'un problème différentiel du type suivant :

$$\left\{ \begin{array}{l} y(0) = y_0, \\ \frac{dy}{dt} + A(t)y(t) = 0, \quad \text{p. p. pour } t \in ]0, T[, \text{ dans } \mathcal{D}'(\Omega), \\ - \frac{\partial y}{\partial \nu_A} + g(t) \in \partial \varphi(y(t)) \quad \text{p. p. pour } t \in ]0, T[. \end{array} \right.$$

## 2. DÉCOMPOSITION DE CE PROBLÈME (SEMI-DISCRÉTISATION)

Outre les hypothèses déjà indiquées pour poser le problème (P) nous supposons que

$$(H_1) \quad \left\{ \begin{array}{l} \text{L'ouvert } \Omega \text{ est tel que, pour tout } \psi \in V_i = H^1(D_i, \Omega), \text{ il existe une} \\ \text{trace } \gamma_i \psi \text{ vérifiant les propriétés suivantes :} \\ - \text{ si } \psi \in V = H^1(\Omega) \text{ alors } \gamma_i \psi = \gamma \psi \cos^2(\nu, x_i), \text{ où } \gamma \psi \text{ désigne la} \\ \text{trace de } \psi \text{ sur } \Gamma, \text{ et } \nu \text{ la normale extérieure à } \Gamma; \\ - \|\gamma_i \psi\|_{L^2(\Gamma)} \leq \mu_i \|\psi\|_{V_i}, \text{ où } \mu_i \text{ ne dépend que de } \Omega. \end{array} \right.$$

(cf. [1] pour l'existence d'ouverts de ce type).

- (H<sub>2</sub>)  $\left\{ \begin{array}{l} \text{La fonction } \varphi \text{ est telle que } \overline{D(\varphi)}^{L^2(\Omega)} = L^2(\Omega) \text{ et } 0 \in D(\varphi); \text{ par} \\ \text{ailleurs, il existe } \varphi_i, i = 1, 2, \dots, m, \text{ vérifiant : } \varphi_i \text{ convexes s. c. i.} \\ \text{sur } V_i, \overline{D(\varphi_i)}^{L^2(\Omega)} = L^2(\Omega), \sum_{i=1}^m \varphi_i(u) = \varphi(u), \forall u \in V. \end{array} \right.$
- (H<sub>3</sub>)  $\left\{ \begin{array}{l} \text{La forme } a(t; u, v) \text{ est symétrique; ses coefficients sont continus} \\ \text{par morceaux de } [0, T] \text{ dans } L^\infty(\Omega). \text{ Par ailleurs, il existe des formes} \\ a_i(t; u, v) \text{ bilinéaires continues sur } V_i, V_i\text{-elliptiques, et} \\ \sum_{i=1}^m a_i(t; u, v) = a(t; u, v), \forall u, v \in V. \end{array} \right.$

Divisons l'intervalle  $[0, T]$  en  $N$  morceaux de longueur  $k = T/N$  et posons

$$\mathcal{V}_{i,r} = L^2(rk, (r+1)k; V_i); \quad \mathcal{W}_{i,r} = \left\{ z \in \mathcal{V}_{i,r}, \frac{dz}{dt} \in \mathcal{V}'_{i,r} \right\};$$

$$\Phi_{i,r}(z) = \int_{rk}^{(r+1)k} \varphi_i(z) dt; \quad g_i = g \cos(v, x_i).$$

Le problème décomposé sera défini par

$$P_k \left\{ \begin{array}{l} \int_{rk}^{(r+1)k} \left[ \left( \frac{dz}{dt}, z - y_k^i \right) + a_i(t; y_k^i, z - y_k^i) \right] dt + \Phi_{i,r}(z) - \Phi_{i,r}(y_k^i) \\ \cong \int_{rk}^{(r+1)k} (g_{i,r} \gamma_i z - \gamma_i y_k^i)_{L^2(\Gamma)} - \frac{1}{2} |z(rk) - y_{i,r}|_{L^2(\Omega)}^2 \\ \forall z \in D(\Phi_{i,r}) \cap \mathcal{W}_{i,r} \\ \text{avec} \\ y_{1,0} = y_0; \quad y_{1,r} = y_k^m(rk-0), \quad r = 1, 2, \dots, N-1; \\ y_{i,r} = y_k^{i-1}((r+1)k-0), \quad r = 1, 2, \dots, N-1; \quad i = 2, 3, \dots, m. \end{array} \right.$$

Par hypothèse, on a :  $y_{1,0} = y_0 \in L^2(\Omega)$ , de sorte que, compte tenu de (H<sub>2</sub>), on a d'après [2] (cor. II-1) :  $y_0^1 \in D(\Phi_{1,0}) \cap \mathcal{G}([0, k], L^2(\Omega))$ .

D'où en particulier  $y_k^1(k-0) \in L^2(\Omega)$ , ce qui permet de poursuivre l'algorithme.

Afin d'obtenir des estimations *a priori* pour les solutions approchées et d'établir la convergence de ces solutions approchées, nous montrerons tout d'abord le lemme 1.

LEMME 1 : Si  $a(t; y, z)$  vérifie l'hypothèse  $(H_3)$ , alors pour tout  $t_1, t_2 \in [0, T]$ , et pour tout  $z \in D(\Phi)$  tel que  $dz/dt \in L^2(0, T; V')$ , on a

$$\begin{aligned} & -\frac{1}{2} |y(t_2) - y(t_1)|^2 + \int_{t_1}^{t_2} \left[ \left( \frac{dz}{dt}, z - y \right) + a(t; y, z - y) \right] dt + \int_{t_1}^{t_2} (\varphi(z) - \varphi(y)) dt \\ & \cong \int_{t_1}^{t_2} (g, \gamma z - \gamma y) dt - \frac{1}{2} |y(t_1) - z(t_1)|^2. \end{aligned}$$

De façon analogue, la solution de chaque inéquation élémentaire du problème décomposé vérifie une relation similaire pour tout  $t_1$  et  $t_2$  dans l'intervalle  $[rk, (r+1)k]$ .

Démonstration : D'après [2] (th. II-3), nous savons que le lemme 1 est vrai lorsque la forme bilinéaire symétrique  $a(t; y, z)$  ne dépend pas de  $t$ .

Sous l'hypothèse  $(H_3)$ ,  $a(t; y, z)$  définit un opérateur linéaire  $A(t) \in \mathcal{L}(V, V')$  tel que l'application  $t \rightarrow A(t)$  soit continue par morceaux de  $[0, T]$  dans  $\mathcal{L}(V, V')$ .

Considérons une suite d'applications  $t \rightarrow A_n(t)$  constantes par morceaux, convergeant uniformément vers  $t \rightarrow A(t)$ . Soient  $y_n$  les solutions des inéquations correspondantes. On peut alors montrer par des méthodes analogues à celles de [2] (chap. II) que :

- $(y_n)_n$  converge faiblement vers  $y$  dans  $L^2(0, T; V)$  et dans  $\mathcal{C}([0, T], L^2(\Omega))$ ;
- l'inégalité du lemme 1, qui est vraie pour  $y_n$ , reste vraie pour  $y$ . D'où le résultat annoncé.

D'après le lemme 1, on peut rajouter au premier membre de l'inéquation définissant  $(P_k)$  le terme

$$-\frac{1}{2} |z((r+1)k) - y_k^i((r+1)k-0)|^2$$

sans modifier le problème.

Nous allons maintenant obtenir successivement des estimations *a priori* pour chaque terme de l'inéquation définissant  $(P_k)$ , avant de pouvoir donner une estimation globale. Ces estimations sont indiquées dans les lemmes 2 et 3.

LEMME 2 : Pour tout  $j \in \{1, 2, \dots, m\}$ ,  $s \in \{1, 2, \dots, N\}$  :

$$|y_k^i(sk)|_H \leq C_1,$$

où  $C_1$  ne dépend que des données du problème exact.

*Démonstration* : Désignons par  $\alpha_i$  les constantes de  $V_i$ -ellipticité des formes  $a_i(t; u, v)$  et par  $c_i$  leurs constantes de continuité. Posons alors :

$$\alpha = \min_i \alpha_i, \quad c = \max_i c_i, \quad \mu = \max_i \mu_i.$$

Prenons dans l'inéquation définissant  $(P_k)$ ,  $z(t) = z_0$  pour tout  $t \in [0, T]$ , où  $z_0 \in D(\varphi)$ . D'après  $(H_3)$  et avec l'inégalité de Schwarz, on obtient :

$$\begin{aligned} & \alpha \int_{rk}^{(r+1)k} \|y_k^i\|_i^2 dt - \left[ c_i k^{1/2} \|z\|_i + \mu_i \left( \int_{rk}^{(r+1)k} |g_i|^2 dt \right)^{1/2} \right] \\ & \times \left( \int_{rk}^{(r+1)k} \|y_k^i\|_i^2 dt \right)^{1/2} + \Phi_{i,r}(y_k^i) + \frac{1}{2} |z - y_k^i((r+1)k)|^2 \\ & \leq \frac{1}{2} |z - y_{i,r}|^2 + \int_{rk}^{(r+1)k} (g_i, \gamma_i z) dt + k \varphi(z). \end{aligned} \tag{1}$$

Posons

$$\left. \begin{aligned} Y_r^i &= \left( \int_{rk}^{(r+1)k} \|y_k^i\|_i^2 dt \right)^{1/2}; \\ M_r^i &= c_i k^{1/2} \|z\|_i + \mu_i \left( \int_{rk}^{(r+1)k} |g_i|^2 dt \right)^{1/2}; \\ Z_r^i &= \frac{1}{2} |z - y_k^i((r+1)k)|^2; \\ \Psi_r^i &= \Phi_{i,r}(y_r^i); \quad Z_r^i = \frac{1}{2} |z - y_{i,r}|^2; \\ M_r^i &= \int_{rk}^{(r+1)k} (g_i, \gamma_i z) dt + k \varphi(z). \end{aligned} \right\} \tag{2}$$

Alors (1) devient :

$$\alpha_i (Y_r^i)^2 - M_r^i Y_r^i + \Psi_r^i + Z_r^i \leq Z_r^i + M_r^i. \tag{3}$$

On déduit de (3) :

$$Z_r^i + \Psi_r^i \leq Z_r^i + M_r^i + \frac{1}{\alpha_i} (M_r^i)^2. \tag{4}$$

Compte tenu de la définition de  $Z_r^i$  et  $Z_r^i$ , et puisque  $\Psi_p^i \geq 0$ , on en déduit

$$Z_r^i \leq Z_r^{i-1} + M_r^{i-1} + \frac{1}{\alpha_i} (M_r^i)^2, \quad i = 2, 3, \dots, m; \quad Z_r^1 \leq Z_{r-1}^m + M_r^1 + \frac{1}{\alpha_i} (M_r^1)^2.$$

En utilisant récursivement cette relation,

$$Z_s^j \leq Z_0^1 + \sum_{r=0}^{s-1} \sum_{i=1}^m \left| M_r^i + \frac{1}{\alpha_i} (M_r^i)^2 \right| + \sum_{i=1}^j \left| M_s^i + \frac{1}{\alpha_i} (M_s^i)^2 \right|.$$

Compte tenu des définitions (2) on a donc

$$\begin{aligned} & \frac{1}{2} |z - y_k^i(sk)|^2 \\ & \leq \frac{1}{2} |z - y_0|^2 + \int_0^T (g, z) dt + T\varphi(z) + 2c^2 T \|z\|^2 + 2\mu \int_0^T |g|^2 dt. \end{aligned}$$

Donc  $|y_k^i(sk)|^2$  est borné pour tout  $k, j$ , et  $s$ .

LEMME 3 : Les quantités  $Y_r^i$  et  $\Psi_r^i$  définies en (2) vérifient :

$$\lim_{k \rightarrow 0} Y_r^i = 0; \quad \lim_{k \rightarrow 0} \Psi_r^i = 0.$$

Démonstration : Considérons un  $y_{i,r}^\varepsilon$ , tel que

$$y_{i,r}^\varepsilon|_{\Gamma} = 0; \quad |y_{i,r}^\varepsilon - y_{i,r}|^2 \leq \varepsilon, \quad \|y_{i,r}^\varepsilon\|_i \leq \frac{\lambda}{\varepsilon} |y_{i,r}|,$$

où  $\lambda$  est une constante positive, ne dépendant que de  $\Omega$ . Une telle fonction  $y_{i,r}^\varepsilon$  peut être obtenue par troncature et régularisation de  $y_{i,r}$ .

Prenons dans (4)  $z = y_{i,r}^\varepsilon$ ; on obtient alors pour  $k \rightarrow 0$  :

$$\lim_{k \rightarrow 0} |y_{i,r} - y_k^i((r+1)k)|^2 \leq 4\varepsilon,$$

ce qui montre que la limite est nécessairement zéro.

Par suite de la limite de  $Z_r^i - Z_r^i$  est également zéro. D'autre part on a grâce à la relation (3) :

$$\alpha_i (Y_r^i)^2 - M_r^i Y_r^i + \Psi_r^i \leq M_r^i + Z_r^i - Z_r^i,$$

et le second membre de cette relation tend vers zéro avec  $k$ . Par suite  $Y_r^i$  et  $\Psi_r^i$  tendent vers zéro avec  $k$ .

PROPOSITION 1 : Les solutions approchées sont bornées dans  $L^\infty(0, T; L^2(\Omega))$  :

$$|y_k^i(t)|_{L^2(\Omega)}^2 \leq C_2, \quad i = 1, 2, \dots, m, \quad \forall t \in [0, T],$$

où la constante  $C_2$  ne dépend que des données du problème exact.

*Démonstration* : Soit  $t \in [rk, (r+1)k]$ , et  $z \in D(\varphi)$ . D'après le lemme 1 :

$$\begin{aligned} & \frac{1}{2} |z - y_{i,r}|^2 + \int_{rk}^t a_i(t; y_k^i, z - y_k^i) dt + \int_{rk}^t (\varphi_i(z) - \varphi_i(y_k^i)) dt \\ & \geq \frac{1}{2} |z - y_k^i(t)|^2 + \int_{rk}^t (g_i, \gamma_i z - \gamma_i y_k^i) dt. \end{aligned}$$

grâce aux lemmes 2 et 3, on en déduit que :  $|z - y_k^i(t)|^2 \leq Cte$ ; d'où le résultat annoncé.

**PROPOSITION 2** : *Il existe une constante  $C_3$ , ne dépendant que des données du problème exact, telle que*

$$\int_0^T \sum_{i=1}^m \|y_k^i\|^2 dt \leq C_3, \quad \int_0^T \sum_{i=1}^m \varphi_i(y_k^i) dt \leq C_3.$$

*Démonstration* : En ajoutant membre à membre les relations (1) pour  $r = 0, 1, \dots, N-1$ ;  $i = 1, 2, \dots, m$ ; et en appliquant l'inégalité de Schwartz pour les sommes finies, il vient

$$\begin{aligned} & \alpha \int_0^T \sum_{i=1}^m \|y_k^i\|^2 dt - \left[ 2c^2 T \|z\|^2 - 2\mu \int_0^T |g|^2 dt \right]^{1/2} \left( \int_0^T \sum_{i=1}^m \|y_k^i\|^2 dt \right)^{1/2} \\ & + \int_0^T \sum_{i=1}^m \varphi_i(y_k^i) dt \leq \frac{1}{2} (|z - y_0|^2 - |z - y_k^m(T)|^2 - \int_0^T (g, z) dt + T\varphi(z)). \end{aligned}$$

D'après le lemme 2, cette relation peut être écrite aussi :

$$\begin{aligned} & \alpha \int_0^T \sum_{i=1}^m \|y_k^i\|^2 dt - C_1(z, g) \left( \int_0^T \sum_{i=1}^m \|y_k^i\|^2 dt \right)^{1/2} \\ & + \int_0^T \sum_{i=1}^m \varphi_i(y_k^i) dt \leq C_2(y_0, z, g), \end{aligned}$$

où les quantités  $C_1(z, g)$  et  $C_2(y_0, z, g)$  ne dépendent pas de  $k$ .

D'où le résultat annoncé.

**THÉORÈME 1** : *Sous les hypothèses  $(H_1)$ ,  $(H_2)$ ,  $(H_3)$ , les solutions approchées  $(y_k^i)_k$  des problèmes décomposés  $(P_k)$  convergent faiblement dans  $L^2(0, T; V_i)$  et dans  $L^\infty(0, T; L^2(\Omega))$  vers la solution  $y$  du problème initial pour  $k \rightarrow 0$ .*

En vue de démontrer ce théorème, nous donnerons tout d'abord le lemme suivant :

**LEMME 4** : *Si  $(y_k)_k$  converge faiblement vers  $y$  dans  $L^\infty(0, T; L^2(\Omega))$  et si  $z \in W(0, T)$  alors :*

$$\lim_{k \rightarrow 0} \sum_{r=0}^{N-1} (z((r+1)k) - z(rk), y_k((r+1)k)) = \int_0^T \left( \frac{dz}{dt}, y \right) dt.$$



*Démonstration* : Soit  $z \in \mathcal{D}(\overline{\Omega \times ]0, T[})$ . D'après le développement de Taylor :

$$\frac{1}{k}(z((r+1)k) - z(rk)) - \frac{dz}{dt}((r+1)k) = -\frac{k}{2} \frac{d^2z}{dt^2}((r+\Theta_r)k), \quad 0 < \Theta_r < 1.$$

Donc

$$\begin{aligned} & \left| \sum_{r=0}^{N-1} \left( z((r+1)k) - z(rk) - \frac{dz}{dt}((r+1)k), y_k((r+1)k) \right) \right| \\ &= \frac{k^2}{2} \left| \sum_{r=0}^{N-1} \left( \frac{d^2z}{dt^2}((r+\Theta_r)k), y_k((r+1)k) \right) \right| \\ &\leq \frac{k^2 N}{2} \sup_t \left| \frac{d^2z}{dt^2} \right| \max_r |y_k(rk)| \leq \text{Cte} \times \frac{k T}{2} \sup_t \left| \frac{d^2z}{dt^2} \right|. \end{aligned}$$

Cette quantité converge donc vers zéro pour  $k \rightarrow 0$ , et il suffit de montrer que

$$\lim_{k \rightarrow 0} \sum_{r=0}^{N-1} \left( \frac{dz}{dt}((r+1)k), y_k((r+1)k) \right) = \int_0^T \left( \frac{dz}{dt}, y \right) dt.$$

Définissons

$$\begin{aligned} \tilde{y}_k(t) &= y_k((r+1)k) \quad \text{pour tout } t \in ]rk, (r+1)k], \\ \tilde{u}_k(t) &= \frac{dz}{dt}((r+1)k) \quad \text{pour tout } t \in ]rk, (r+1)k]. \end{aligned}$$

Alors  $\tilde{y}_k$  converge faiblement vers  $y$  dans  $L^\infty(0, T; L^2(\Omega))$  et  $\tilde{u}_k$  converge fortement vers  $dz/dt$  dans  $L^1(0, T; L^2(\Omega))$ . Donc

$$\lim_{k \rightarrow 0} \sum_{r=0}^{N-1} \left( \frac{dz}{dt}((r+1)k), y_k((r+1)k) \right) = \lim_{k \rightarrow 0} \int_0^T (\tilde{u}_k, \tilde{y}_k) dt = \int_0^T \left( \frac{dz}{dt}, y \right) dt.$$

Puisque  $\mathcal{D}(\overline{\Omega \times ]0, T[})$  est dense dans  $W(0, T)$  la relation précédente reste vraie pour  $z \in W(0, T)$ , ce qui démontre le lemme 4.

*Démonstration du théorème 1* : D'après les propositions 1 et 2, il existe pour chaque  $i \in \{1, 2, \dots, m\}$  une sous-suite  $(y_k^i)_k$  et un élément  $w^i$  tel que  $(y_k^i)_k$  converge faiblement vers  $w^i$  dans  $L^2(0, T; V_i)$  et dans  $L^\infty(0, T; L^2(\Omega))$ .

D'après la continuité faible de l'application trace  $\gamma_i$ , la suite  $(\gamma_i y_k^i)_k$  converge aussi faiblement vers  $\gamma_i w^i$  dans  $L^2(\Sigma)$ .

Montrons tout d'abord que  $w^i = w^j = w \in L^2(0, T; V)$ ,  $i \neq j$ ,  $i, j \in \{1, 2, \dots, m\}$ .

D'après le lemme 1, nous pouvons récrire la première inéquation du problème ( $i = 1$ ) avec des intégrales entre  $t$  et  $(r+1)k$ , et la seconde inéquation

( $i = 2$ ) avec des intégrales entre  $rk$  et  $t$ . En ajoutant membre à membre les deux relations obtenues, on obtient :

$$\begin{aligned} & \frac{1}{2} (|z - y_k^2(t)|^2 - |z - y_k^1(t)|^2) \\ & \leq \int_{rk}^t a_2(s; y_k^2, z - y_k^2) ds + \int_t^{(r+1)k} a_1(s; y_k^1, z - y_k^1) ds \\ & \quad + \int_{rk}^t (\varphi_2(z) - \varphi_2(y_k^2)) ds + \int_t^{(r+1)k} (\varphi_1(z) - \varphi_1(y_k^1)) ds \\ & \quad + \int_{rk}^t (g_2, \gamma_2 z - \gamma_2 y_k^2) ds + \int_t^{(r+1)k} (g_1, \gamma_1 z - \gamma_1 y_k^1) ds. \end{aligned}$$

Soit  $y_{k,\varepsilon}^1 \in V$  tel que

$$|y_{k,\varepsilon}^1 - y_k^1(t)|^2 < \varepsilon; \quad y_{k,\varepsilon}^1|_\Gamma = 0; \quad \|y_{k,\varepsilon}^1\|_i < \frac{\lambda}{\varepsilon} |y_k^1(t)|.$$

Puisque cette fonction appartient à  $D(\varphi)$ , nous pouvons remplacer  $z$  par celle-ci dans l'inéquation précédente. Compte tenu du lemme 3 cette relation donne alors :

$$\frac{1}{2} (|y_{k,\varepsilon}^1 - y_k^2(t)|^2 - |y_{k,\varepsilon}^1 - y_k^1(t)|^2) \leq M_1(k) + M_2(k) \|y_{k,\varepsilon}^1\|_i,$$

où  $M_1(k)$  et  $M_2(k)$  tendent vers zéro avec  $k$ . Par suite

$$\frac{1}{2} |y_k^1(t) - y_k^2(t)|^2 \leq 2 \left[ \varepsilon + M_1(k) + \frac{\lambda}{\varepsilon} M_2(k) \right].$$

En prenant la limite pour  $k \rightarrow 0$ , on en déduit

$$\lim_{k \rightarrow 0} |y_k^1(t) - y_k^2(t)| < 4\varepsilon,$$

ce qui montre que la limite est nécessairement nulle. Par conséquent  $w^1(t) = w^2(t)$  pour tout  $t \in [0, T]$ .

On peut montrer de façon analogue que

$$w^i(t) = w^j(t) = w(t), \quad \forall i, j \in \{1, 2, \dots, m\}, \quad \forall t \in [0, T].$$

La limite commune  $w(t)$  appartient à  $L^2(0, T; V_i)$  pour tout  $i \in \{1, 2, \dots, m\}$  i. e.  $w \in L^2(0, T; V)$ .

Montrons maintenant que  $w$  est la solution du problème exact. Prenons  $z \in D(\Phi) \cap W(0, T)$  dans les inéquations définissant  $(P_k)$  : en ajoutant ces

inéquations membre à membre pour  $i = 1, 2, \dots, m$ , et  $r = 0, 1, \dots, N-1$ , on obtient :

$$\begin{aligned} & \sum_{i=1}^m \int_0^T \left( \frac{dz}{dt}, z - y_k^i \right) + a_i(t; y_k^i, z - y_k^i) dt + \sum_{i=1}^m \int_0^T (\varphi_i(z) - \varphi_i(y_k^i)) dt \\ & - \frac{1}{2} \sum_{r=0}^{N-1} \sum_{i=1}^{m-1} [ |z((r+1)k) - y_k^i((r+1)k)|^2 - |z(rk) - y_k^i((r+1)k)|^2 ] \\ & - \frac{1}{2} |z(T) - y_k^m(T)|^2 \geq \sum_{i=1}^m \int_0^T (g_i, \gamma_i z - \gamma_i y_k^i) dt - \frac{1}{2} |z(0) - y_0|^2. \end{aligned} \quad (6)$$

Posons

$$E_r^i = |z((r+1)k) - y_k^i((r+1)k)|^2 - |z(rk) - y_k^i((r+1)k)|^2.$$

Alors :

$$\begin{aligned} E_r^i &= |z((r+1)k)|^2 - |z(rk)|^2 - 2(y_k^i((r+1)k), z((r+1)k) - z(rk)), \\ \sum_{r=0}^{N-1} E_r^i &= |z(T)|^2 - |z(0)|^2 - 2 \sum_{r=0}^{N-1} y_k^i((r+1)k), z((r+1)k) - z(rk)). \end{aligned}$$

Donc la relation (6) devient

$$\begin{aligned} & \sum_{i=1}^m \int_0^T \left( \frac{dz}{dt}, z - y_k^i \right) dt + \sum_{i=1}^m \int_0^T a_i(t; y_k^i, z - y_k^i) dt + \sum_{i=1}^m \int_0^T (\varphi_i(z) - \varphi_i(y_k^i)) dt \\ & - (m-1) \int_0^T \left( \frac{dz}{dt}, z \right) dt + \sum_{r=0}^{N-1} ((z((r+1)k) - z(rk)), \sum_{i=1}^{m-1} y_k^i((r+1)k)) \\ & - \frac{1}{2} |z(T) - y_k^m(T)|^2 \geq \sum_{i=1}^m \int_0^T (g_i, \gamma_i z - \gamma_i y_k^i) dt - \frac{1}{2} |z(0) - y_0|^2. \end{aligned} \quad (7)$$

Prenons la limite supérieure des deux membres de cette relation : comme  $(y_k^i)_k$  converge faiblement vers  $w$ , et grâce au lemme 4, on en déduit

$$\begin{aligned} & \int_0^T \left( \frac{dz}{dt}, z - w \right) dt \\ & + \int_0^T a(t; w, z - w) dt + \int_0^T (\varphi(z) - \varphi(w)) dt - \frac{1}{2} |z(T) - w(T)|^2 \\ & \geq \int_0^T (g, \gamma z - \gamma w) dt - \frac{1}{2} |z(0) - y_0|^2. \end{aligned}$$

On retrouve donc l'inégalité variationnelle définissant le problème P, et  $w$  est bien la solution de P. Comme cette solution est unique la totalité de la suite  $(y_k^i)_k$  converge faiblement vers  $y$  dans  $L^\infty(0, T; L^2(\Omega))$  et dans  $L^2(0, T; V_i)$ .

*Remarques* : Il ne semble pas que la convergence forte puisse être obtenue sans hypothèses supplémentaires par les méthodes utilisées, contrairement au cas des équations (cf. [8]).

Le cas où le second membre  $g$  et où l'opérateur  $A$  ne dépendent pas du temps peut être traité à l'aide de la théorie des semi-groupes (cf. [3], chap. IV).

Outre la fonction  $g$  définie sur  $\Sigma$ , nous pouvons ajouter un second membre  $f(x, t)$  défini dans  $\Omega \times ]0, T[$ , sans avoir à modifier les démonstrations précédentes.

**3. DÉCOMPOSITION AVEC DISCRÉTISATION COMPLETE UTILISANT UN SCHEMA DE TYPE IMPLICITE**

Les hypothèses  $(H_1)$  et  $(H_2)$  restent valables dans ce paragraphe; l'hypothèse  $(H_3)$  est remplacée par

$$(H'_3) \quad \left\{ \begin{array}{l} \text{Il existe des formes } a_i(t; u, v) \text{ bilinéaires continues sur } V_i, \\ V_i \text{ elliptiques, et } \sum_{i=1}^m a_i(t; u, v) = a(t; u, v), \forall u, v \in V. \end{array} \right.$$

Utilisant les hypothèses et notations classiques des discrétisations par différences finies (cf. [8, 9]), on pose

$$a_{i,h}^r(u_h, v_h) = \frac{1}{k} \int_{rk}^{(r+1)k} a_i(t; p_{i,h} u_h, p_{i,h} v_h) dt,$$

$$L_{i,h}^r(v_h) = (g_i^r, \gamma_i v_h)_{L^2(\Gamma)} \quad \text{avec} \quad g_i^r = \frac{1}{k} \int_{rk}^{(r+1)k} g_i(t) dt.$$

On désigne par  $\sigma_i$  l'opérateur de projection de l'espace  $H^1(D_i, \Omega)$  dans  $F_i = L^2(\mathbf{R}^m) \times L^2(\Omega)$ , défini par :  $\sigma_i u = \{u, D_i u\}$ ,  $\forall u \in H^1(D_i, \Omega)$ .

On suppose alors qu'il existe des fonctions  $\varphi_{i,h}$  telles que

$$(H_4) \quad \left\{ \begin{array}{l} v_h \rightarrow \sigma_i v \text{ dans } F_i \text{ faible, } \quad v_h \in D(\varphi_{i,h}), \\ v \in D(\varphi) \Rightarrow \liminf \varphi_{i,h}(v_h) \geq \varphi_i(v); \\ v_h \rightarrow \sigma_i v \text{ dans } F \text{ fort, } \quad v_h \in D(\varphi_{i,h}), \\ v \in D(\varphi) \Rightarrow \lim \varphi_{i,h}(v) = \varphi_i(v), \end{array} \right.$$

$\Theta$  étant un paramètre réel, on suppose également que

$$(H_5) \quad \frac{1}{2} \leq \Theta \leq 1.$$

Le problème approché consiste à définir  $m$  fonctions discrètes  $y_{i,h}$ ,  $i = 1, 2, \dots, m$ , à l'aide de la suite d'inéquations ci-après. Dans ces relations  $y_{i,h}^r$  désigne l'ensemble des valeurs  $y_{i,h}(x, t)$  pour  $x \in \Omega_h$  et  $t = rk$ . De plus, il est nécessaire de considérer deux valeurs distinctes pour  $y_{i,h}$  au point  $t = rk$  : celle obtenue comme résultat du sous-problème relatif à l'intervalle  $[(r-1)k, rk]$ , qui sera notée  $y_{i,h-}^r$ , et celle prise comme valeur de départ pour le sous problème relatif à l'intervalle  $[rk, (r+1)k]$ , notée  $y_{i,h+}^r$ . Avec ces notations le problème approché est défini par

$$\begin{aligned}
 & \left. \begin{aligned}
 & (y_{i,h-}^{r+1} - y_{i,h+}^r, s_{i,h} - w_{i,h}^r)_h + k a_{i,h}^r(w_{i,h}^r, s_{i,h} - w_{i,h}^r) \\
 & + k [\varphi_{i,h}(s_{i,h}) - \varphi_{i,h}(w_{i,h}^r)] \geq k L_{i,h}^r(s_{i,h} - w_{i,h}^r), \\
 & \forall s_{i,h} \in D(\varphi_{i,h}), \\
 & \text{où} \\
 & w_{i,h}^r = \Theta y_{i,h-}^{r+1} + (1 - \Theta) y_{i,h+}^r, \\
 & \text{avec} \\
 & y_{1,h+}^0 = r_h y_0; \quad y_{1,h+}^r = y_{m,h-}^r, \quad r = 1, 2, \dots, N-1; \\
 & y_{i,h+}^r = y_{i-1,h-}^{r+1}, \quad r = 1, 2, \dots, N-1 \quad \text{et} \quad i = 1, 2, \dots, m.
 \end{aligned} \right\} (P_{h,k})
 \end{aligned}$$

On obtient ainsi un schéma implicite lorsque  $\Theta = 1$  et un schéma de Crank-Nicholson lorsque  $\Theta = 1/2$ .

Comme précédemment, on peut obtenir des estimations *a priori* pour les solutions approchées  $(p_{i,h} y_{i,h})$  dans  $L^2(0, T; F_i)$  et  $L^\infty(0, T; \tilde{H})$ , où  $\tilde{H} = L^2(\mathbf{R}^m)$  :

PROPOSITION 3 : Les solutions approchées des problèmes  $P_{h,k}$  vérifient :

$$\begin{aligned}
 & |y_{i,h}^r|_{\tilde{H}} < \text{Cte} \quad \text{pour} \quad r = 0, 1, \dots, N \quad \text{et} \quad i = 1, 2, \dots, m, \\
 & \int_0^T \|p_{i,h} w_{i,h}(t)\|_{F_i}^2 dt < \text{Cte} \quad \text{pour} \quad i = 1, 2, \dots, m.
 \end{aligned}$$

Démonstration : Prenons  $s_{i,h} = 0$  dans l'inéquation définissant  $(P_{h,k})$  :

$$\begin{aligned}
 & (y_{i,h-}^{r+1} - y_{i,h+}^r, w_{i,h}^r)_h + k a_{i,h}^r(w_{i,h}^r, w_{i,h}^r) \\
 & - k [\varphi_{i,h}(0) - \varphi_{i,h}(w_{i,h}^r)] \leq k L_{i,h}^r(w_{i,h}^r).
 \end{aligned}$$

Compte tenu de l'identité

$$\begin{aligned}
 & (y_{i,h-}^{r+1} - y_{i,h+}^r, w_{i,h}^r)_h \\
 & = \frac{1}{2} (|y_{i,h-}^{r+1}|_h^2 - |y_{i,h+}^r|_h^2) + \left(\Theta - \frac{1}{2}\right) |y_{i,h-}^{r+1} - y_{i,h+}^r|_h^2,
 \end{aligned}$$

la relation précédente peut être écrite :

$$\frac{1}{2} (|y_{i,h-}^{r+1}|_h^2 - |y_{i,h+}^r|_h^2) + \left(\Theta - \frac{1}{2}\right) |y_{i,h-}^{r+1} - y_{i,h+}^r|_h^2 + k a_{i,h}^r (w_{i,h}^r, w_{i,h}^r) + k \varphi_{i,h}(w_{i,h}^r) \leq k \varphi_{i,h}(0) + k L_{i,h}^r (w_{i,h}^r).$$

D'où

$$\frac{1}{2} (|y_{i,h-}^{r+1}|_h^2 - |y_{i,h+}^r|_h^2) + \left(\Theta - \frac{1}{2}\right) |y_{i,h-}^{r+1} - y_{i,h+}^r|_h^2 + k \alpha_i \|w_{i,h}^r\|_{F_i}^2 + k \varphi_{i,h}(w_{i,h}^r) \leq k \varphi_{i,h}(0) + \frac{k \mu_i^2}{2 \alpha_i} \|g_i^r\|_{L^2(\Gamma)}^2 + \frac{k \alpha_i}{2} \|w_{i,h}^r\|_{F_i}^2.$$

ou encore

$$\frac{1}{2} (|y_{i,h-}^{r+1}|_h^2 - |y_{i,h+}^r|_h^2) + \left(\Theta - \frac{1}{2}\right) |y_{i,h-}^{r+1} - y_{i,h+}^r|_h^2 + \frac{k \alpha_i}{2} \|w_{i,h}^r\|^2 + k \varphi_{i,h}(w_{i,h}^r) \leq k \varphi_{i,h}(0) + \frac{k \mu_i^2}{2 \alpha_i} \|g_i^r\|_{L^2(\Gamma)}^2.$$

En ajoutant membre à membre toutes ces relations pour  $i = 0, 1, \dots, s-1$ , et  $i = 1, 2, \dots, m$ , puis pour  $r = s$  et  $i = 1, 2, \dots, j$ , on obtient en tenant compte des conditions initiales successives pour chaque intervalle  $(rk, (r+1)k)$  :

$$\frac{1}{2} (|y_j^s|_h^2 - |y_0|_h^2) + \left(\Theta - \frac{1}{2}\right) \sum_{r,i} |y_{i,h-}^{r+1} - y_{i,h+}^r|_h^2 + \frac{k \alpha}{2} \sum_{r,i} \|w_{i,h}^r\|_i^2 + k \sum_{r,i} \varphi_{i,h}(w_{i,h}^r) \leq k \sum_{r,i} \varphi_{i,h}(0) + \frac{k \mu^2}{2 \alpha} \sum_{r,i} \|g_i^r\|_{L^2(\Gamma)}^2.$$

D'après les définitions des  $\varphi_{i,h}$  et  $g_i^r$ , le second membre peut être majoré par

$$T\varphi(0) + \frac{\mu^2}{2\alpha} \int_0^T \|g(t)\|_{L^2(\Gamma)}^2 dt.$$

D'où

$$\frac{1}{2} |y_j^s|_h^2 + \left(\Theta - \frac{1}{2}\right) \sum_{r,i} |y_{i,h-}^{r+1} - y_{i,h+}^r|_h^2 + \frac{k \alpha}{2} \sum_{r,i} \|w_{i,h}^r\|_i^2 + k \sum_{r,i} \varphi_{i,h}(w_{i,h}^r) \leq T\varphi(0) + \frac{\mu^2}{2\alpha} \|g\|_{L^2(\Sigma)}^2 + c' |y_0|_h^2.$$

Tous les termes du premier membre étant positifs ou nuls, on en déduit

$$\left. \begin{aligned} |y_j^s|_{\tilde{H}}^2 &< \text{Cte}, \quad j = 1, 2, \dots, m, \quad \text{et } s = 0, 1, \dots, N-1; \\ k \sum_{r=0}^{N-1} \|w_{i,h}^r\|_i^2 &\equiv \int_0^T \|p_{i,h} w_{i,h}(t)\|_{F_i}^2 dt < \text{Cte}, \quad i = 1, 2, \dots, m; \\ k \sum_{r=0}^{N-1} \varphi_{i,h}(w_{i,h}) &< \text{Cte}, \quad i = 1, 2, \dots, m. \end{aligned} \right\} \quad (8)$$

Les estimations *a priori* précédentes nous permettent d'assurer l'existence d'une sous-suite extraite de  $(y_{i,h})_h$  convergeant faiblement dans  $L^\infty(0, T; \tilde{H})$  et dans  $L^2(0, T; F_i)$  vers une fonction  $w_i$ . Montrons maintenant le théorème de convergence suivant :

**THÉORÈME 2 :** *Sous les hypothèses  $(H_1)$ ,  $(H_2)$ ,  $(H'_3)$ ,  $(H_4)$ ,  $(H_5)$  et les hypothèses habituelles de convergence et de consistance des approximations (cf. [8, 9]), il y a convergence faible de  $(p_h y_h^i)$  dans  $L^\infty(0, T; \tilde{H})$  et  $L^2(0, T; F_i)$  vers  $\sigma_i y$  lorsque  $h$  et  $k$  tendent vers zéro, où  $y$  désigne la solution du problème exact.*

*Démonstration :* Montrons tout d'abord que  $w_i = w_j$  pour tout  $i \neq j$ . Considérons l'inéquation définissant  $P_{h,k}$  et prenons comme fonction test

$$s_{i,h} = v_h + w_{i,h}^r, \quad \text{avec } v_h \text{ tel que } v_h|_{\Gamma_h} = 0.$$

$s_{i,h}$  est un élément de  $D(\varphi_{i,h})$ . De plus

$$\varphi_{i,h}(s_{i,h}) = \varphi_{i,h}(w_{i,h}), \quad (g_i^r, \gamma_i s_{i,h} - \gamma_i w_{i,h}^r) = 0.$$

On a donc

$$(y_{i,h}^{r+1} - y_{i,h}^r, v_h)_h + k a_{i,h}^r(w_{i,h}^r, v_h) \geq 0, \quad \forall v_h \text{ tel que } v_h|_{\Gamma_h} = 0.$$

Par suite

$$(y_{i,h}^{r+1} - y_{i,h}^r, v_h)_h + k a_{i,h}^r(w_{i,h}^r, v_h) = 0, \quad \forall v_h \text{ tel que } v_h|_{\Gamma_h} = 0.$$

Si l'on pose

$$y_{i,h}(t) = \sum_{r=0}^{n-1} y_{i,h}^r \chi_k^r(t), \quad \forall t \in [0, T], \quad \forall i \in \{1, 2, \dots, m\},$$

où  $\chi_k^r(t)$  désigne la fonction caractéristique de l'intervalle  $[rk, (r+1)k[$ , cette relation s'écrit :

$$\begin{aligned} (y_{i+1,h}(t) - y_{i,h}(t), v_h)_h + k a_{i,h}^r(w_{i,h}(t), v_h) &= 0, \\ \forall v_h \text{ tel que } v_h|_{\Gamma_h} &= 0, \quad \forall t \in [rk, (r+1)k[. \end{aligned}$$

Par un raisonnement analogue à celui de [8] (lemme 17.1) on peut alors montrer à partir de cette relation que pour tout  $v \in \mathcal{D}(\Omega)$  et tout  $\lambda \in \mathcal{C}_R(0, T)$ , on a

$$\lim_{h', k' \rightarrow 0} \left| \int_0^T (y_{i+1, h'}(t) - y_{i, h'}(t), \lambda(t) r_{h', v}) dt \right| = \left| \int_0^T (w_{i+1}(t) - w_i(t), \lambda(t) v) dt \right| = 0.$$

$\mathcal{C}_R(0, T) \times \mathcal{D}(\Omega)$  étant dense dans  $L^2(0, T; H)$ , on en déduit

$$w_{i+1} = w_i, \quad \forall i \in \{1, 2, \dots, m-1\}.$$

On a donc  $w_1 = w_2 = \dots = w_m = w$ . Compte tenu des propriétés des approximations (cf. [7]), on a alors :

$$w \in L^2(0, T; V), \quad w = \Pi_i w_i, \quad w_i = \sigma_i w, \quad \text{p. p. pour } t \in [0, T].$$

Montrons maintenant que  $w$  est la solution du problème exact : grâce à l'identité

$$\begin{aligned} & (y_{i, h}^{r+1} - y_{i, h}^r, s_{i, h}^r - w_{i, h}^r)_h \\ &= (z_{i, h}^{r+1} - z_{i, h}^r, s_{i, h}^r - w_{i, h}^r)_h - \frac{1}{2} |z_{i, h}^{r+1} - y_{i, h}^{r+1}|_h^2 \\ &+ \frac{1}{2} |z_{i, h}^r - y_{i, h}^r|_h^2 + \left(\Theta - \frac{1}{2}\right) |(z_{i, h}^{r+1} - z_{i, h}^r) - (y_{i, h}^{r+1} - y_{i, h}^r)|_h^2 \end{aligned}$$

dans laquelle

$$s_{i, h}^r = \Theta z_{i, h}^{r+1} + (1 - \Theta) z_{i, h}^r; \quad z_{i, h}^r = \Theta y_{i, h}^{r+1} + (1 - \Theta) y_{i, h}^r,$$

on peut remplacer l'inéquation définissant le problème  $P_{h, k}$  par

$$\begin{aligned} & -\frac{1}{2} |z_{i, h}^{r+1} - y_{i, h}^{r+1}|_h^2 + (z_{i, h}^{r+1} - z_{i, h}^r, s_{i, h}^r - w_{i, h}^r)_h \\ &+ k a_{i, h}^r (w_{i, h}^r, s_{i, h}^r - w_{i, h}^r) + k [\varphi_{i, h}(s_{i, h}^r) - \varphi_{i, h}(w_{i, h}^r)] \\ &\geq k (g_i^r, \gamma_i s_{i, h}^r - \gamma_i w_{i, h}^r) - \frac{1}{2} |z_{i, h}^r - y_{i, h}^r|_h^2 \\ &+ \left(\Theta - \frac{1}{2}\right) |(z_{i, h}^{r+1} - z_{i, h}^r) - (y_{i, h}^{r+1} - y_{i, h}^r)|_h^2. \end{aligned} \tag{9}$$

Cette relation est vraie pour tout  $z_{i, h}^r$  et  $z_{i, h}^{r+1}$  appartenant à  $D(\varphi_{i, h})$ . D'après l'hypothèse  $H_5$  ( $\Theta \geq 1/2$ ) le dernier terme de (9) est positif; on peut donc le supprimer en conservant l'inégalité.



Prenons  $z_{i,h}^r = z_h^r \in \prod_{j=1}^m D(\varphi_{j,h})$ ,  $i = 1, 2, \dots, m$ , et ajoutons membre à membre les relations ainsi obtenues pour  $r = 0, 1, \dots, N-1$ ;  $i = 1, 2, \dots, m$  :

$$\begin{aligned} & -\frac{1}{2} \sum_{r=0}^{N-1} \left( \sum_{i=1}^{m-1} |z_h^{r+1} - y_{i,h}^{r+1}|_h^2 + |z_h^{r+1} - y_{m,h}^{r+1}|_h^2 \right) \\ & + \sum_{r=0}^{N-1} \sum_{i=1}^m (z_h^{r+1} - z_h^r, s_h^r - w_{i,h}^r)_h \\ & + k \sum_{r=0}^{N-1} \sum_{i=1}^m a_{i,h}^r(w_{i,h}^r, s_h^r - w_{i,h}^r) + k \sum_{r=0}^{N-1} \sum_{i=1}^m (\varphi_{i,h}(s_h^r) - \varphi_{i,h}(w_{i,h}^r)) \\ & \cong k \sum_{r=0}^{N-1} \sum_{i=1}^m (g_i^r, \gamma_i s_h^r - \gamma_i w_{i,h}^r) - \frac{1}{2} \sum_{r=0}^{N-1} \left( \sum_{i=1}^{m-1} |z_h^r - y_{i,h}^r|_h^2 + |z_h^r - y_{m,h}^r|_h^2 \right). \end{aligned}$$

Par des calculs analogues à ceux effectués dans la démonstration du théorème 1 on peut mettre cette inéquation sous la forme

$$\begin{aligned} & -\frac{1}{2} |z_h^N - y_{m,h}^N|_h^2 + \sum_{i=1}^m \sum_{r=0}^{N-1} (z_h^{r+1} - z_h^r, s_h^r - w_{i,h}^r)_h \\ & + k \sum_{i=1}^m \sum_{r=0}^{N-1} a_{i,h}^r(w_{i,h}^r, s_h^r - w_{i,h}^r) \\ & + k \sum_{i=1}^m \sum_{r=0}^{N-1} (\varphi_{i,h}(s_h^r) - \varphi_{i,h}(w_{i,h}^r)) - \frac{m-1}{2} (|z_h^N|_h^2 - |z_h^0|_h^2) \\ & + \sum_{r=0}^{N-1} \left( z_h^{r+1} - z_h^r, \sum_{i=1}^{m-1} y_{i,h}^{r+1} \right)_h \\ & \cong \sum_{i=1}^m \sum_{r=0}^{N-1} (g_i^r, \gamma_i s_h^r - \gamma_i w_{i,h}^r) - \frac{1}{2} |z_h^0 - y_{i,h}^0|_h^2. \tag{10} \end{aligned}$$

Si l'on désigne par  $\tilde{a}_i(t; u, v)$  le prolongement à  $F_i \times F_i$  des formes bilinéaires  $a_i(t; u, v)$ , et si l'on pose

$$w_{i,h}(t) = \sum_{r=0}^{N-1} w_{i,h}^r \chi_k^r(t), \quad g_{i,h}(t) = \sum_{r=0}^{N-1} g_i^r \chi_k^r(t),$$

la relation (10) peut être écrite :

$$\begin{aligned} & -\frac{1}{2} |z_h^N - y_{m,h}^N|_h^2 + \sum_{i=1}^m \sum_{r=0}^{N-1} (z_h^{r+1} - z_h^r, s_h^r - w_{i,h}^r)_h - \frac{m-1}{2} (|z_h^N|_h^2 - |z_h^0|_h^2) \\ & + k \sum_{i=1}^m \int_0^T \tilde{a}_i(t; p_{i,h} w_{i,h}(t), p_{i,h} z_h(t) - p_{i,h} w_{i,h}(t)) dt \\ & + \sum_{i=1}^m \int_0^T (\varphi_{i,h}(z_r) - \varphi_{i,h}(w_{i,h})) dt + \sum_{r=0}^{N-1} \left( z_h^{r+1} - z_h^r, \sum_{i=1}^{m-1} y_{i,h}^{r+1} \right)_h \\ & \cong \int_0^T \sum_{i=1}^m (g_{i,h}(t), \gamma_i z_h - \gamma_i w_{i,h}) dt - \frac{1}{2} |z_h^0 - y_{i,h}^0|_h^2. \tag{11} \end{aligned}$$

Soit  $z \in W(0, T) \cap D(\Phi)$ ; prenons dans (11) :

$$z_h^r = \int_{rk}^{(r+1)k} r_h z(t) dt,$$

et examinons la limite des différents termes de cette relation pour  $h, k \rightarrow 0$ . On sait que  $p_{i,h} r_h z$  converge vers  $\sigma_i z$  dans  $L^2(0, T; F_i)$  fort; par ailleurs  $p_{i,h} w_{i,h}$  converge vers  $\sigma_i w$  dans  $L^2(0, T; F_i)$  faible; par suite

$$\int_0^T \tilde{a}_i(t; p_{i,h} w_{i,h}(t), p_{i,h} z_h(t)) dt \rightarrow \int_0^T \tilde{a}_i(t; \sigma_i w, \sigma_i z) dt = \int_0^T a_i(t; w, z) dt.$$

Par ailleurs, l'application  $u \rightarrow \int_0^T \tilde{a}_i(t; u, u) dt$  est faiblement s. c. i. sur  $F_i$ , de sorte que

$$\begin{aligned} & \liminf \int_0^T \tilde{a}_i(t; p_{i,h} w_{i,h}, p_{i,h} w_{i,h}) dt \\ & \geq \int_0^T \tilde{a}_i(t; \sigma_i w, \sigma_i w) dt = \int_0^T a_i(t, w, w) dt. \end{aligned}$$

D'après les hypothèses (H<sub>4</sub>) on a également

$$\begin{aligned} & \liminf \int_0^T \varphi_{i,h}(w_{i,h}) dt \geq \int_0^T \varphi_i(w) dt; \\ & \lim_{h,k} \int_0^T \varphi_{i,h}(z_h) dt = \int_0^T \varphi_i(z) dt. \end{aligned}$$

Comme  $q_h y_{m,h}^N$  converge faiblement vers  $w(T)$  dans  $\tilde{H}$ , et que  $q_h z_h^N$  converge vers  $z(T)$ , on a

$$\liminf |z_h^N - y_{m,h}^N|^2 \geq |z(T) - w(T)|^2,$$

et de même

$$\begin{aligned} & \lim_{h,k} |z_h^0 - y_{i,h}^0|^2 = |z(0) - y_0|^2; \\ & \lim_{h,k} |z_h^N|^2 = |z(T)|^2; \quad \lim_{h,k} |z_h^0|^2 = |z(0)|^2. \end{aligned}$$

Compte tenu de la discrétisation choisie pour le second membre

$$\lim_{h,k} \int_0^T (g_{i,h}(t), \gamma_i z_h - \gamma_i w_{i,h}) dt = \int_0^T (g_i, \gamma_i z - \gamma_i w) dt.$$

Le passage à la limite dans l'inéquation (11) donne donc

$$\begin{aligned}
 & -\frac{1}{2}|z(T)-w(T)|^2 + m \left[ \limsup_{r=0}^{N-1} (z_h^{r+1} - z_h^r, s_h^r)_h \right] \\
 & -\frac{m-1}{2} (|z(T)|^2 - |z(0)|^2) + \int_0^T a(t; w, z-w) dt + \int_0^T (\varphi(z) - \varphi(w)) dt \\
 & + \limsup_{r=0}^{N-1} \left( z_h^{r+1} - z_h^r, \sum_{i=1}^{m-1} (y_{i,h}^{r+1} - w_{i,h}^r) \right)_h \\
 & \cong \int_0^T (g, \gamma z - \gamma w) dt - \frac{1}{2}|z(0) - y_0|^2.
 \end{aligned} \tag{12}$$

Montrons que

$$\begin{aligned}
 \lim_{h,k} \sum_{r=0}^{N-1} (z_h^{r+1} - z_h^r, s_h^r)_h &= \int_0^T \left( \frac{dz}{dt}, z \right) dt \\
 \lim_{h,k} \sum_{r=0}^{N-1} (z_h^{r+1} - z_h^r, y_{i,h}^{r+1} - w_{i,h}^r)_h &= 0, \quad i = 1, 2, \dots, m.
 \end{aligned}$$

A cet effet, considérons  $\Delta_t z_h$  défini par

$$\Delta_t z_h = \frac{1}{k} (z_h^{r+1} - z_h^r) \quad \text{pour } t \in [rk, (r+1)k[, \quad r = 0, 1, \dots, N-1.$$

On peut écrire alors :

$$\begin{aligned}
 \sum_{r=0}^{N-1} (z_h^{r+1} - z_h^r, s_h^r)_h &= \int_0^T (\Delta_t z_h, s_h)_h dt, \\
 \sum_{r=0}^{N-1} (z_h^{r+1} - z_h^r, y_{i,h}^{r+1} - w_{i,h}^r)_h &= \int_0^T (\Delta_t z_h, y_{i,h}(t+h) - w_{i,h}(t))_h dt = 0.
 \end{aligned}$$

On sait que  $\Delta_t z_h$  et  $s_h$  convergent respectivement vers  $dz/dt$  et  $z$  dans  $L^2(0, T; V)$ , tandis que  $y_{i,h}(t+h) - w_{i,h}(t)$  converge faiblement vers zéro dans  $L^2(0, T; V)$ .

Par suite

$$\begin{aligned}
 \lim_{h,k} \int_0^T (\Delta_t z_h, s_h)_h dt &= \int_0^T \left( \frac{dz}{dt}, z \right) dt, \\
 \lim_{h,k} \int_0^T (\Delta_t z_h, y_{i,h}(t+h) - w_{i,h}(t))_h dt &= 0.
 \end{aligned}$$

Comme

$$|z(T)|^2 - |z(0)|^2 = \int_0^T \left( \frac{dz}{dt}, z \right) dt,$$

la relation (12) s'écrit finalement :

$$\begin{aligned}
 & -\frac{1}{2} |z(T) - w(T)|^2 + \int_0^T a(t; w, z - w) dt + \int_0^T (\varphi(z) - \varphi(w)) dt \\
 & \cong \int_0^T (g, \gamma z - \gamma w)_{L^2(\Gamma)} dt - \frac{1}{2} |z(0) - y_0|^2, \quad \forall z \in W(0, T) \cap D(\Phi).
 \end{aligned}$$

Ainsi  $w$  est bien la solution du problème initial, et il y a convergence faible de  $(p_{i,h} w_{i,h})$  vers la solution  $y$  du problème initial dans  $L^\infty(0, T; \tilde{H})$  et dans  $L^2(0, T; F_i)$ .

*Remarques :* Du fait que la contrainte unilatérale n'a lieu que sur le bord du domaine, l'utilisation du schéma de Crank-Nicholson ne nécessite pas ici de condition de stabilité, à la différence du cas général des inéquations (cf. [9]).

La décomposition du second membre  $g$  et de la fonctionnelle utilise un principe analogue à celui déjà employé dans [4] et [6].

De même que pour la semi-discrétisation, nous pouvons ajouter un second membre  $f(x, t) \in L^2(\Omega \times ]0, T])$ , sans avoir à modifier les démonstrations.

**4. DÉCOMPOSITION AVEC DISCRÉTISATION COMPLÈTE UTILISANT UN SCHEMA EXPLICITE**

Les notations étant les mêmes que pour le paragraphe précédent, et l'hypothèse  $(H_4)$  étant conservée, nous définissons cette fois le problème approché discret par la suite d'inéquations

$$(Q_{h,k}) \left\{ \begin{array}{l} \text{avec} \\ \begin{aligned} & (y_{i,h-}^{r+1} - y_{i,h+}^r, z_h - y_{i,h-}^{r+1}) + k a_{i,h}^r(y_{i,h+}^r, z_h - y_{i,h-}^{r+1}) \\ & + k [\varphi_{i,h}(z_h) - \varphi_{i,h}(y_{i,h-}^{r+1})] \geq k (g_i^r, \gamma_i z_h - \gamma_i y_{i,h-}^{r+1}), \\ & \forall z_h \in D(\varphi_{i,h}), \\ & y_{1,h+}^0 = r_h y_0; \quad y_{1,h+}^r = y_{m,h-}^r, \quad r = 1, 2, \dots, N-1; \\ & y_{i,h+}^r = y_{i-1,h-}^{r+1}; \quad r = 1, 2, \dots, N-1 \text{ et } i = 1, 2, \dots, m. \end{aligned} \end{array} \right.$$

Alors que, dans le schéma utilisé au paragraphe 3, les opérateurs  $(I + k A_{i,h}^r)$  et  $\partial\varphi_i$  (sous différentiel de  $\varphi_i$ ) intervenaient simultanément pour la définition implicite de  $y_{i,h}^{r+1}$  à partir de  $y_{i,h}^r$ , seul l'opérateur  $\partial\varphi_i$  intervient ici dans la définition implicite de  $y_{i,h}^{r+1}$  à partir de  $y_{i,h}^r$ . Le schéma étant de type explicite, l'obtention d'estimation *a priori* est subordonnée à une condition de stabilité, faisant intervenir les « constantes »  $S_i(h)$  telles que

$$\|u_h\|_{F_i} \leq S_i(h) |u_h|_h, \quad \forall u_h \in V_h. \tag{13}$$

(Pour les espaces utilisés ici on a :  $S_i(h) = (1 + 2/h_i^2)^{1/2}$ .)

PROPOSITION 4 : S'il existe  $\delta > 0$  tel que

$$2c_i^2 k(S_i(h))^2 \leq \alpha_i \left( \frac{1}{2} - \delta \right), \quad i = 1, 2, \dots, m, \quad (14)$$

lorsque  $k$  et  $h$  tendent vers zéro, alors les solutions approchées des problèmes  $Q_{h,k}$  vérifient :

$$\left. \begin{aligned} |y_{i,h}^r|_{\tilde{H}} &< C_1, \quad \text{pour } r = 0, 1, \dots, N, \text{ et } i = 1, 2, \dots, m, \\ \int_0^T \|p_{i,h} y_{i,h}(t)\|_{F_i}^2 dt &< C_2, \quad i = 1, 2, \dots, m, \\ \sum_{r=0}^{N-1} |y_{i,h-}^{r+1} - y_{i,h+}^r|_h^2 &< C_3, \quad i = 1, 2, \dots, m. \end{aligned} \right\} \quad (15)$$

où  $C_1$ ,  $C_2$  et  $C_3$  ne dépendent que des données du problème (P).

Démonstration : Prenons  $z_h = 0$  dans l'inéquation définissant  $(Q_{h,k})$  :

$$\begin{aligned} (y_{i,h-}^{r+1} - y_{i,h+}^r, y_{i,h-}^{r+1})_h + ka_{i,h}^r (y_{i,h+}^r, y_{i,h-}^{r+1}) \\ - k(\varphi_{i,h}(0) - \varphi_{i,h}(y_{i,h-}^{r+1})) \leq k(g_i^r, \gamma_i y_{i,h-}^{r+1}). \end{aligned}$$

Or

$$(y_{i,h-}^{r+1} - y_{i,h+}^r, y_{i,h-}^{r+1})_h = \frac{1}{2} (|y_{i,h-}^{r+1}|_h^2 - |y_{i,h+}^r|_h^2) + \frac{1}{2} |y_{i,h-}^{r+1} - y_{i,h+}^r|_h^2.$$

D'où

$$\begin{aligned} \frac{1}{2} (|y_{i,h-}^{r+1}|_h^2 - |y_{i,h+}^r|_h^2) + \frac{1}{2} |y_{i,h-}^{r+1} - y_{i,h+}^r|_h^2 \\ + ka_{i,h}^r (y_{i,h+}^r, y_{i,h+}^r) + k\varphi_{i,h}(y_{i,h-}^{r+1}) \\ \leq k\varphi_{i,h}(0) + ka_{i,h}^r (y_{i,h+}^r, y_{i,h-}^{r+1} - y_{i,h+}^r) + k(g_i^r, \gamma_i y_{i,h+}^r) \\ + k(g_i^r, \gamma_i y_{i,h-}^{r+1} - \gamma_i y_{i,h+}^r). \end{aligned}$$

$\eta_i$  étant un nombre positif quelconque, on peut majorer les différents seconds membres de cette relation de la façon suivante :

$$\begin{aligned} (g_i^r, \gamma_i y_{i,h}^r) &\leq \|g_i^r\|_{L^2(\Gamma)} \|\gamma_i y_{i,h}^r\|_{L^2(\Gamma)} \leq \mu_i \|g_i^r\|_{L^2(\Gamma)} \|y_{i,h}^r\|_{F_i}^2 \\ &\leq \frac{\mu_i^2}{\alpha_i} \|g_i^r\|_{L^2(\Gamma)}^2 + \frac{\alpha_i}{4} \|y_{i,h}^r\|_{F_i}^2. \\ (g_i^r, \gamma_i y_{i,h-}^{r+1} - \gamma_i y_{i,h+}^r) &\leq \mu_i \|g_i^r\|_{L^2(\Gamma)} \|y_{i,h-}^{r+1} - y_{i,h+}^r\|_{F_i} \\ &\leq \frac{\mu_i^2}{2\eta_i} \|g_i^r\|_{L^2(\Gamma)}^2 + \frac{\eta_i}{2} (S_i(h))^2 |y_{i,h-}^{r+1} - y_{i,h+}^r|_h^2. \\ a_{i,h}^r (y_{i,h+}^r, y_{i,h-}^{r+1} - y_{i,h+}^r) &\leq c_i \|y_{i,h+}^r\|_{F_i} \|y_{i,h-}^{r+1} - y_{i,h+}^r\|_{F_i} \\ &\leq \frac{\alpha_i}{4} \|y_{i,h+}^r\|_{F_i}^2 + \frac{c_i^2}{\alpha_i} (S_i(h))^2 |y_{i,h-}^{r+1} - y_{i,h+}^r|_h^2. \end{aligned}$$

D'où

$$\begin{aligned} & \frac{1}{2} (|y_{i,h-}^{r+1}|_h^2 - |y_{i,h+}^r|_h^2) + |y_{i,h-}^{r+1} - y_{i,h+}^r|_h^2 \left[ \frac{1}{2} - k(S_i(h))^2 \left( \frac{\eta_i}{2} + \frac{c_i^2}{\alpha_i} \right) \right] \\ & + \frac{k\alpha_i}{2} \|y_{i,h+}^r\|^2 + k\varphi_{i,h}(y_{i,h-}^{r+1}) \leq k\varphi_{i,h}(0) + k \left( \frac{\mu_i^2}{\alpha_i} + \frac{\mu_i^2}{2\eta_i} \right) \|g_i^r\|_{L^2(\Gamma)}^2 \end{aligned} \quad (16)$$

Prenons  $\eta_i = 2c_i^2/\alpha_i$ , de sorte que  $(\eta_i/2) + (c_i^2/\alpha_i) = 2c_i^2/\alpha_i$ . Sous la condition de stabilité

$$2c_i^2 k(S_i(h))^2 < \alpha_i \left( \frac{1}{2} - \delta \right),$$

on aura

$$\frac{1}{2} - k(S_i(h))^2 \frac{2c_i^2}{\alpha_i} > \delta. \quad (17)$$

Posons par ailleurs

$$\rho_i = \frac{\mu_i^2}{\alpha_i} - \frac{\mu_i^2}{2\eta_i} = \frac{\mu_i^2}{\alpha_i} - \frac{\alpha\mu_i^2}{4c_i^2}; \quad \rho = \max_{i \in \{1, 2, \dots, n\}} \rho_i. \quad (18)$$

En ajoutant membre à membre toutes les relations (16) pour  $r = 1, 2, \dots, N$  et  $i = 1, 2, \dots, m$ , on obtient :

$$\begin{aligned} & \frac{1}{2} \sum_{r,i} (|y_{i,h-}^{r+1}|_h^2 - |y_{i,h+}^r|_h^2) + \frac{\delta}{2} \sum_{r,i} |y_{i,h-}^{r+1} - y_{i,h+}^r|_h^2 + \frac{k\alpha}{2} \sum_{r,i} \|y_{i,h-}^r\|^2 \\ & + k \sum_{r,i} \varphi_{i,h}(y_{i,h-}^{r+1}) \leq k \sum_{r,i} \varphi_{i,h}(0) + k\rho \sum_{r,i} \|g_i^r\|_{L^2(\Gamma)}^2. \end{aligned}$$

C'est-à-dire, en tenant compte des conditions initiales successives

$$\begin{aligned} & \frac{1}{2} |y_{m,h}^N|_h^2 + \frac{\delta}{2} \sum_{r,i} |y_{i,h-}^{r+1} - y_{i,h+}^r|_h^2 + \frac{k\alpha}{2} \sum_{r,i} \|y_{i,h-}^r\|^2 + k \sum_{r,i} \varphi_{i,h}(y_{i,h-}^{r+1}) \\ & \leq T\varphi(0) + k\rho \int_0^T \|g\|_{L^2(\Gamma)}^2 dt + c' |y_0|_H^2. \end{aligned} \quad (19)$$

Tous les termes du premier membre étant positifs, on en déduit alors facilement les majorations (15).

De même qu'au paragraphe 3, nous pouvons maintenant montrer le théorème de convergence suivant :

**THÉORÈME 3 :** *Sous les hypothèses (H<sub>1</sub>), (H<sub>2</sub>), (H<sub>3</sub>), (H<sub>4</sub>) et les hypothèses habituelles de convergence et de consistance des approximations (cf. [8, 9]), les solutions  $p_{i,h} y_{i,h}$  des problèmes approchés (Q<sub>hk</sub>) convergent faiblement dans*

$L^2(0, T; F_i)$  et dans  $L^\infty(0, T; \tilde{H})$  vers la solution  $y$  du problème (P), lorsque  $h$  et  $k$  tendent vers zéro en vérifiant la condition de stabilité

$$\lim_{h, k \rightarrow 0} k(S_i(h))^2 = 0, \quad i = 1, 2, \dots, m. \quad (14')$$

*Démonstration* : D'après la proposition 4, il existe pour  $i = 1, 2, \dots, m$  une sous-suite extraite de  $(y_{i, h})_h$  qui converge faiblement dans  $L^\infty(0, T; H)$  et dans  $L^2(0, T; F_i)$  vers une fonction  $w_i$ .

On peut montrer tout d'abord, par un raisonnement analogue à celui utilisé pour le théorème 2, que  $w_i = w_j$  pour  $i \neq j$ .

Désignons alors par  $w$  la limite commune, et montrons que  $w$  est la solution du problème (P).

Grâce à l'identité

$$\begin{aligned} (z_h^{r+1} - z_h^r, z_h^{r+1} - y_{i, h}^{r+1})_h &= (y_{i, h}^{r+1} - y_{i, h}^r, z_h^{r+1} - y_{i, h}^{r+1})_h - \frac{1}{2} |z_h^r - y_{i, h}^r|_h^2 \\ &\quad + \frac{1}{2} |z_h^{r+1} - y_{i, h}^{r+1}|_h^2 + \frac{1}{2} |(z_h^{r+1} - z_h^r) - (y_{i, h}^{r+1} - y_{i, h}^r)|_h^2, \end{aligned}$$

l'inéquation définissant  $Q_{h, k}$  peut être écrite :

$$\begin{aligned} & - \frac{1}{2} |z_h^{r+1} - y_{i, h}^{r+1}|_h^2 + (z_h^{r+1} - z_h^r, z_h^{r+1} - y_{i, h}^{r+1})_h \\ & + k a_{i, h}^r (y_{i, h+}^r, z_h^{r+1} - y_{i, h-}^{r+1}) + k (\varphi_{i, h}(z_h^{r+1}) - \varphi_{i, h}(y_{i, h-}^{r+1})) \\ \cong & - \frac{1}{2} |z_h^r - y_{i, h+}^r|_h^2 + k (g_r^i, \gamma_i z_h^{r+1} - \gamma_i y_{i, h-}^{r+1}) \\ & + \frac{1}{2} |(z_h^{r+1} - z_h^r) - (y_{i, h-}^{r+1} - y_{i, h+}^r)|_h^2. \end{aligned} \quad (20)$$

Le dernier terme étant positif quel que soit  $z_h$ , on peut le supprimer en conservant l'inégalité. Par ailleurs, on peut écrire :

$$a_{i, h}^r (y_{i, h+}^r, z_h^{r+1} - y_{i, h-}^{r+1}) = a_{i, h}^r (y_{i, h+}^r, z_h^{r+1} - y_{i, h}^r) - a_{i, h}^r (y_{i, h+}^r, y_{i, h-}^{r+1} - y_{i, h+}^r).$$

D'où en ajoutant membre à membre les relations (20) pour  $r = 0, 1, \dots, N-1$  et  $i = 1, 2, \dots, m$  :

$$\begin{aligned} & - \frac{1}{2} |z_h^N - y_{m, h-}^N|_h^2 + \sum_{r, i} (z_h^{r+1} - z_h^r, z_h^{r+1} - y_{i, h-}^{r+1})_h \\ & + k \sum_{r, i} a_{i, h}^r (y_{i, h+}^r, z_h^{r+1} - y_{i, h+}^r) \\ & - k \sum_{r, i} a_{i, h}^r (y_{i, h+}^r, y_{i, h-}^{r+1} - y_{i, h+}^r) + k \sum_{r, i} (\varphi_{i, h}(z_h^r) - \varphi_{i, h}(y_{i, h}^{r+1})) \\ & - \frac{m-1}{2} (|z_h^N|_h^2 - |z_h^0|_h^2) + \sum_r (z_h^{r+1} - z_h^r, \sum_i y_{i, h-}^{r+1})_h \\ \cong & \sum_{r, i} (g_r^i, \gamma_i z_h^{r+1} - \gamma_i y_{i, h-}^{r+1}) - \frac{1}{2} |z_h^0 - y_{1, h+}^0|_h^2. \end{aligned} \quad (21)$$

Lorsque  $k$  et  $h$  tendent vers zéro en vérifiant la condition de stabilité (14'), on a

$$\lim_{k, h} k \sum_{r=0}^{N-1} a_{i, h}^r (y_{i, h+}^r, y_{i, h-}^{r+1} - y_{i, h+}^r) = 0.$$

En effet

$$\begin{aligned} & k \sum_{r=0}^{N-1} a_{i, h}^r (y_{i, h+}^r, y_{i, h-}^{r+1} - y_{i, h+}^r) \\ & \leq k \sum_{r=0}^{N-1} c_i \|y_{i, h+}^r\|_i \|y_{i, h-}^{r+1} - y_{i, h+}^r\|_i \\ & \leq k^{1/2} S_i(h) c_i \left( k \sum_{r=0}^{N-1} \|y_{i, h+}^r\|_i^2 \right)^{1/2} \left( \sum_{r=0}^{N-1} |y_{i, h-}^{r+1} - y_{i, h+}^r|^2 \right)^{1/2}. \end{aligned}$$

D'après les majorations (15) :

$$\begin{aligned} & k \sum_{r=0}^{N-1} \|y_{i, h+}^r\|_i^2 \text{ est borné,} \\ & \sum_{r=0}^{N-1} |y_{i, h-}^{r+1} - y_{i, h+}^r|_h^2 \text{ est borné.} \end{aligned}$$

D'après les conditions de stabilité (14'),  $k^{1/2} S_i(h)$  tend vers zéro; d'où le résultat annoncé.

Il suffit maintenant de continuer le raisonnement établissant la convergence de  $p_{i, h} y_{i, h}$  vers la solution  $y$  du problème P comme dans le cas du schéma totalement implicite. D'où le théorème 3.

*Remarque* : On pourrait également définir un schéma totalement explicite, par des inéquations de la forme

$$\begin{aligned} (y_h^{r+1} - y_h^r, z_h - y_h^r)_h + k a_h^r (y_h^r, z_h - y_h^r) + k (\varphi_h(z_h) - \varphi_h(y_h^r)) & \geq (g_h^r, \gamma z_h - \gamma y_h^r), \\ \forall z_h \in D(\varphi_h). \end{aligned}$$

$y_h^{r+1}$  est alors défini à partir de  $y_h^r$  et des données du problème par une équation explicite du type

$$-y_h^{r+1} + (I - k A_h^r) y_h^r + k G_h^r \in k \partial \varphi(y_h^r).$$

Cependant, l'utilisation de ce schéma nécessite, outre la condition de stabilité sur les pas  $k$  et  $h$ , une certaine régularité de la fonctionnelle  $\varphi$  ( $\varphi$  continue et lipschitzienne). Compte tenu des exemples envisagés, cette régularité n'est pas toujours réalisée, et la simplification obtenue par rapport au schéma  $(Q_{h, k})$  est par ailleurs minime.



### 5. EXEMPLES D'APPLICATIONS

Nous indiquerons ici quelques types de condition aux limites qui peuvent être traitées par les schémas précédents.

a) « Troisième problème aux limites » : Soit  $\lambda > 0$  et  $j(r) = \lambda (r^2/2)$ ; alors :

$$\varphi(u) = \int_{\Gamma} (\gamma u)^2 d\sigma \quad \text{et} \quad D(\varphi) = H^1(\Omega).$$

La condition aux limites correspondante est

$$\frac{\partial y}{\partial \nu_A} + \lambda y = g.$$

Posons

$$\varphi_i(u) = \frac{\lambda}{2} \int_{\Gamma} (\gamma_i u)^2 d\sigma.$$

Grâce à l'hypothèse (H<sub>1</sub>) on a  $D(\varphi_i) = H^1(D_i, \Omega)$  de sorte que

$$\overline{D(\varphi_i)^{L^2(\Omega)}} = \overline{D(\varphi)^{L^2(\Omega)}} = L^2(\Omega).$$

On a également

$$\sum_{i=1}^m \varphi_i(u) = \varphi(u), \quad \forall u \in D(\varphi).$$

b) Soit  $j(r) = |r|$ ; alors

$$\varphi(u) = \int_{\Gamma} |\gamma u| d\sigma \quad \text{et} \quad D(\varphi) = H^1(\Omega).$$

La condition aux limites correspondante est

$$\begin{aligned} -\frac{\partial y}{\partial \nu_A} + g(x) &= \text{signe}(y(x)) & \text{si } y(x) \neq 0, \\ -\left| \frac{\partial y}{\partial \nu_A} + g(x) \right| &< 1 & \text{si } y(x) = 0. \end{aligned}$$

Posons

$$\varphi_i(u) = \int_{\Gamma} |\gamma_i u \cos(\nu, x_i)| d\sigma.$$

Alors on a bien

$$D(\varphi_i) = H^1(D_i, \Omega); \quad \sum_{i=1}^m \varphi_i(u) = \varphi(u), \quad \forall u \in D(\varphi),$$

de sorte que l'hypothèse (H<sub>2</sub>) est satisfaite.

c) Soit  $\lambda > 0$  et  $j(r)$  défini par

$$j(r) = |r| - \frac{1}{2\lambda} \quad \text{si } |r| \geq \frac{1}{\lambda},$$

$$j(r) = \frac{\lambda r^2}{2} \quad \text{si } |r| < \frac{1}{\lambda}.$$

Posons

$$\Gamma_u^+ = \left\{ x \in \Gamma, |\gamma u(x)| \geq \frac{1}{\lambda} \right\}, \quad \Gamma_u^- = \Gamma - \Gamma_u^+.$$

Alors :

$$\varphi(u) = \int_{\Gamma_u^+} \left( |\gamma u| - \frac{1}{2\lambda} \right) d\sigma + \int_{\Gamma_u^-} \frac{\lambda}{2} |\gamma u|^2 d\sigma.$$

Par suite  $D(\varphi) = H^1(\Omega)$ . La condition aux limites correspondante est

$$-\frac{\partial y}{\partial \nu_A}(x) + g(x) = \begin{cases} 1 & \text{si } y(x) \geq \frac{1}{\lambda}, \\ \lambda y(x) & \text{si } |y(x)| < \frac{1}{\lambda}, \\ -1 & \text{si } y(x) \leq -\frac{1}{\lambda}. \end{cases}$$

En vue de décomposer ce problème nous définissons tout d'abord des fonctions  $j_i(x, r)$  par

$$j_i(x, r) = \begin{cases} |r \cos(v, x_i)| - \frac{1}{2\lambda} \cos^2(v, x_i) & \text{si } |r| \geq \frac{1}{\lambda} |\cos(v, x_i)|, \\ \frac{\lambda r^2}{2} & \text{si } |r| < \frac{1}{\lambda} |\cos(v, x_i)|. \end{cases}$$

Si l'on définit alors :

$$\varphi_i(u) = \int_{\Gamma} j_i(x, \gamma_i u) d\sigma,$$

les fonctions  $\varphi_i$  vérifient l'hypothèse  $H_2$ .

d) Soit  $j(r)$  définie par

$$j(r) = 0 \quad \text{si } r \geq 0, \quad j(r) = +\infty \quad \text{si } r < 0.$$

$j(r)$  est une fonction semi-continue inférieurement, dont la sous-différentielle est :

$$\beta(r) = \begin{cases} 0 & \text{si } r > 0, \\ ]-\infty, 0] & \text{si } r = 0, \\ \emptyset & \text{si } r < 0. \end{cases}$$

Par suite,  $D(\varphi) = \{ u \in H^1(\Omega), \gamma u \geq 0, \text{ p. p. sur } \Gamma \}$ .

La condition aux limites correspondante est

$$y(x) \geq 0, \quad \text{p. p. sur } \Gamma,$$

$$-\frac{\partial y}{\partial \nu_A}(x) + g(x) = 0 \quad \text{si } y(x) > 0,$$

$$-\frac{\partial y}{\partial \nu_A}(x) + g(x) \leq 0 \quad \text{si } y(x) = 0.$$

En vue de décomposer ce problème, nous poserons

$$j_i(x, r) = \begin{cases} 0 & \text{si } r \cos(\nu, x_i) \geq 0, \\ +\infty & \text{si } r \cos(\nu, x_i) < 0, \end{cases}$$

$$\varphi_i(u) = \int_{\Gamma} j_i(x, \gamma_i u) d\sigma.$$

On peut alors montrer que

$$D(\varphi_i) = \{u \in H^1(\Omega), \gamma_i u \cos(\nu, x_i) \geq 0, \text{ p. p. sur } \Gamma\},$$

$$\varphi(u) = \sum_{i=1}^m \varphi_i(u), \quad \forall u \in H^1(\Omega).$$

L'hypothèse (H<sub>2</sub>) est donc vérifiée.

## 6. ESSAIS NUMÉRIQUES

Ils ont été effectués pour un problème à deux dimensions d'espace comportant une condition aux limites du type 5 b : le domaine étant le carré  $\Omega = ]0, \pi[ \times ]0, \pi[$ , et  $\beta$  l'opérateur monotone de  $\mathbf{R}$  dans  $\mathbf{R}$  défini par  $\beta(r) = -1$  si  $r < 0$ ,  $\beta(r) = [-1, +1]$  si  $r = 0$ ,  $\beta(r) = 1$  si  $r > 0$ ,

on a considéré le problème suivant :

$$\left\{ \begin{array}{l} \frac{\partial u}{\partial t} + \alpha(-\Delta u + u) = f \quad \text{sur } \Omega, \quad t \in [0, 1], \\ -\frac{\partial u}{\partial \nu} + g \in \beta(u) \quad \text{sur } \partial\Omega, \quad t \in [0, 1]. \end{array} \right.$$



Pour  $p = 1, 2, 3, \dots$  :

$$\begin{cases} a_0 u_0^{(p)} + \overline{B} U_1^{(p-1)} + g_0 \in \beta(u_0^{(p)}), \\ B u_0^{(p)} + A_1 U_1^{(p)} + G_1 \in \beta_1(U_1^{(p)}). \end{cases}$$

Le système résumé par la seconde équation précédente peut être facilement résolu par la méthode d'élimination de Gauss, puisque seule la dernière équation de ce système est non linéaire. La convergence d'un tel algorithme est assurée par les résultats de [7] (§ 1.10).

### b) Schéma explicite

Le système à résoudre à chaque pas est composé cette fois d'équations entièrement découplées; les équations correspondant aux points de  $\Gamma_h$  sont non linéaires, mais peuvent être résolues sans difficulté.

### c) Résultats

Les résultats obtenus ont été résumés dans les tableaux ci-après, donnant les valeurs de  $\|P_h y_{m,h}(t) - P_h r_h y(t)\|_{L^2(\Omega)} / \|P_h r_h y(t)\|_{L^2(\Omega)}$  pour diverses valeurs de  $t$  dans l'intervalle  $[0, 1]$ .

Les valeurs des pas  $h$  et  $k$  utilisés pour obtenir la solution approchée  $y_{m,h}$  sont indiquées en tête de chaque tableau. On indique également à la fin du tableau la durée  $D$  du calcul, effectué à l'aide d'un ordinateur IRIS 50. On donne enfin, dans le cas du schéma implicite, le nombre N.IT d'itérations qui a été nécessaire pour atteindre le point  $t = 1$ .

On constate que le schéma explicite donne des résultats corrects lorsque  $k$  est assez petit et  $h$  assez grand. Cependant, il devient rapidement inutilisable lorsqu'on diminue le pas  $h$ .

Pour le schéma implicite, on remarque que le nombre d'itérations nécessaire pour atteindre le point  $t = 1$  est d'autant plus faible que le pas  $k$  est grand, la précision obtenue restant sensiblement constante; on a donc intérêt à prendre un pas  $k$  assez grand pour diminuer le temps de calcul : ainsi, avec  $k = 0,5$  le temps de calcul est du même ordre pour le schéma implicite et pour un schéma explicite donnant la même précision.

Les schémas du type semi-implicite ( $1/2 \leq \Theta < 1$ ) nécessitent un temps de calcul plus faible que le schéma implicite ( $-30\%$  lorsque  $\Theta = 1/2$ ). L'expérience numérique permet de vérifier la stabilité de ces schémas; on note cependant que pour  $k$  assez grand, la précision obtenue est d'autant moins bonne que  $\Theta$  est voisin de  $1/2$ .

SCHÉMA EXPLICITE

1. Discrétisation de  $\Omega$  avec  $9 \times 9$  points ( $h \neq 0,39$ )

$t$	$k = 0,02$	$k = 0,05$	$k = 0,1$	$k = 0,2$	$k = 0,5$
0,1	.023 63	.025 40	.043 80		.311
0,2	.028 00	.028 15	.024 20	.092 0	
0,3	.029 78	.030 00	.047 20		
0,4	.030 80	.031 59	.036 45	.146 7	
0,5	.031 60	.033 10	.054 30		
0,6	.032 20	.034 61	.047 00	.439 0	
0,7	.032 75	.036 12	.062 20		
0,8	.033 02	.037 38	.056 04	.149 6.10	
0,9	.034 47	.038 75	.069 70		
1,0	.033 63	.039 90	.063 70	.101 0.10 <sup>2</sup>	
$D$	8,35 secondes	3,34 secondes	1,67 seconde	0,83 seconde	0,33 seconde

2. Discrétisation de  $\Omega$  avec  $13 \times 13$  points ( $h \neq 0,26$ )

$t$	$k = 0,02$	$k = 0,05$	$k = 0,1$	$k = 0,2$	$k = 0,5$
0,1	.015 43	.011 5	.052 3		.347 9
0,2	.016 47	.019 7	.108 2	.107 0	
0,3	.017 12	.033 1	.401 0		
0,4	.017 54	.056 8	.130 5.10	.546 0	
0,5	.018 04	.100 6	.649 0.10		
0,6	.018 49	.186 9	.745 0.10 <sup>2</sup>	.482 5.10	
0,7	.018 97	.390 1	.101 3.10 <sup>4</sup>		
0,8	.019 36	.929 5	.146 2.10 <sup>5</sup>	.263 0.10 <sup>3</sup>	
0,9	.019 81	.254 5.10	.210 0.10 <sup>6</sup>		
1,0	.020 20	.763 0.10	.302 0.10 <sup>7</sup>	.199 7.10 <sup>5</sup>	
$D$	15,1 secondes	6,04 secondes	3,02 secondes	1,51 seconde	0,60 seconde

3. Discrétisation de  $\Omega$  avec  $17 \times 17$  points ( $h \neq 0,195$ )

$t$	$k = 0,02$	$k = 0,05$	$k = 0,1$	$k = 0,2$	$k = 0,5$
0,1	.010 80	.050 4	.059 8		.362 0
0,2	.011 18	.472 0	.301 5	.121 0	
0,3	.011 80	.482 5.10	.186 9.10		
0,4	.012 38	.288 0.10 <sup>3</sup>	.297 2.10 <sup>2</sup>	.121 2.10	
0,5	.013 02	.285 9.10 <sup>5</sup>	.143 0.10 <sup>4</sup>		
0,6	.013 64	.274 5.10 <sup>7</sup>	.771 0.10 <sup>5</sup>	.601 6.10 <sup>2</sup>	
0,7	.014 28	.301 0.10 <sup>9</sup>	.423 0.10 <sup>7</sup>		
0,8	.014 83	.313 4.10 <sup>11</sup>	.234 5.10 <sup>9</sup>	.147 4.10 <sup>5</sup>	
0,9	.015 43	.330 0.10 <sup>13</sup>	.131 5.10 <sup>11</sup>		
1,0	.015 95	.348 5.10 <sup>15</sup>	.812 0.10 <sup>12</sup>	.389 8.10 <sup>7</sup>	
$D$	24 secondes	9,60 secondes	4,80 secondes	2,20 secondes	0,96 seconde

## SCHÉMA IMPLICITE

1. *Discretisation de  $\Omega$  avec  $9 \times 9$  points ( $h \neq 0,39$ )*

$t$	$k = 0,05$	$k = 0,1$	$k = 0,2$	$k = 0,5$
0,1	.019 98	.017 97		
0,2	.026 99	.025 48	.022 95	
0,3	.030 10	.029 17		
0,4	.031 75	.031 77	.029 80	
0,5	.032 85	.032 37		.028 67
0,6	.033 61	.033 22	.032 52	
0,7	.034 21	.033 83		
0,8	.034 55	.034 26	.033 91	
0,9	.034 91	.034 84		
1,0	.035 10	.034 87	.034 75	.034 35
N.IT	$20 \times 8 = 160$	$10 \times 10 = 100$	$5 \times 14 = 70$	$2 \times 23 = 46$
$D$	14,90 secondes	9,30 secondes	6,22 secondes	4,30 secondes

2. *Discretisation de  $\Omega$  avec  $13 \times 13$  points ( $h \neq 0,26$ )*

$t$	$k = 0,05$	$k = 0,1$	$k = 0,2$	$k = 0,5$
0,1	.013 80	.012 41		
0,2	.016 43	.015 80	.014 50	
0,3	.017 41	.017 07		
0,4	.017 90	.017 67	.017 30	
0,5	.018 25	.018 11		0.16 71
0,6	.018 50	.018 40	.018 30	
0,7	.018 72	.018 62		
0,8	.018 81	.018 76	.018 88	
0,9	.018 96	.018 96		
1,0	.019 01	.019 03	.019 31	.018 83
N.IT	$20 \times 10 = 200$	$10 \times 12 = 120$	$5 \times 19 = 95$	$2 \times 35 = 70$
$D$	34,70 secondes	20,90 secondes	16,50 secondes	12,20 secondes

3. *Discretisation de  $\Omega$  avec  $17 \times 17$  points ( $h \neq 0,195$ )*

$t$	$k = 0,05$	$k = 0,1$	$k = 0,2$	$k = 0,5$
0,1	.009 92	.009 07		
0,2	.011 30	.010 86	.010 17	
0,3	.011 57	.011 45		
0,4	.011 78	.011 73	.011 69	
0,5	.011 97	.011 97		.011 22
0,6	.012 08	.012 11	.012 32	
0,7	.012 20	.012 29		
0,8	.012 23	.012 39	.012 75	
0,9	.012 33	.012 53		
1,0	.012 35	.012 62	.013 17	.012 23
N.IT	$20 \times 12 = 240$	$10 \times 16 = 160$	$5 \times 25 = 125$	$2 \times 46 = 92$
$D$	67,30 secondes	46 secondes	35,5 secondes	26 secondes

SCHÉMA DE CRANK-NICHOLSON ( $\Theta = 1/2$ )

1. Discrétisation de  $\Omega$  avec  $9 \times 9$  points ( $h \neq 0,39$ )

$t$	$k = 0,05$	$k = 0,1$	$k = 0,2$	$k = 0,5$
0,1	.023 41	.025 24		.104 1
0,2	.028 47	.028 79	.037 17	
0,3	.030 48	.031 01		
0,4	.031 72	.032 96	.041 16	
0,5	.032 66	.034 80		
0,6	.033 43	.036 58	.052 31	
0,7	.034 09	.038 29		
0,8	.034 67	.039 91	.060 89	
0,9	.035 18	.041 45		
1,0	.035 65	.042 90	.068 67	
N.IT	$20 \times 6 = 120$	$10 \times 8 = 80$	$5 \times 10 = 50$	$2 \times 15 = 30$
$D$	11,87 secondes	8,00 secondes	4,55 secondes	2,90 secondes

2. Discrétisation de  $\Omega$  avec  $13 \times 13$  points ( $h \neq 0,26$ )

	$k = 0,05$	$k = 0,1$	$k = 0,2$	$k = 0,5$
0,1	.015 42	.019 52		.103 6
0,2	.016 74	.017 22	.029 47	
0,3	.017 59	.020 84		
0,4	.018 40	.022 94	.036 51	
0,5	.019 21	.025 55		
0,6	.020 01	.027 91	.050 10	
0,7	.020 80	.030 21		
0,8	.021 56	.032 34	.058 92	
0,9	.022 29	.034 34		
1,0	.022 99	.036 20	.067 62	
N.IT	$20 \times 8 = 160$	$10 \times 10 = 100$	$5 \times 12 = 60$	$2 \times 21 = 42$
$D$	28,47 secondes	17,86 secondes	10,80 secondes	7,64 secondes

3. Discrétisation de  $\Omega$  avec  $17 \times 17$  points ( $h \neq 0,195$ )

	$k = 0,05$	$k = 0,1$	$k = 0,2$	$k = 0,5$
0,1	.010 17	.015 45		.104 0
0,2	.011 58	.012 89	.025 90	
0,3	.012 60	.018 12		
0,4	.013 66	.020 22	.036 59	
0,5	.014 73	.023 62		
0,6	.015 79	.026 14	.050 22	
0,7	.016 82	.028 79		
0,8	.017 79	.031 07	.059 32	
0,9	.018 71	.033 26		
1,0	.019 58	.035 23	.068 19	
N.IT	$20 \times 8 = 160$	$10 \times 12 = 120$	$5 \times 16 = 80$	$2 \times 29 = 58$
$D$	44,50 secondes	34,20 secondes	23,00 secondes	17,00 secondes



## BIBLIOGRAPHIE

1. C. BARDOS, *Ann. scient. Éc. Norm. Sup.*, 4<sup>e</sup> série, t. 3, 1970, p. 185-253.
2. H. BRÉZIS, *Problèmes unilatéraux*, Thèse, Paris, 1970.
3. H. BRÉZIS, *Opérateurs maximaux monotones et semi-groupes de contraction dans les espaces de Hilbert*, North-Holland Mathematics Studies, Amsterdam, 1973.
4. A. DIGUGLIELMO, *Approximation par pas fractionnaires de problèmes de contrôle*, C. R. Acad. Sc. Paris, t. 275, série A, 1972, p. 127-130.
5. A. DIGUGLIELMO, *Méthode de décomposition pour un problème unilatéral de type parabolique*, C. R. Acad. Sc. Paris, t. 281, série A, 1975, p. 913-916.
6. P. LEMONNIER, *Résolution numérique d'équations aux dérivées partielles par décomposition et coordination*, Cahier de l'I.R.I.A., n° 11, t. 2, 1972.
7. J. C. MIELLOU, *Opérateurs paramonotones*, Thèse, Grenoble, 1970.
8. R. TEMAM, *Sur la stabilité et la convergence de la méthode des pas fractionnaires*, Thèse, Paris, 1967.
9. R. TREMOLIÈRES, *Inéquations variationnelles : existence, approximation, résolution*, Thèse, Paris, 1972.
10. R. GLOWINSKI, J. L. LIONS, R. TRÉMOLIÈRES, *Analyse numérique des inéquations variationnelles*, Dunod, Paris, 1976.