

M. BERNADOU

Y. DUCATEL

**Méthodes d'éléments finis avec intégration
numérique pour des problèmes elliptiques
du quatrième ordre**

RAIRO. Analyse numérique, tome 12, n° 1 (1978), p. 3-26

http://www.numdam.org/item?id=M2AN_1978__12_1_3_0

© AFCET, 1978, tous droits réservés.

L'accès aux archives de la revue « RAIRO. Analyse numérique » implique l'accord avec les conditions générales d'utilisation (<http://www.numdam.org/conditions>). Toute utilisation commerciale ou impression systématique est constitutive d'une infraction pénale. Toute copie ou impression de ce fichier doit contenir la présente mention de copyright.

NUMDAM

Article numérisé dans le cadre du programme
Numérisation de documents anciens mathématiques
<http://www.numdam.org/>

MÉTHODES D'ÉLÉMENTS FINIS AVEC INTÉGRATION NUMÉRIQUE POUR DES PROBLÈMES ELLIPTIQUES DU QUATRIÈME ORDRE (*)

par M. BERNADOU (1) et Y. DUCATEL (2)

Communiqué par P. G. Ciarlet

Résumé. — On étudie l'effet de l'intégration numérique dans l'approximation de problèmes elliptiques du quatrième ordre par des méthodes conformes d'éléments finis. On donne des conditions suffisantes qui préservent l'ordre de convergence de la méthode. Ces conditions prennent en compte l'approximation de la solution et le degré de précision du schéma d'intégration numérique. Cette analyse s'applique en particulier aux éléments d'Argyris et de Bell, i. e., aux triangles à 21 et 18 degrés de liberté, respectivement.

1. INTRODUCTION

L'approximation de problèmes elliptiques du quatrième ordre par des méthodes conformes d'éléments finis pour lesquelles la solution discrète est polynomiale sur chaque triangle nécessite l'utilisation d'éléments finis de haut degré. Suivant l'étude de Ženišek [1], l'élément le plus simple est le triangle de Bell [1], déduit du triangle d'Argyris [1] par suppression des dérivées normales aux milieux des côtés. Si, à ces bases polynomiales de haut degré, on ajoute la présence éventuelle de coefficients variables dans la définition des formes bilinéaire et linéaire, il est coûteux, ou tout simplement impossible, de calculer exactement les intégrales définissant ces formes. C'est pourquoi on est amené à utiliser des schémas d'intégration numérique.

L'objet de cet article est de justifier la convergence de ces méthodes d'approximation et de montrer qu'un choix convenable de schémas d'intégration numérique permet d'obtenir une estimation asymptotique de l'erreur du même ordre que celle obtenue dans le cas d'intégrations exactes. Pour ce faire, nous utilisons les méthodes de Ciarlet-Raviart [1, 2], reprises et complétées dans Ciarlet [1, 2].

Le problème continu est défini dans le paragraphe 2. Nous rassemblons dans le paragraphe 3 l'essentiel des notations et des résultats relatifs à l'approximation du problème étudié par une méthode conforme d'éléments finis avec

(*) Reçu août 1977.

(1) I.R.I.A.-Laboria, Domaine de Voluceau, Rocquencourt, B.P. n° 105, 78150 Le Chesnay.

(2) Faculté des Sciences, Université de Poitiers, 40, avenue du Recteur-Pineau, 86022 Poitiers.

intégration exacte. Nous rappelons, en particulier, la définition des éléments finis d'Argyris et de Bell. La prise en compte de l'intégration numérique fait l'objet du paragraphe 4. Moyennant une condition de V_h -ellipticité vérifiée pour des schémas d'intégration numérique convenables (th. 4.2), on obtient une estimation « abstraite » de l'erreur (th. 4.1). L'évaluation des termes de consistance (th. 4.3 et 4.4) conduit alors à une estimation asymptotique de l'erreur, dans le cas général (th. 4.5), puis dans les cas particuliers des éléments d'Argyris et de Bell (th. 4.6 et 4.7).

A notre connaissance, peu d'auteurs ont étudié l'effet de l'intégration numérique dans les méthodes d'éléments finis pour les problèmes elliptiques du quatrième ordre. Mentionnons cependant le travail de Mansfield [1] essentiellement orienté sur la prise en compte des frontières courbes.

Nous utilisons les notations suivantes :

$$\begin{aligned} \|D^l u(x)\| &= \sup_{|\xi_1| \leq 1, \dots, |\xi_l| \leq 1} |D^l u(x) \cdot (\xi_1, \dots, \xi_l)|, \\ |u|_{l, K} &= \left(\int_K \|D^l u(x)\|^2 dx \right)^{1/2}, \\ |u|_{l, \infty, K} &= \sup_{x \in K} \|D^l u(x)\|, \\ \|u\|_{m, K} &= \sum_{0 \leq l \leq m} \left(\int_K \|D^l u(x)\|^2 dx \right)^{1/2}, \\ \|u\|_{m, \infty, K} &= \sup_{0 \leq l \leq m} \left\{ \sup_{x \in K} \|D^l u(x)\| \right\}, \end{aligned}$$

en convenant que pour $l = 0$, $\|D^0 u(x)\| = |u(x)|$,

P_n désigne l'espace de tous les polynômes de degré inférieur ou égal à n par rapport à l'ensemble des variables x_1, x_2 ,

$\partial/\partial n$ désigne l'opérateur de dérivée normale extérieure unitaire.

2. LE PROBLÈME CONTINU

Soit Ω un ouvert borné de \mathbf{R}^2 . Nous considérons le problème suivant :

$$\left. \begin{aligned} \sum_{|j|=2} \partial^j \left(\sum_{|i|=2} a_{ij}(x) \partial^i u \right) &= f \quad \text{dans } \Omega, \\ u = \frac{\partial u}{\partial n} &= 0 \quad \text{sur } \Gamma = \partial\Omega, \end{aligned} \right\} \quad (2.1)$$

où i et j sont des multi-indices.

Posons

$$a(u, v) = \int_{\Omega} \sum_{|i|, |j|=2} a_{ij}(x) \partial^i u \partial^j v dx_1 dx_2, \quad (2.2)$$

$$f(v) = \int_{\Omega} f v dx_1 dx_2. \quad (2.3)$$

Nous supposons que les données f et a_{ij} appartiennent à l'espace $\mathcal{C}^0(\bar{\Omega})$ (régularité liée à l'utilisation de schémas d'intégration numérique) et que l'opérateur défini en (2.1) est uniformément elliptique (Necăs [1], p. 23) i. e. il existe une constante $\beta > 0$ telle que l'inégalité

$$\sum_{|i|, |j|=2} a_{ij}(x) \xi^i \xi^j \geq \beta |\xi|^4 \tag{2.4}$$

soit vérifiée partout sur l'ensemble $\bar{\Omega}$, pour tout $\xi = (\xi_1, \xi_2) \in \mathbb{R}^2$. Dès lors, la forme bilinéaire $a(\cdot, \cdot)$ définie en (2.2) est $H_0^2(\Omega)$ -elliptique et le problème (2.1) admet une solution unique u , i. e. :

$$\left. \begin{aligned} &\text{il existe } u \in H_0^2(\Omega), \text{ unique, telle que} \\ &a(u, v) = f(v), \text{ pour tout } v \in H_0^2(\Omega). \end{aligned} \right\} \tag{2.5}$$

Remarque : Un cas particulier intéressant de l'équation (2.1) est celui du problème de la plaque encadrée (cf. Ciarlet [1], n° 2). ■

3. MÉTHODES CONFORMES D'ÉLÉMENTS FINIS

Nous supposons désormais que le domaine Ω est *polygonaal* ce qui permet de le recouvrir *exactement* par des triangulations \mathcal{T}_h . Nous considérons une *famille régulière* de triangulations \mathcal{T}_h au sens suivant (cf. Ciarlet [1, 2]) :

$$(i) \quad \left. \begin{aligned} &\text{il existe une constante } \alpha \text{ telle que} \\ &\forall h, \quad \forall K \in \mathcal{T}_h, \quad \frac{h_K}{\rho_K} \leq \alpha, \end{aligned} \right\} \tag{3.1}$$

où $h_K = \text{diam}(K)$ et $\rho_K = \sup \{ \text{diam}(C); C \text{ est un disque contenu dans } K \}$;

$$(ii) \quad \text{la quantité } h = \max_{K \in \mathcal{T}_h} h_K \text{ tend vers zéro.} \tag{3.2}$$

A chaque triangulaire \mathcal{T}_h , on associe un espace d'éléments finis V_h dont les fonctions sont déterminées par les conditions suivantes :

$$\left. \begin{aligned} (i) &\text{ sur chaque } K \in \mathcal{T}_h, \text{ elles appartiennent à l'espace } P_K \subset H^2(K); \\ (ii) &\text{ sur chaque } K \in \mathcal{T}_h, \text{ elles sont déterminées par leurs valeurs} \\ &\text{ et par les valeurs de leurs dérivées sur l'ensemble des degrés de} \\ &\text{ liberté de l'élément } K; \\ (iii) &\text{ elles appartiennent à } \mathcal{C}^1(\bar{\Omega}); \\ (iv) &\text{ elles s'annulent ainsi que leur dérivée normale sur la fronti-} \\ &\text{ ère } \Gamma \text{ (ce dernier point prend en compte les conditions aux limites).} \end{aligned} \right\} \tag{3.3}$$

Il s'ensuit, d'après Ciarlet [1], th. 2, n° 3, que

$$V_h \subset H_0^2(\Omega), \tag{3.4}$$

d'où l'appellation de *méthode conforme* d'éléments finis.

Le problème discret associé au problème continu (2.5) et au sous-espace de dimension finie V_h de $H_0^2(\Omega)$, consiste à trouver une fonction $u_h \in V_h$ telle que

$$\forall v_h \in V_h, \quad a(u_h, v_h) = f(v_h). \quad (3.5)$$

L'inclusion (3.4) et les propriétés des formes $a(\cdot, \cdot)$ et $f(\cdot)$ assurent l'existence et l'unicité d'une solution u_h pour le problème discret (3.5).

Avant d'aborder le problème de l'estimation de l'erreur $\|u - u_h\|_{2, \Omega}$, rappelons deux exemples classiques d'éléments finis triangulaires satisfaisant les conditions (3.3). Ce sont les exemples d'éléments finis de plus bas degré (degré 5) assurant l'inclusion $V_h \subset \mathcal{C}^1(\bar{\Omega})$ et pour lesquels la solution discrète est un polynôme sur chaque triangle $K \in \mathcal{T}_h$ (cf. Ženišek [1]). Pour chaque triangle $K \in \mathcal{T}_h$, nous notons P_K l'espace fonctionnel et Σ_K l'ensemble des degrés de liberté de l'élément fini associé.

Exemple 3.1 : Élément fini d'Argyris (cf. Argyris-Scharpf [1]) :

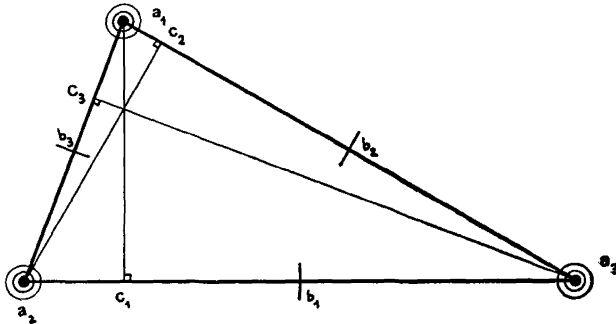


Figure 3.1.

Triangle d'Argyris, ou triangle à 21 degrés de liberté

$$P_K = P_5(K); \quad \dim P_K = 21;$$

$$\Sigma_K = \{ p(a_i), Dp(a_i)(a_{i-1} - a_i), Dp(a_i)(a_{i+1} - a_i), 1 \leq i \leq 3,$$

$$D^2 p(a_i)(a_{j+1} - a_{j-1})^2, 1 \leq i, j \leq 3, Dp(b_i)(a_i - c_i), 1 \leq i \leq 3 \}.$$

Dans l'expression de Σ_K les indices sont numérotés modulo 3.

Exemple 3.2 : Élément fini de Bell [1] (ou élément fini à 18 degrés de liberté).

Cet élément fini est déduit de l'élément d'Argyris par élimination des trois degrés de liberté $Dp(b_i)(a_i - c_i)$, $1 \leq i \leq 3$, conformément aux résultats de Ciarlet ([2], th. 2.2-12).

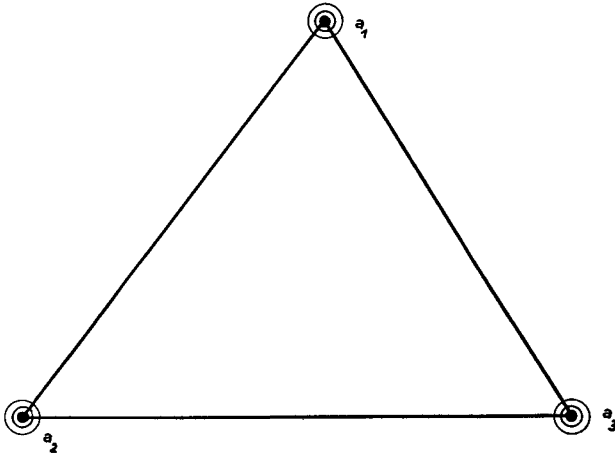


Figure 3.2.

Triangle de Bell, ou triangle à 18 degrés de liberté

$$P_K = P'_5(K) = \{ p \in P_5(K); \partial_\nu p \in P_3(K') \text{ pour chaque côté } K' \text{ de } K \};$$

$$\dim P_K = 18; P_4(K) \subset P_K \subset P_5(K);$$

$$\Sigma_K = \{ p(a_i), Dp(a_i)(a_{i-1} - a_i), Dp(a_i)(a_{i+1} - a_i), 1 \leq i \leq 3;$$

$$D^2 p(a_i)(a_{j+1} - a_{j-1})^2, 1 \leq i, j \leq 3 \}.$$

Pour résoudre le problème de l'estimation d'erreur, Ciarlet ([1], n° 6) utilise l'idée de *famille affine régulière* d'éléments finis. Cette appellation recouvre deux notions distinctes :

(i) *triangle de référence* \hat{K} : c'est un triangle donné, choisi de manière quelconque dans le plan \mathbf{R}^2 . Tout triangle $K \in \mathcal{T}_h$, supposé d'intérieur non vide, est l'image du triangle de référence \hat{K} par une application affine inversible F_K définie par

$$F_K : \hat{x} \in \hat{K} \mapsto F_K(\hat{x}) = B_K \hat{x} + b_K, \tag{3.6}$$

où B_K est une matrice carrée inversible d'ordre 2 et b_K un vecteur de \mathbf{R}^2 , et telle que

$$F_K(\hat{a}_i) = a_i, \quad i = 1, 2, 3. \tag{3.7}$$

Les points \hat{a}_i et a_i sont les sommets respectifs des triangles \hat{K} et K .

(ii) *élément fini de référence* $(\hat{K}, \hat{P}, \hat{\Sigma})$: ici aussi, tout triangle $K \in \mathcal{T}_h$ est associé à un triangle de référence \hat{K} par l'application affine inversible F_K définie en (3.6)-(3.7). Mais, en outre, la correspondance porte sur l'espace fonctionnel d'interpolation et sur les degrés de liberté utilisés, donc sur la notion d'élément fini.

Plus précisément, considérons des ensembles Σ de degrés de liberté constitués par des formes linéaires du type suivant :

$$\left. \begin{aligned} \varphi_i^0 &: p \mapsto p(a_i^0), \\ \varphi_{ik}^1 &: p \mapsto Dp(a_i^1) \xi_{ik}^1, \\ \varphi_{ikl}^2 &: p \mapsto D^2 p(a_i^2) (\xi_{ik}^2, \xi_{il}^2), \end{aligned} \right\} \quad (3.8)$$

où les points a_i^r , $r = 0, 1, 2$, appartiennent au triangle K et où les vecteurs ξ_{ik}^1 , ξ_{ik}^2 , ξ_{il}^2 sont construits ou bien à partir de la géométrie du triangle, ou bien à partir de vecteurs fixés de \mathbf{R}^2 . Alors :

DÉFINITION 3.1 : Deux éléments finis $(\hat{K}, \hat{P}, \hat{\Sigma})$ et (K, P, Σ) , avec des degrés de liberté de la forme (3.8) sont *affine-équivalents* s'il existe une application affine inversible F_K de type (3.6)-(3.7) telle que

$$\left. \begin{aligned} K &= F_K(\hat{K}), \\ a_i^r &= F_K(\hat{a}_i^r), \quad r = 0, 1, 2, \\ \xi_{ik}^1 &= B_K \hat{\xi}_{ik}^1, \quad \xi_{ik}^2 = B_K \hat{\xi}_{ik}^2, \quad \xi_{il}^2 = B_K \hat{\xi}_{il}^2, \end{aligned} \right\} \quad (3.9)$$

où les nœuds a_i^r (resp. \hat{a}_i^r) et les vecteurs ξ_{ik}^1 , ξ_{ik}^2 , ξ_{il}^2 (resp. $\hat{\xi}_{il}^1$, $\hat{\xi}_{ik}^2$, $\hat{\xi}_{il}^2$) proviennent de la définition des ensembles Σ (resp. $\hat{\Sigma}$), et où

$$P = \{p : K \mapsto \mathbf{R}; p = \hat{p} \circ F_K^{-1}, \hat{p} \in \hat{P}\}. \quad \blacksquare$$

DÉFINITION 3.2 : On dit que l'on a défini une *famille affine régulière* d'éléments finis si pour toute famille régulière de triangulations \mathcal{T}_h , il est possible de définir un élément fini (de référence) affine-équivalent à l'élément fini (K, P, Σ) associé à tout $K \in \mathcal{T}_h$. ■

On peut construire une famille régulière d'éléments finis du type Argyris ou du type Bell et, à chaque famille, on peut associer un triangle de référence \hat{K} . Par contre, il n'est pas possible de construire une famille affine régulière d'éléments finis du type Argyris ou du type Bell. En effet, dans l'ensemble des degrés de liberté de l'élément fini d'Argyris figurent les trois dérivées normales aux milieux des côtés et ces degrés de liberté ne sont pas invariants par transformation affine, d'où l'impossibilité de définir des éléments affine-équivalents. Il en va de même pour l'élément fini de Bell où les dérivées normales aux milieux des côtés apparaissent de façon implicite dans la définition de $P'_5(K)$.

Cette situation n'est cependant pas gênante dans la mesure où, si la notion de famille affine régulière est utilisée pour l'estimation du terme d'interpolation $|v - \pi_h v|_{m,\Omega}$ (Ciarlet [1], n° 6, th. 5), on sait adapter cette étude au cas de familles non affines construites à partir des éléments finis d'Argyris ou de Bell (Ciarlet [1], n° 13, th. 1). Par ailleurs nous verrons que la prise en compte de l'intégration numérique n'utilise que la notion de triangle de référence \hat{K} , à l'exclusion de la notion d'élément fini de référence $(\hat{K}, \hat{P}, \hat{\Sigma})$, et s'applique de la sorte indifféremment à des familles affines ou non affines, régulières d'éléments finis.

Nous terminons ce paragraphe en rappelant le résultat d'estimation de l'erreur dans le cas où on n'utilise pas de schémas d'intégration numérique i. e. pour le problème (3.5).

THÉORÈME 3.1 (Ciarlet [1], n°s 3 et 6) : *Soit une famille affine régulière d'éléments finis et V_h l'espace d'éléments finis associés vérifiant les conditions (3.3). Nous supposons en outre que*

$$\left. \begin{aligned} P_m(K) \subset P_K \quad \text{où } m \in \mathbb{N}, \quad m \geq 2, \\ H^{m+1}(K) \subset \mathcal{C}^s(K), \end{aligned} \right\} \quad (3.10)$$

où s est l'ordre maximal des dérivées partielles intervenant dans la définition de l'ensemble des degrés de liberté Σ_K .

Alors, si la solution u du problème (2.5) appartient à $H^{m+1}(\Omega)$, il existe une constante \hat{C} indépendante de h telle que

$$\|u - u_h\|_{2,\Omega} \leq \hat{C} h^{m-1} |u|_{m+1,\Omega}, \quad (3.11)$$

où u_h est la solution du problème discret (3.5). ■

THÉORÈME 3.2 : *Soit une famille régulière d'éléments finis du type Argyris (resp. du type Bell), et soit V_h l'espace d'éléments finis associé vérifiant les conditions (3.3).*

Alors, si la solution u du problème (2.5) appartient à $H^6(\Omega)$ [resp. $H^5(\Omega)$], il existe une constante \hat{C} indépendante de h telle que

$$\|u - u_h\|_{2,\Omega} \leq \hat{C} h^4 |u|_{6,\Omega} \quad (3.12)$$

$$\text{(resp. } \|u - u_h\|_{2,\Omega} \leq \hat{C} h^3 |u|_{5,\Omega}, \quad (3.13)$$

où u_h désigne la solution du problème discret (3.5).

Démonstration : La famille d'éléments finis est cette fois-ci non affine. Pour obtenir une approximation sur chaque triangle K , on procède en deux étapes (cf. Ciarlet [1], n° 13, th. 1). Par exemple, pour la famille d'éléments d'Argyris :

(i) on introduit la famille *affine régulière* des triangles d'Hermitte de type (5) à laquelle on applique le théorème 5, n° 6 de Ciarlet [1] :

$$|v - \Lambda_K v|_{2,K} \leq \hat{C} h^4 |v|_{6,K},$$

où v est une fonction quelconque de $H^6(K)$, où \hat{C} est une constante indépendante de K et de h et où Λ_K désigne l'opérateur de P_5 -interpolation correspondant au triangle d'Hermite de type (5);

(ii) on montre ensuite que

$$|\pi_K v - v_K v|_{2,K} \leq \hat{C} h^4 |v|_{6,K},$$

où π_K est l'opérateur de P_5 -interpolation correspondant au triangle d'Argyris.

Par suite $|v - \pi_K v| \leq \hat{C} h^4 |v|_{6,K}$, d'où l'on déduit l'estimation (3.12). Ce type de raisonnement ne s'applique pas directement à l'estimation (3.13). Cette estimation se démontre par analogie avec Ciarlet [3]. ■

4. PRISE EN COMPTE DE L'INTÉGRATION NUMÉRIQUE

Les méthodes conformes d'éléments finis pour les problèmes d'ordre 4 utilisent des polynômes de haut degré (5 pour les exemples 3.1 et 3.2). Il faut ajouter à cela la présence de coefficients variables dans la définition des formes $a(\cdot, \cdot)$ et $f(\cdot)$ [cf. (2.2)-(2.3)]. Tout ceci explique que les intégrales qui apparaissent dans l'équation (3.5) soient rarement calculées exactement et que l'on préfère utiliser des schémas d'intégration numérique, ce qui revient à résoudre un nouveau problème discret :

$$\left. \begin{aligned} \text{Trouver } u_h \in V_h \text{ tel que pour tout } v_h \in V_h : \\ a_h(u_h, v_h) = f_h(v_h), \end{aligned} \right\} \quad (4.1)$$

où $a_h(\cdot, \cdot)$ et $f_h(\cdot)$ sont des formes bilinéaire et linéaire approchées définies sur l'espace V_h , que nous explicitons en (4.14) et (4.15). Pour préparer l'obtention d'estimations explicites de l'erreur, nous donnons dans le théorème suivant une majoration « abstraite » de l'erreur.

THÉORÈME 4.1 : *Soit une famille de problèmes discrets (4.1) pour laquelle les formes bilinéaires $a_h(\cdot, \cdot)$ sont uniformément V_h -elliptiques, en ce sens qu'il existe une constante $\alpha > 0$ indépendante de h telle que*

$$\forall v_h \in V_h, \quad \alpha \|v_h\|_{2,\Omega}^2 \leq a_h(v_h, v_h). \quad (4.2)$$

Alors, il existe une constante C indépendante de h telle que

$$\left. \begin{aligned} \|u - u_h\|_{2,\Omega} \\ \leq C \left[\inf_{v_h \in V_h} \left\{ \|u - v_h\|_{2,\Omega} + \sup_{w_h \in V_h} \frac{|a(v_h, w_h) - a_h(v_h, w_h)|}{\|w_h\|_{2,\Omega}} \right\} \right. \\ \left. + \sup_{w_h \in V_h} \frac{|f(w_h) - f_h(w_h)|}{\|w_h\|_{2,\Omega}} \right]. \quad \blacksquare \end{aligned} \right\} \quad (4.3)$$

La démonstration de ce théorème est classique (cf. Ciarlet [1], n° 8, th. 1).

Remarque 4.1 : Au second membre de l'inégalité (4.3), on trouve tout d'abord le terme usuel de la théorie de l'interpolation, puis les deux termes qui évaluent la consistance des schémas d'approximation des formes bilinéaire $a(., .)$ et linéaire $f(.)$ respectivement. ■

Dans toute la suite de ce paragraphe, nous supposons vérifiées ou bien les hypothèses du théorème 3.1 relatives à une famille affine régulière d'éléments finis, ou bien les hypothèses du corollaire 3.1 relatives à une famille régulière d'éléments finis du type Argyris ou Bell. Les résultats qui suivent sont établis en utilisant la seule notion de triangle de référence, à l'exclusion de la notion d'élément fini de référence (cf. § 3). Ces résultats sont donc valables tant pour les familles affines régulières d'éléments finis que pour les familles régulières d'éléments finis d'Argyris ou de Bell.

Pour toutes ces familles (affines ou non affines) d'éléments finis, nous associons à l'espace fonctionnel P_K défini sur le triangle K et vérifiant :

$$P_m(K) \subset P_K \subset P_n(K), \quad m, n \in \mathbb{N}, \quad 2 \leq m \leq n, \quad (4.4)$$

l'espace fonctionnel \hat{P}_K défini sur le triangle de référence \hat{K} par

$$\hat{P}_K = \{ \hat{p}_K : K \rightarrow \mathbb{R}; \hat{p}_K = p_K \circ F_K, p_K \in P_K \}, \quad (4.5)$$

où F_K est l'application affine définie par les relations (3.6)-(3.7). Il s'ensuit que

$$P_m(\hat{K}) \subset \hat{P}_K \subset P_n(\hat{K}), \quad m, n \in \mathbb{N}, \quad 2 \leq m \leq n. \quad (4.6)$$

Bien entendu, dans les relations d'inclusion (4.4) et (4.6), les entiers m et n sont respectivement le plus grand entier et le plus petit entier pour lesquels chacune de ces inclusions est satisfaite.

Remarque 4.2 : Les inclusions (4.6) sont indépendantes du triangle $K \in \mathcal{T}_h$ considéré. ■

Pour obtenir une estimation explicite de l'erreur dans le cas où l'on utilise des schémas d'intégration numérique, nous vérifions dans le théorème 4.2 que l'hypothèse (4.2) est satisfaite pour des schémas convenables. Ensuite, dans les théorèmes 4.3 et 4.4, nous préparons l'évaluation des termes de consistance relatifs à l'approximation des formes bilinéaire $a(., .)$ et linéaire $f(.)$. Enfin, le théorème 4.5 donne l'estimation souhaitée.

Définissons les schémas d'intégration numérique utilisés en explicitant les formes $a_h(., .)$ et $f_h(.)$. Soit un schéma d'intégration numérique sur le triangle de référence \hat{K} :

$$\int_{\hat{K}} \hat{\phi}(\hat{x}) d\hat{x} \sim \sum_{q=1}^Q \hat{\omega}_q \hat{\phi}(\hat{b}_q), \quad (4.7)$$

où, pour $q = 1, \dots, Q$, les nombres $\hat{\omega}_q$ sont les poids et les points \hat{b}_q sont les nœuds du schéma d'intégration.

A la fonction φ définie sur K , nous associons la fonction $\hat{\varphi}_K$ définie sur le triangle \hat{K} par $\hat{\varphi}_K = \varphi \circ F_K$, et inversement $\varphi = \hat{\varphi}_K \circ F_K^{-1}$, en désignant par F_K l'application affine de \hat{K} sur K définie en (3.6)-(3.7).

En supposant $\det(B_K) > 0$, ce qui ne restreint pas la généralité, on obtient :

$$\int_K \varphi(x) dx = \det(B_K) \int_{\hat{K}} \hat{\varphi}_K(\hat{x}) d\hat{x}. \quad (4.8)$$

Ainsi, le schéma d'intégration numérique (4.7) sur le triangle de référence \hat{K} induit le schéma d'intégration numérique suivant sur le triangle K :

$$\int_K \varphi(x) dx \sim \sum_{q=1}^Q \omega_{q,K} \varphi(b_{q,K}), \quad (4.9)$$

avec

$$\omega_{q,K} = \det(B_K) \hat{\omega}_q \quad \text{et} \quad b_{q,K} = F_K(\hat{b}_q), \quad 1 \leq q \leq Q. \quad (4.10)$$

Parallèlement, nous définissons les fonctionnelles d'erreur

$$E_K(\varphi) = \int_K \varphi(x) dx - \sum_{q=1}^Q \omega_{q,K} \varphi(b_{q,K}), \quad (4.11)$$

$$\hat{E}(\hat{\varphi}) = \int_{\hat{K}} \hat{\varphi}(\hat{x}) d\hat{x} - \sum_{q=1}^Q \hat{\omega}_q \hat{\varphi}(\hat{b}_q), \quad (4.12)$$

de telle sorte que

$$E_K(\varphi) = \det(B_K) \hat{E}(\hat{\varphi}). \quad (4.13)$$

Les formes bilinéaire et linéaire approchées sont alors définies par

$$a_h(u_h, v_h) = \sum_{K \in \mathcal{T}_h} \sum_{q=1}^Q \omega_{q,K} \sum_{|i|, |j|=2} (a_{ij} \partial^i u_h \partial^j v_h)(b_{q,K}), \quad (4.14)$$

$$f_h(w_h) = \sum_{K \in \mathcal{T}_h} \sum_{q=1}^Q \omega_{q,K} (f v_h)(b_{q,K}). \quad (4.15)$$

Vérifions maintenant que l'hypothèse (4.2) de V_h -ellipticité uniforme est satisfaite pour des schémas d'intégration numérique convenables.

THÉORÈME 4.2 : *Nous faisons les hypothèses suivantes :*

(i) *l'espace P_K vérifie l'inclusion $P_K \subset P_n(K)$, $n \in \mathbb{N}$, $n \geq 2$, ce qui entraîne que l'espace associé \hat{P}_K défini en (4.5) vérifie l'inclusion $\hat{P}_K \subset P_n(\hat{K})$, ceci pour tout $K \in \mathcal{T}_h$;*

(ii) *le schéma d'intégration numérique donné sur le triangle de référence \hat{K} par*

$$\int_{\hat{K}} \hat{\varphi}(\hat{x}) d\hat{x} \sim \sum_{q=1}^Q \hat{\omega}_q \hat{\varphi}(\hat{b}_q) \quad \text{avec} \quad \hat{\omega}_q > 0, \quad 1 \leq q \leq Q,$$

est tel que la réunion $\bigcup_{q=1}^Q \{ \hat{b}_q \}$ contienne un sous-ensemble $P_{n-2}(\hat{K})$ -unisolvant ou/et le schéma d'intégration numérique soit exact sur l'espace $P_{2n-4}(\hat{K})$.

Alors, il existe une constante $\alpha > 0$, indépendante de h , telle que pour toutes les formes bilinéaires approchées du type (4.14) et pour tous les espaces V_h on ait

$$\forall v_h \in V_h, \quad \alpha \|v_h\|_{2,\Omega}^2 \leq a_h(v_h, v_h). \tag{4.16}$$

Démonstration (en 4 étapes) :

Étape 1 : Supposons tout d'abord que la réunion $\bigcup_{q=1}^Q \{ \hat{b}_q \}$ contienne un sous-ensemble $P_{n-2}(\hat{K})$ -unisolvant. En utilisant la stricte positivité des poids $\hat{\omega}_q$ il vient :

$$\hat{p} \in P_n(\hat{K}) \text{ et } \sum_{q=1}^Q \hat{\omega}_q \sum_{|i|=2} (\partial^i \hat{p}(\hat{b}_q))^2 = 0 \Rightarrow \partial^i \hat{p}(\hat{b}_q) = 0 \quad \text{pour } 1 \leq q \leq Q.$$

Pour chaque multi-indice i tel que $|i| = 2$, la fonction $\partial^i \hat{p}$ est dans l'espace $P_{n-2}(\hat{K})$ grâce à l'hypothèse (i) et, comme elle s'annule sur un sous-ensemble $P_{n-2}(\hat{K})$ -unisolvant [hypothèse (ii)], elle est identiquement nulle.

Par suite, l'application

$$\hat{p} \rightarrow \left(\sum_{q=1}^Q \hat{\omega}_q \sum_{|i|=2} (\partial^i \hat{p}(\hat{b}_q))^2 \right)^{1/2}$$

définit une norme sur l'espace-quotient $P_n(\hat{K})/P_1(\hat{K})$. Étant donné que l'application $\hat{p} \rightarrow |\hat{p}|_{2,K}$ est aussi une norme sur cet espace (cf. Ciarlet [1], th. 1, n° 6) et étant donné que cet espace est de dimension finie, il existe une constante $\hat{C} > 0$ telle que

$$\forall \hat{p} \in P_n(\hat{K}), \quad \hat{C} |\hat{p}|_{2,\hat{K}} \leq \sum_{q=1}^Q \hat{\omega}_q \sum_{|i|=2} (\partial^i \hat{p}(\hat{b}_q))^2. \tag{4.17}$$

Si l'on suppose que le schéma d'intégration numérique est exact pour l'espace $P_{2n-4}(\hat{K})$, l'inégalité ci-dessus devient une égalité avec $\hat{C} = 1$. En effet, la fonction $\sum_{|i|=2} (\partial^i \hat{p}(\hat{b}_q))^2$ appartient à l'espace $P_{2n-4}(\hat{K})$ pour tout

$\hat{p} \in P_n(\hat{K})$ et l'expression $\sum_{q=1}^Q \hat{\omega}_q \sum_{|i|=2} (\partial^i \hat{p}(\hat{b}_q))^2$ est alors la formule d'intégration exacte de l'intégrale

$$\int_{\hat{K}} \sum_{|i|=2} (\partial^i \hat{p}(\hat{b}_q))^2 d\hat{x} = |\hat{p}|_{2,\hat{K}}^2.$$

Étape 2 : Considérons maintenant pour un triangle K donné $\in \mathcal{T}_h$ l'approximation de l'intégrale

$$\int_K \sum_{|i|, |j|=2} a_{ij} \partial^i u \partial^j v dx.$$

Pour une fonction arbitraire $v_h \in V_h$, nous posons $v_h|_K = p_K$. Soit $\hat{p}_K \in \hat{P}_K$ la fonction associée à p_K par $\hat{p}_K = p_K \circ F_K$ [cf. (4.5)]. Il est loisible de supposer $\det(B_K) > 0$ ce qui entraîne, avec l'hypothèse $\hat{\omega}_q > 0$ et l'égalité (4.10), que l'on a $\omega_{q,K} > 0$.

Alors l'hypothèse d'ellipticité (2.4) implique

$$\begin{aligned} & \sum_{q=1}^Q \omega_{q,K} \sum_{|i|, |j|=2} (a_{ij} \partial^i p_K \partial^j p_K)(b_{q,K}) \\ & \geq \beta \sum_{q=1}^Q \omega_{q,K} \sum_{|i|=2} (\partial^i p_K(b_{q,K}))^2. \end{aligned} \quad (4.18)$$

Mais

$$\partial_{kl} \hat{p}_K(\hat{x}) = D^2 \hat{p}_K(\hat{x}) \cdot (\vec{e}_k, \vec{e}_l), \quad 1 \leq k, l \leq 2,$$

ou encore, puisque $\hat{p}_K = p_K \circ F_K$, et en utilisant les règles de dérivation d'un produit :

$$\begin{aligned} & D^2 \hat{p}_K(\hat{x}) \cdot (\vec{e}_k, \vec{e}_l) \\ & = D p_K(x) \cdot (D^2 F_K(\hat{x}) \cdot (\vec{e}_k, \vec{e}_l)) + D^2 p_K(x) \cdot (DF_K(\hat{x}) \cdot \vec{e}_k, DF_K(\hat{x}) \cdot \vec{e}_l). \end{aligned}$$

Comme F_K est affine, il vient avec (3.6) :

$$D^2 \hat{p}_K(\hat{x}) \cdot (\vec{e}_k, \vec{e}_l) = D^2 p_K(x) \cdot (B_K \vec{e}_k, B_K \vec{e}_l).$$

En interprétant $D^2 p_K(x)$ comme la matrice

$$\begin{pmatrix} \partial_{11} p_K(x) & \partial_{12} p_K(x) \\ \partial_{21} p_K(x) & \partial_{22} p_K(x) \end{pmatrix},$$

il vient la majoration

$$(\partial_{kl} \hat{p}_K(\hat{x}))^2 \leq \|B_K\|^4 \sum_{1 \leq k, l \leq 2} (\partial_{kl} p_K(x))^2,$$

où $\|\cdot\|$ désigne la norme matricielle euclidienne.

D'où

$$\sum_{1 \leq k, l \leq 2} (\partial_{kl} \hat{p}_K(\hat{x}))^2 \leq 4 \|B_K\|^4 \sum_{1 \leq k, l \leq 2} (\partial_{kl} p_K(x))^2.$$

En reportant ces inégalités dans (4.18), il vient avec (4.10) :

$$\begin{aligned} & \sum_{q=1}^Q \omega_{q,K} \sum_{|i|,|j|=2} (a_{ij} \partial^i p_K \partial^j p_K)(b_{q,K}) \\ & \geq \hat{C} \det(B_K) \|B_K\|^{-4} \sum_{q=1}^Q \hat{\omega}_q \sum_{|i|=2} (\partial^i \hat{p}_K(\hat{b}_q))^2 \\ & \geq \hat{C} \det(B_K) \|B_K\|^{-4} |\hat{p}_K|_{2,\hat{K}}^2, \quad \text{grâce aux inégalités (4.17),} \\ & \geq \hat{C} \|B_K\|^{-4} \|B_K^{-1}\|^{-4} |p_K|_{2,K}^2, \end{aligned}$$

où \hat{C} est ici, et par la suite, une constante indépendante du triangle $K \in \mathcal{T}_h$ et de h . Pour cette dernière inégalité, nous avons utilisé le théorème 3 de Ciarlet [1], n° 6, i. e. :

$$|\hat{p}_K|_{2,\hat{K}} \geq \hat{C} \|B_K^{-1}\|^{-2} (\det(B_K))^{-1/2} |p_K|_{2,K}.$$

En outre, le théorème 4 de Ciarlet [1], n° 6 entraîne

$$\|B_K\| \cdot \|B_K^{-1}\| \leq \frac{\hat{h}}{\hat{\rho}} \frac{h_K}{\rho_K},$$

soit, avec l'hypothèse (3.1) de régularité de la famille de triangulations,

$$\|B_K\| \cdot \|B_K^{-1}\| \leq \hat{C}.$$

En définitive, il existe une constante $\alpha > 0$, indépendante de K et de h , telle que pour tout $p_K \in P_K$ on ait

$$\sum_{q=1}^Q \omega_{q,K} \sum_{|i|,|j|=2} (a_{ij} \partial^i p_K \partial^j p_K)(b_{q,K}) \geq \alpha |p_K|_{2,K}^2. \quad (4.19)$$

Étape 3 : En utilisant les inégalités (4.19) pour tous les triangles $K \in \mathcal{T}_h$ et en observant que $v_h|_K = p_K$, nous obtenons

$$\begin{aligned} \forall v_h \in V_h, \quad a_h(v_h, v_h) &= \sum_{K \in \mathcal{T}_h} \sum_{q=1}^Q \omega_{q,K} \sum_{|i|,|j|=2} (a_{ij} \partial^i v_h \partial^j v_h)(b_{q,K}) \\ &\geq \alpha \sum_{K \in \mathcal{T}_h} |v_h|_{2,K}^2 = \alpha |v_h|_{2,\Omega}^2. \end{aligned}$$

Étape 4 : La prise en compte des conditions aux limites de type Dirichlet, entraîne l'équivalence des normes $|\cdot|_{2,\Omega}$ et $\|\cdot\|_{2,\Omega}$ sur $H_0^2(\Omega)$ (inégalité de Poincaré), d'où :

$$\forall v_h \in V_h, \quad a_h(v_h, v_h) \geq \alpha \|v_h\|_{2,\Omega}^2,$$

où α désigne une nouvelle constante indépendante de h . ■

Remarque 4.3 : Au cours de la démonstration, nous avons utilisé successivement les théorèmes 1, 3 et 4 de Ciarlet [1], n° 6. Observons que les démonstrations de ces théorèmes n'utilisent que la notion de *triangle de référence* à l'exclusion de la notion d'élément fini de référence. ■

La V_h -ellipticité uniforme de la forme bilinéaire approchée $a_h(\cdot, \cdot)$ étant établie, nous préparons, avec les deux théorèmes suivants, l'évaluation des termes de consistance de l'inégalité (4.3).

THÉORÈME 4.3 : *Supposons que l'espace P_K vérifie les inclusions*

$$P_m(K) \subset P_K \subset P_n(K), \quad m, n \in \mathbb{N}, \quad 2 \leq m \leq n,$$

ce qui entraîne que l'espace \hat{P}_K associé, défini en (4.5), vérifie les inclusions (4.6) pour tout $K \in \mathcal{T}_h$. Supposons en outre que

$$\left. \begin{aligned} \hat{\omega}_q > 0, \quad 1 \leq q \leq Q, \\ \forall \hat{\phi} \in P_{m+n-4}(\hat{K}), \quad \hat{E}(\hat{\phi}) = 0. \end{aligned} \right\} \quad (4.20)$$

Alors, il existe une constante \hat{C} indépendante de $K \in \mathcal{T}_h$ et de h telle que

$$\left. \begin{aligned} \forall a \in W^{m-1, \infty}(K), \quad \forall p \in P_K, \quad \forall p' \in P_K, \quad \forall i, j \in \mathbb{N}^2, \\ |i| = |j| = 2, \\ |E_K(a \partial^i p' \partial^j p)| \leq \hat{C} h_K^{m-1} \|a\|_{m-1, \infty, K} \|p'\|_{m+1, K} |p|_{2, K}. \end{aligned} \right\} \quad (4.21)$$

Démonstration (en 3 étapes) :

Étape 1 : Première estimation sur le triangle de référence.

Compte tenu des inclusions (4.4), nous allons chercher une estimation d'erreur pour $E_K(aww)$ avec

$$a \in W^{m-1, \infty}(K), \quad v \in P_{n-2}(K), \quad w \in P_{n-2}(K).$$

A partir de (4.13), il vient :

$$E_K(aww) = \det(B_K) \hat{E}(\hat{a}\hat{v}\hat{w}), \quad (4.22)$$

avec $\hat{a} \in W^{m-1, \infty}(\hat{K})$, $\hat{v} \in P_{n-2}(\hat{K})$, $\hat{w} \in P_{n-2}(\hat{K})$.

Pour un $\hat{w} \in P_{n-2}(\hat{K})$ et tout $\hat{\phi} \in W^{m-1, \infty}(\hat{K})$, nous avons puisque $m \geq 2$ entraîne $W^{m-1, \infty}(\hat{K}) \subset \mathcal{C}^0(\hat{K})$:

$$\begin{aligned} |\hat{E}(\hat{\phi}\hat{w})| &= \left| \int_{\hat{K}} \hat{\phi}\hat{w} d\hat{x} - \sum_{q=1}^Q \hat{\omega}_q(\hat{\phi}\hat{w})(\hat{b}_q) \right| \\ &\leq \hat{C} |\hat{\phi}\hat{w}|_{0, \infty, \hat{K}} \leq \hat{C} |\hat{\phi}|_{0, \infty, \hat{K}} |\hat{w}|_{0, \infty, \hat{K}}, \end{aligned}$$

en désignant par \hat{C} des constantes successives qui ne dépendent que du triangle de référence. Étant donné que $|\hat{\phi}|_{0, \infty, \hat{K}} \leq \|\hat{\phi}\|_{m-1, \infty, \hat{K}}$ et comme toutes les normes sont équivalentes sur l'espace de dimension finie $P_{n-2}(\hat{K})$, on en déduit :

$$|\hat{E}(\hat{\phi}\hat{w})| \leq \hat{C} \|\hat{\phi}\|_{m-1, \infty, \hat{K}} \|\hat{w}\|_{0, \hat{K}}.$$

Ainsi, pour un $\hat{w} \in P_{n-2}(\hat{K})$ donné, la forme linéaire

$$\hat{\phi} \in W^{m-1, \infty}(\hat{K}) \rightarrow \hat{E}(\hat{\phi}\hat{w})$$

est continue avec une norme $\leq \hat{C} \|\hat{w}\|_{0, \hat{K}}$ et elle s'annule sur l'espace $P_{m-2}(\hat{K})$, grâce à l'hypothèse (4.20). Par suite, en utilisant le lemme de Bramble-Hilbert (cf. Ciarlet [1], n° 8, th. 3), il existe une constante \hat{C} telle que

$$\forall \hat{\phi} \in W^{m-1, \infty}(\hat{K}), \quad \forall \hat{w} \in P_{n-2}(\hat{K}), \quad |\hat{E}(\hat{\phi}\hat{w})| \leq \hat{C} |\hat{\phi}|_{m-1, \infty, \hat{K}} |\hat{w}|_{0, \hat{K}}.$$

Étape 2 : Deuxième estimation sur le triangle de référence.

Soit maintenant $\hat{\phi} = \hat{a}\hat{v}$ avec $\hat{a} \in W^{m-1, \infty}(\hat{K})$ et $\hat{v} \in P_{n-2}(\hat{K})$. Alors, $\hat{\phi} \in W^{m-1, \infty}(\hat{K})$. En appliquant la formule de Leibnitz, il vient :

$$\begin{aligned} |\hat{\phi}|_{m-1, \infty, \hat{K}} &= |\hat{a}\hat{v}|_{m-1, \infty, \hat{K}} \\ &\leq \hat{C} \sum_{k=0}^{m-1} |\hat{a}|_{m-1-k, \infty, \hat{K}} |\hat{v}|_{k, \infty, \hat{K}} \\ &\leq \hat{C} \sum_{k=0}^{m-1} |\hat{a}|_{m-1-k, \infty, \hat{K}} |\hat{v}|_{k, \hat{K}}, \end{aligned}$$

où, dans la dernière inégalité, nous avons utilisé l'équivalence des normes sur l'espace de dimension finie $P_{n-2}(\hat{K})$. Par suite, nous obtenons

$$\left. \begin{aligned} &\forall \hat{a} \in W^{m-1, \infty}(\hat{K}), \quad \forall \hat{v} \in P_{n-2}(\hat{K}), \quad \forall \hat{w} \in P_{n-2}(\hat{K}), \\ &|\hat{E}(\hat{a}\hat{v}\hat{w})| \leq \hat{C} \left(\sum_{k=0}^{m-1} |\hat{a}|_{m-1-k, \infty, \hat{K}} |\hat{v}|_{k, \hat{K}} \right) |\hat{w}|_{0, \hat{K}}. \end{aligned} \right\} \quad (4.23)$$

Étape 3 : Estimation d'erreur sur le triangle K.

De l'estimation d'erreur (4.23) sur le triangle de référence \hat{K} , nous allons déduire l'estimation d'erreur sur le triangle K en utilisant les inégalités suivantes (cf. Ciarlet [1], n° 6, th. 3 et 4) :

$$\begin{aligned} |\hat{a}|_{m-1-k, \infty, \hat{K}} &\leq \hat{C} h_K^{m-1-k} |a|_{m-1-k, \infty, K}, \quad 0 \leq k \leq m-1, \\ |\hat{v}|_{k, \hat{K}} &\leq \hat{C} h_K^k (\det(B_K))^{-1/2} |v|_{k, K}, \quad 0 \leq k \leq m-1, \\ |\hat{w}|_{0, \hat{K}} &\leq \hat{C} (\det(B_K))^{-1/2} |w|_{0, K}. \end{aligned}$$

En combinant ces inégalités avec les relations (4.22) et (4.23), il vient :

$$\left. \begin{aligned} & \forall a \in W^{m-1, \infty}(K), \quad \forall v \in P_{n-2}(K), \quad \forall w \in P_{n-2}(K), \\ & \text{il existe une constante } \hat{C} \text{ indépendante de } K \in \mathcal{T}_h \text{ et de } h \text{ telle que} \\ & |E_K(avw)| \leq \hat{C} h_K^{m-1} \left(\sum_{k=0}^{m-1} |a|_{m-1-k, \infty, K} |v|_{k, K} \right) |w|_{0, K} \\ & \leq \hat{C} h_K^{m-1} \|a\|_{m-1, \infty, K} \|v\|_{m-1, K} |w|_{0, K}. \end{aligned} \right\} \quad (4.24)$$

On obtient alors l'estimation (4.21) en remplaçant v par $\partial^i p'$ et w par $\partial^j p$ dans l'inégalité ci-dessus. ■

Remarque 4.4 : La remarque 4.3 reste valable pour la démonstration du théorème 4.3. ■

THÉORÈME 4.4 : *Supposons que l'espace P_K vérifie les inclusions (4.4) ce qui entraîne que l'espace \hat{P}_K associé, défini en (4.5), vérifie les inclusions (4.6) pour tout $K \in \mathcal{T}_h$. Soit m un nombre entier ≥ 2 et q un nombre réel quelconque vérifiant l'inégalité*

$$q > 2/(m-1) \quad (4.25).$$

Supposons en outre que

$$\left. \begin{aligned} & \hat{\omega}_q > 0, \quad 1 \leq q \leq Q, \\ & \forall \hat{\phi} \in P_{m+n-4}(\hat{K}), \quad \hat{E}(\hat{\phi}) = 0. \end{aligned} \right\} \quad (4.26)$$

Alors, il existe une constante \hat{C} indépendante de $K \in \mathcal{T}_h$ et de h telle que

$$\left. \begin{aligned} & \forall f \in W^{m-1, q}(K), \quad \forall p \in P_K, \\ & |E_K(fp)| \leq \hat{C} h_K^{m-1} (\text{mes}(K))^{1/2-1/q} \|f\|_{m-1, q, K} \|p\|_{2, K}. \end{aligned} \right\} \quad (4.27)$$

Démonstration (en 3 étapes) :

Pour tout $f \in W^{m-1, q}(K)$ et tout $p \in P_K$, nous avons grâce à (4.13) :

$$E_K(fp) = \det(B_K) \hat{E}(\hat{f}_K \hat{p}_K), \quad (4.28)$$

avec $\hat{f}_K \in W^{m-1, q}(\hat{K})$, $\hat{p}_K \in \hat{P}_K \subset P_n(\hat{K})$. Mais, on a aussi

$$\hat{E}(\hat{f}_K \hat{p}_K) = \hat{E}(\hat{f}_K \hat{\pi} \hat{p}_K) + \hat{E}(\hat{f}_K [\hat{p}_K - \hat{\pi} \hat{p}_K]), \quad (4.29)$$

où $\hat{\pi}$ désigne l'opérateur de projection orthogonale de $L^2(\hat{K})$ sur le sous-espace $P_2(\hat{K})$.

Étape 1 : Estimation de $\hat{E}(\hat{f}_K \hat{\pi} \hat{p}_K)$.

Pour tout $\hat{\psi} \in W^{m-1, q}(\hat{K})$, nous avons

$$|\hat{E}(\hat{\psi})| \leq \hat{C} |\hat{\psi}|_{0, \infty, \hat{K}} \leq \hat{C} \|\hat{\psi}\|_{m-1, q, \hat{K}},$$

puisque l'inégalité (4.25) entraîne $m-1-(2/q) > 0$, soit $W^{m-1,q}(\hat{K}) \subset \mathcal{C}^0(\hat{K})$. L'hypothèse (4.26) entraîne, en particulier, que $\hat{E}(\hat{\psi}) = 0$ pour tout $\hat{\psi} \in P_{m-2}(\hat{K})$, d'où avec le lemme de Bramble-Hilbert (cf. Ciarlet [1], n° 8, th. 3) :

$$\forall \hat{\psi} \in W^{m-1,q}(\hat{K}), \quad |\hat{E}(\hat{\psi})| \leq \hat{C} |\hat{\psi}|_{m-1,q,\hat{K}}.$$

Soit maintenant $\hat{\psi} = \hat{f} \hat{\pi} \hat{p}$ avec $\hat{f} \in W^{m-1,q}(\hat{K})$, $\hat{p} \in P_n(\hat{K})$. En utilisant la formule de Leibnitz et en remarquant que toutes les semi-normes $|\hat{\pi} \hat{p}|_{l,\infty,\hat{K}}$ sont nulles pour $l \geq 3$ ($\hat{\pi} \hat{p} \in P_2(\hat{K})$), on obtient :

$$|\hat{f} \hat{\pi} \hat{p}|_{m-1,q,\hat{K}} \leq \hat{C} \sum_{k=0}^2 |\hat{f}|_{m-1-k,q,\hat{K}} |\hat{\pi} \hat{p}|_{k,\infty,\hat{K}},$$

ou encore, en utilisant l'équivalence des normes sur l'espace de dimension finie $P_2(\hat{K})$:

$$|\hat{f} \hat{\pi} \hat{p}|_{m-1,q,\hat{K}} \leq \hat{C} \sum_{k=0}^2 |\hat{f}|_{m-1-k,q,\hat{K}} |\hat{\pi} \hat{p}|_{k,\hat{K}}.$$

Comme $\hat{\pi}$ est un opérateur de projection en norme $|\cdot|_{0,\hat{K}}$, nous avons

$$|\hat{\pi} \hat{p}|_{0,\hat{K}} \leq |\hat{p}|_{0,\hat{K}}.$$

D'autre part

$$|\hat{\pi} \hat{p}|_{1,\hat{K}} \leq |\hat{p} - \hat{\pi} \hat{p}|_{1,\hat{K}} + |\hat{p}|_{1,\hat{K}}.$$

L'opérateur $\hat{\pi}$ laissant invariant l'espace $P_0(\hat{K})$, il existe une constante \hat{C} telle que (Ciarlet [1], th. 2, n° 6) :

$$|\hat{p} - \hat{\pi} \hat{p}|_{1,\hat{K}} \leq \hat{C} |\hat{p}|_{1,\hat{K}},$$

d'où

$$|\hat{\pi} \hat{p}|_{1,\hat{K}} \leq \hat{C} |\hat{p}|_{1,\hat{K}}.$$

Un raisonnement analogue permet d'établir l'inégalité

$$|\hat{\pi} \hat{p}|_{2,\hat{K}} \leq \hat{C} |\hat{p}|_{2,\hat{K}}.$$

En combinant alors les inégalités précédentes, on déduit l'existence d'une constante \hat{C} telle que

$$\forall \hat{f} \in W^{m-1,q}(\hat{K}), \quad \forall \hat{p} \in P_n(\hat{K}), \quad |\hat{E}(\hat{f} \hat{\pi} \hat{p})| \leq \hat{C} \sum_{k=0}^2 |\hat{f}|_{m-1-k,q,\hat{K}} |\hat{p}|_{k,\hat{K}}.$$

En particulier, pour $\hat{f} = \hat{f}_K \in W^{m-1,q}(\hat{K})$ et $\hat{p} = \hat{p}_K \in \hat{P}_K \subset P_n(\hat{K})$, on obtient :

$$|\hat{E}(\hat{f}_K \hat{\pi} \hat{p}_K)| \leq \hat{C} \sum_{k=0}^2 |\hat{f}_K|_{m-1-k,q,\hat{K}} |\hat{p}_K|_{k,\hat{K}}. \tag{4.30}$$

Étape 2 : Estimation de $\hat{E}(\hat{f}_K(\hat{p}_K - \hat{\pi}\hat{p}_K))$.

Si $m \geq 4$, il existe un nombre réel $s \in [1, +\infty[$ tel que les propriétés d'injection continue suivantes soient vérifiées :

$$W^{m-1,q}(\hat{K}) \hookrightarrow W^{m-3,s}(\hat{K}) \hookrightarrow \mathcal{C}^0(\hat{K}).$$

En effet, avec le théorème de Sobolev, on a, dès que $q \geq 1$:

$$W^{2,q}(\hat{K}) \hookrightarrow L^s(\hat{K}), \quad \forall s \in [1, +\infty[,$$

d'où

$$W^{m-1,q}(\hat{K}) \hookrightarrow W^{m-3,s}(\hat{K}).$$

Il suffit ensuite de choisir s tel que $(1/q) - (1/s) = 1$ pour que

$$W^{m-3,s}(\hat{K}) \hookrightarrow \mathcal{C}^0(\hat{K}),$$

ce qui est loisible d'après l'inégalité (4.25).

Par un raisonnement analogue à celui de l'étape 1, nous trouvons que

$$\begin{aligned} \forall \hat{f} \in W^{m-3,s}(\hat{K}) \hookrightarrow \mathcal{C}^0(\hat{K}), \quad \forall \hat{p} \in P_n(\hat{K}), \\ |\hat{E}[\hat{f}(\hat{p} - \hat{\pi}\hat{p})]| &\leq \hat{C} |\hat{f}(\hat{p} - \hat{\pi}\hat{p})|_{0,\infty,\hat{K}} \\ &\leq \hat{C} |\hat{f}|_{0,\infty,\hat{K}} |\hat{p} - \hat{\pi}\hat{p}|_{0,\infty,\hat{K}} \\ &\leq \hat{C} \|\hat{f}\|_{m-3,s,\hat{K}} |\hat{p} - \hat{\pi}\hat{p}|_{0,\infty,\hat{K}}. \end{aligned}$$

Ainsi, pour une fonction $\hat{p} \in P_n(\hat{K})$ donnée, la forme linéaire

$$\hat{f} \in W^{m-3,s}(\hat{K}) \mapsto \hat{E}(\hat{f}[\hat{p} - \hat{\pi}\hat{p}])$$

est continue, avec une norme $\leq \hat{C} |\hat{p} - \hat{\pi}\hat{p}|_{0,\infty,\hat{K}}$ et elle s'annule sur l'espace $P_{m-4}(\hat{K})$ grâce à l'hypothèse (4.26). Une nouvelle application du lemme de Bramble-Hilbert montre que

$$\begin{aligned} \forall \hat{f} \in W^{m-3,s}(\hat{K}), \quad \forall \hat{p} \in P_n(\hat{K}), \\ |\hat{E}(\hat{f}[\hat{p} - \hat{\pi}\hat{p}])| &\leq \hat{C} |\hat{f}|_{m-3,s,\hat{K}} |\hat{p} - \hat{\pi}\hat{p}|_{0,\hat{K}}. \end{aligned}$$

Comme l'opérateur $\hat{\pi}$ laisse invariant l'espace $P_1(\hat{K})$, on aura (cf. Ciarlet [1], n° 6, th. 2) :

$$|\hat{p} - \hat{\pi}\hat{p}|_{0,\hat{K}} \leq \hat{C} |\hat{p}|_{2,\hat{K}}.$$

Par ailleurs, l'inclusion $W^{2,q}(\hat{K}) \hookrightarrow L^s(\hat{K})$ entraîne

$$\forall \hat{g} \in W^{2,q}(\hat{K}), \quad |\hat{g}|_{0,s,\hat{K}} \leq \hat{C} (|\hat{g}|_{0,q,\hat{K}} + |\hat{g}|_{1,q,\hat{K}} + |\hat{g}|_{2,q,\hat{K}})$$

et ainsi, comme $W^{m-1,q}(\hat{K}) \subset W^{m-3,s}(\hat{K})$:

$$\forall \hat{f} \in W^{m-1,q}(\hat{K}), \quad |\hat{f}|_{m-3,s,\hat{K}} \leq \hat{C} (|\hat{f}|_{m-3,q,\hat{K}} + |\hat{f}|_{m-2,q,\hat{K}} + |\hat{f}|_{m-1,q,\hat{K}}).$$

En combinant toutes les inégalités précédentes, nous obtenons :

$$\forall \hat{f} \in W^{m-1,q}(\hat{K}), \quad \forall \hat{p} \in P_n(\hat{K}),$$

$$|\hat{E}(\hat{f}[\hat{p} - \hat{\pi}\hat{p}])| \leq \hat{C} (|\hat{f}|_{m-3,q,\hat{K}} + |\hat{f}|_{m-2,q,\hat{K}} + |\hat{f}|_{m-1,q,\hat{K}}) |\hat{p}|_{2,\hat{K}}.$$

D'où, en particulier, pour $\hat{f} = \hat{f}_K \in W^{m-1,q}(\hat{K})$ et $\hat{p} = \hat{p}_K \in \hat{P}_K \subset P_n(\hat{K})$:

$$|\hat{E}(\hat{f}_K[\hat{p}_K - \hat{\pi}\hat{p}_K])|$$

$$\leq \hat{C} (|\hat{f}_K|_{m-3,q,\hat{K}} + |\hat{f}_K|_{m-2,q,\hat{K}} + |\hat{f}_K|_{m-1,q,\hat{K}}) |\hat{p}_K|_{2,\hat{K}}. \quad (4.31)$$

Si $m = 3$, l'hypothèse (4.25) entraîne $W^{m-1,q}(\hat{K}) \subset \mathcal{C}^0(\hat{K})$, d'où

$$\forall \hat{f} \in W^{m-1,q}(\hat{K}), \quad \forall \hat{p} \in P_n(\hat{K}),$$

$$|\hat{E}(\hat{f}[\hat{p} - \hat{\pi}\hat{p}])| \leq \hat{C} |\hat{f}|_{0,\infty,\hat{K}} |\hat{p} - \hat{\pi}\hat{p}|_{0,\infty,\hat{K}},$$

ou encore, par analogie avec ce qui précède,

$$|\hat{E}(\hat{f}[\hat{p} - \hat{\pi}\hat{p}])| \leq \hat{C} \|\hat{f}\|_{2,q,\hat{K}} |\hat{p}|_{2,\hat{K}}.$$

En particulier, pour $\hat{f} = \hat{f}_K \in W^{m-1,q}(\hat{K})$ et $\hat{p} = \hat{p}_K \in \hat{P}_K \subset P_n(\hat{K})$, on obtient :

$$|\hat{E}(\hat{f}_K[\hat{p}_K - \hat{\pi}\hat{p}_K])| \leq \hat{C} \|\hat{f}_K\|_{2,q,\hat{K}} |\hat{p}_K|_{2,\hat{K}},$$

ce qui n'est autre que l'inégalité (4.31) dans le cas $m = 3$.

Si $m = 2$, alors $P_2(\hat{K}) \subset \hat{P}_K \subset P_n(\hat{K})$, $n \geq 2$. Les monômes \hat{p}_K de degré ≤ 2 vérifient $\hat{p}_K = \hat{\pi}\hat{p}_K$, soit $\hat{E}(\hat{f}_K[\hat{p}_K - \hat{\pi}\hat{p}_K]) = 0$, et les monômes de degré compris entre 3 et n vérifient une inégalité du type (4.31).

Ainsi, pour tout $m \geq 2$, l'inégalité (4.31) est vérifiée.

Étape 3 : Estimation de $E_K(fp)$.

Pour obtenir l'inégalité (4.27), il suffit alors de combiner les égalités (4.28)-(4.29), les inégalités (4.30)-(4.31) et (cf. Ciarlet [1], n° 6, th. 3 et 4) :

$$|\hat{f}_K|_{m-1-k,q,\hat{K}} \leq \hat{C} h_K^{m-1-k} (\det(B_K))^{-1/q} |f|_{m-1-k,q,K}, \quad k = 0, 1, 2,$$

$$|\hat{p}_K|_{k,\hat{K}} \leq \hat{C} h_K^k (\det(B_K))^{-1/2} |p|_{k,K}, \quad k = 0, 1, 2. \quad \blacksquare$$

Remarque 4.5 : Par analogie avec les remarques 4.3 et 4.4, on observe que la démonstration du théorème 4.4 n'utilise que la notion de triangle de référence à l'exclusion de la notion d'élément fini de référence. \blacksquare

En combinant les résultats des théorèmes précédents, nous obtenons l'estimation explicite de l'erreur :

THÉORÈME 4.5 : Supposons que les hypothèses (3.1), (3.2) et (3.3) relatives à la régularité de la triangulation \mathcal{T}_h et à la construction de la famille d'espaces d'éléments finis V_h soient satisfaites. Supposons aussi qu'il existe des entiers $m, n, 2 \leq m \leq n$, tels que les relations suivantes soient satisfaites pour tous les triangles $K \in \mathcal{T}_h$:

$$P_m(K) \subset P_K \subset P_n(K),$$

$$H^{m+1}(K) \subset \mathcal{C}^s(K),$$

où s est l'ordre maximal des dérivées partielles intervenant dans la définition des ensembles Σ_K .

Supposons enfin que le schéma d'intégration numérique sur l'élément de référence \hat{K} soit tel que $\hat{\omega}_q > 0$, $1 \leq q \leq Q$ et vérifie l'une des deux conditions suivantes :

$$\forall \hat{\varphi} \in P_{2n-4}(\hat{K}), \quad \hat{E}(\hat{\varphi}) = 0, \quad (4.32)$$

$$\left. \begin{aligned} \forall \hat{\varphi} \in P_{m+n-4}(\hat{K}), \quad \hat{E}(\hat{\varphi}) = 0 \\ \text{et} \\ \text{la réunion } \bigcup_{q=1}^Q \{ \hat{b}_q \} \text{ contient un sous-ensemble } P_{n-2}(\hat{K})\text{-unisolvant.} \end{aligned} \right\} (4.33)$$

Alors, si la solution $u \in H_0^2(\Omega)$ du problème variationnel (2.5) appartient à l'espace $H^{m+1}(\Omega)$, si $a_{ij} \in W^{m-1, \infty}(\Omega)$, $|i| = |j| = 2$, et si $f \in W^{m-1, q}(\Omega)$ pour un certain nombre $q \geq 2$ ($q > 2$ si $m = 2$), il existe une constante \hat{C} indépendante de h telle que

$$\left. \begin{aligned} \|u - u_h\|_{2, \Omega} \\ \leq \hat{C} h^{m-1} \left\{ \|u\|_{m+1, \Omega} \right. \\ \left. + \sum_{|i|=|j|=2}^1 \|a_{ij}\|_{m-1, \infty, \Omega} \|u\|_{m+1, \Omega} + \|f\|_{m-1, q, \Omega} \right\}, \end{aligned} \right\} (4.34)$$

où $u_h \in V_h$ désigne la solution du problème discret (4.1).

Démonstration : Les conditions d'application du théorème 3.1 étant satisfaites nous avons

$$\|u - \pi_h u\|_{2, \Omega} \leq \hat{C} h^{m-1} \|u\|_{m+1, \Omega},$$

où \hat{C} désigne ici (et par la suite) une constante indépendante de h . Par ailleurs, les relations (2.2), (4.14) et (4.11) nous permettent d'écrire :

$$|a(\pi_h u, w_h) - a_h(\pi_h u, w_h)| \leq \sum_{K \in \mathcal{T}_h} \sum_{|i|=|j|=2} |E_K(a_{ij} \partial^i(\pi_h u|_K) \partial^j w_h)|,$$

où $\pi_h u$ est l'interpolée de u dans V_h et w_h un élément quelconque de V_h . Le théorème 4.3 entraîne alors :

$$|E_K(a_{ij} \partial^i(\pi_h u|_K) \partial^j w_h)| \leq \hat{C} h_K^{m-1} \|a_{ij}\|_{m-1, \infty, K} \|\pi_h u\|_{m+1, K} |w_h|_{2, K},$$

ou encore, avec l'inégalité de Cauchy-Schwarz et l'hypothèse (3.2) :

$$\begin{aligned} & |a(\pi_h u, w_h) - a_h(\pi_h u, w_h)| \\ & \leq \hat{C} h^{m-1} \left(\sum_{|i|=|j|=2} \|a_{ij}\|_{m-1, \infty, \Omega} \|\pi_h u\|_{m+1, \Omega} |w_h|_{2, \Omega} \right). \end{aligned}$$

En utilisant le fait que l'opérateur de P_K -interpolation préserve l'espace $P_m(K)$, nous avons

$$\|\pi_h u\|_{m+1, \Omega} \leq \|u\|_{m+1, \Omega} + \|u - \pi_h u\|_{m+1, \Omega} \leq \hat{C} \|u\|_{m+1, \Omega},$$

et ainsi

$$\left. \begin{aligned} & \inf_{v_h \in V_h} \left(\|u - v_h\|_{2, \Omega} + \sup_{w_h \in V_h} \frac{|a(v_h, w_h) - a_h(v_h, w_h)|}{\|w_h\|_{2, \Omega}} \right) \\ & \leq \|u - \pi_h u\|_{2, \Omega} + \sup_{w_h \in V_h} \frac{|a(\pi_h u, w_h) - a_h(\pi_h u, w_h)|}{\|w_h\|_{2, \Omega}} \\ & \leq \hat{C} h^{m-1} \{ \|u\|_{m+1, \Omega} + \left(\sum_{|i|=|j|=2} \|a_{ij}\|_{m-1, \infty, \Omega} \right) \|u\|_{m+1, \Omega} \}. \end{aligned} \right\} \quad (4.35)$$

De la même façon, les relations (2.3), (4.15) et (4.11) et le théorème 4.4 entraînent

$$\begin{aligned} |f(w_h) - f_h(w_h)| & \leq \sum_{K \in \mathcal{T}_h} |E_K(f w_h)| \\ & \leq \hat{C} \sum_{K \in \mathcal{T}_h} h_K^{m-1} (\text{mes}(K))^{(1/2)-(1/q)} \|f\|_{m-1, q, K} \|w_h\|_{2, K} \\ & \leq \hat{C} h^{m-1} (\text{mes}(\Omega))^{(1/2)-(1/q)} \|f\|_{m-1, q, \Omega} \|w_h\|_{2, \Omega}. \end{aligned}$$

Pour cette dernière inégalité, nous avons utilisé l'inégalité

$$\sum_K |a_K b_K c_K| \leq \left(\sum_K |a_K|^\alpha \right)^{1/\alpha} \left(\sum_K |b_K|^\beta \right)^{1/\beta} \left(\sum_K |c_K|^\gamma \right)^{1/\gamma},$$

valable pour tous les nombres réels $\alpha \geq 1, \beta \geq 1, \gamma \geq 1$ satisfaisant

$$\frac{1}{\alpha} + \frac{1}{\beta} + \frac{1}{\gamma} = 1.$$

On prend ici :

$$\frac{1}{\alpha} = \frac{1}{2} - \frac{1}{q}, \quad \beta = q, \quad \gamma = 2,$$

d'où la condition $q \geq 2$. Ainsi

$$\sup_{w_h \in V_h} \frac{|f(w_h) - f_h(w_h)|}{\|w_h\|_{2,\Omega}} \leq \hat{C} h^{m-1} (\text{mes}(\Omega))^{(1/2)-(1/q)} \|f\|_{m-1,q,\Omega}. \quad (4.36)$$

Nous sommes dans les conditions d'application du théorème 4.1 et l'on obtient l'estimation (4.34) en reportant les inégalités (4.35) et (4.36) dans la majoration abstraite (4.3). ■

Dans le cas particulier d'une famille régulière d'éléments finis d'Argyris ou de Bell, les théorèmes 3.2 et 4.5 entraînent :

THÉORÈME 4.6 (estimation d'erreur pour l'élément d'Argyris): Soit une famille régulière d'éléments finis du type Argyris et soit V_h l'espace d'éléments finis associé vérifiant les conditions (3.3). Soit un schéma d'intégration numérique tel que $\omega_q > 0$, $1 \leq q \leq Q$, et vérifiant :

$$\forall \hat{\varphi} \in P_6(\hat{K}), \quad E(\hat{\varphi}) = 0. \quad (4.37)$$

Alors, si la solution $u \in H_0^2(\Omega)$ du problème variationnel (2.5) appartient à l'espace $H^6(\Omega)$, si $a_{ij} \in W^{4,\infty}(\Omega)$, $|i| = |j| = 2$, et si $f \in W^{4,q}(\Omega)$ pour un certain nombre $q \geq 2$, il existe une constante \hat{C} indépendante de h telle que

$$\|u - u_h\|_{2,\Omega} \leq \hat{C} h^4 \{ \|u\|_{6,\Omega} + \sum_{|i|=|j|=2} \|a_{ij}\|_{4,\infty,\Omega} \|u\|_{6,\Omega} + \|f\|_{4,q,\Omega} \}, \quad (4.38)$$

où $u_h \in V_h$ est la solution du problème discret (4.1). ■

THÉORÈME 4.7 (estimation d'erreur pour l'élément de Bell): Soit une famille régulière d'éléments finis du type Bell et soit V_h l'espace d'éléments finis associé vérifiant les conditions (3.3). Soit un schéma d'intégration numérique tel que $\omega_q > 0$, $1 \leq q \leq Q$ et vérifiant l'une des deux conditions suivantes :

$$\forall \hat{\varphi} \in P_6(\hat{K}), \quad E(\hat{\varphi}) = 0 \quad (4.39)$$

ou

$$\left. \begin{aligned} &\forall \hat{\varphi} \in P_5(\hat{K}), \quad E(\hat{\varphi}) = 0 \\ &\text{et} \\ &\text{la réunion } \bigcup_{q=1}^Q \{\hat{b}_q\} \text{ contient un sous-ensemble } P_3(K)\text{-unisolvant.} \end{aligned} \right\} \quad (4.40)$$

Alors, si la solution $u \in H_0^2(\Omega)$ du problème variationnel (2.5) appartient à l'espace $H^5(\Omega)$, si $a_{ij} \in W^{3,\infty}(\Omega)$, $|i| = |j| = 2$, et si $f \in W^{3,q}(\Omega)$ pour un

certain nombre $q \geq 2$, il existe une constante \hat{C} indépendante de h telle que

$$\begin{aligned} & \|u - u_h\|_{2, \Omega} \\ & \leq \hat{C} h^3 \left\{ \|u\|_{5, \Omega} + \sum_{|i|=|j|=2} \|a_{ij}\|_{3, \infty, \Omega} \|u\|_{5, \Omega} + \|f\|_{3, q, \Omega} \right\}, \end{aligned} \quad (4.41)$$

où $u_h \in V_h$ est la solution du problème discret (4.1). ■

Dans Lyness-Jespersen [1], p. 30, on trouvera deux schémas d'intégration numérique vérifiant les conditions (4.37) et (4.39) et comportant respectivement 12 et 13 nœuds. A notre connaissance, il n'existe pas de schéma plus simple que les deux précédents vérifiant la condition (4.40). Pour conclure, notons que les résultats de ce travail sont directement applicables au problème de la plaque encadrée (cf. remarque 2.1) et qu'il est possible de les étendre au cas d'un opérateur du quatrième ordre uniformément elliptique [i. e. vérifiant l'inégalité (2.4)] du type

$$Au = \sum_{|i| \leq 2} \partial^{|i|} \left(\sum_{|j| \leq 2} a_{ij}(x) \partial^{|j|} u \right),$$

En particulier, l'obtention d'une estimation d'erreur asymptotique du même ordre que celle donnée en (4.34) est alors possible en utilisant les mêmes schémas d'intégration numérique [i. e. vérifiant les conditions (4.32) et (4.33)]. Pour des résultats de ce type, on peut se reporter à Bernadou [1] où figurent également des exemples d'utilisation d'autres familles d'éléments finis de classe \mathcal{C}^1 .

REMERCIEMENTS

Nous exprimons notre gratitude à M. le professeur P. G. Ciarlet qui nous a prodigué conseils et encouragements au cours de la réalisation de ce travail.

BIBLIOGRAPHIE

J. H. ARGYRIS et D. W. SCHARPF
 1. *The Scheba Family of Shell Elements for the Matrix Displacement Method*, Aeronaut. J. Roy. Aeronaut. Soc., vol. 72, 1968, p. 873-883;
 2. *Matrix Displacement Analysis of Shells and Plates Including Transverse Shear Strain Effects*, Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering, vol. 1, 1972, p. 81-139.

K. BELL
 1. *A Refined Triangular Plate Bending Finite Elements*, Internat. J. Numer. Methods Engng., vol. 1, 1969, p. 101-122.

M. BERNADOU
 1. *Méthodes conformes d'éléments finis avec intégration numérique pour des problèmes de coques*, Rapport de Recherche I.R.I.A.-Laboria (à paraître).

H. CARTAN

1. *Calcul différentiel*, Paris, Hermann, 1967.

P. G. CIARLET

1. *Numerical Analysis of the Finite Element Method*, Presses de l'Université de Montréal, 1976;
2. *The Finite Element Method for Elliptic Problems*, North-Holland, 1977;
3. *Interpolation Error Estimates for the Reduced Hsieh-Clough-Tocher Triangle*, Journées Éléments finis de Rennes, mai 1977.

P. G. CIARLET et P. A. RAVIART

1. *The Combined Effect of Curved Boundaries and Numerical Integration in Isoparametric Finite Element Methods*, In *The Mathematical Foundations of the Finite Element Method with Applications to Partial Differential Equations*, A. K. AZIZ, éd., Academic Press, New York, 1972, p. 409-474.
2. *L'effet de l'intégration numérique dans les méthodes d'éléments finis* (à paraître).

J. N. LYNNESS et D. JESPERSEN

1. *Moderate degree symmetric quadrature rules for the triangle*. J. Inst. Maths. Applics., 15, 1975, p. 19-32.

L. MANSFIELD

1. *Approximation of the Boundary in the Finite Element Solution of Fourth Order Problems* (to appear).

J. NEČAS

1. *Les méthodes directes en théorie des équations elliptiques*, Masson, Paris, 1967.

A. ŽENIŠEK

1. *A General Theorem on Triangular Finite C^m -Elements*, R.A.I.R.O., R. 2, vol. 8, 1974, p. 119-127.