RAIRO. ANALYSE NUMÉRIQUE

M. N. LE ROUX

Méthode d'éléments finis pour la résolution numérique de problèmes extérieurs en dimension 2

RAIRO. Analyse numérique, tome 11, nº 1 (1977), p. 27-60

<http://www.numdam.org/item?id=M2AN_1977__11_1_27_0>

R.A.I.R.O. Analyse numérique/Numerical Analysis
(vol. 11, n° 1, 1977, p. 27 à 60)

MÉTHODE D'ÉLÉMENTS FINIS POUR LA RÉSOLUTION NUMÉRIQUE DE PROBLÈMES EXTÉRIEURS EN DIMENSION 2 (*)

par M. N. LE ROUX (1)

Communiqué par P. G. CIARLET

Résumé. — *Le calcul du potentiel électrique dans le plan, en présence d'un conducteur* Ω, *ouvert borné de* R^2, *de frontière* Γ, *peut être résolu par une méthode variationnelle d'éléments finis. Ce problème se ramène au calcul de la charge électrique* q *du conducteur, qui est solution d'une équation intégrale singulière sur* Γ. *L'analyse de l'erreur montre qu'en choisissant une approximation de la frontière* Γ *par des éléments finis courbes d'ordre* k, *la précision optimale est obtenue en approchant* q *par des polynômes de degré* $k-1$. *Ce résultat est confirmé par quelques expériences numériques.*

INTRODUCTION

Cette étude a pour objet le calcul du potentiel électrique dans le plan en présence d'un conducteur Ω, ouvert borné de $\mathbf{R}^2$, dont la frontière est Γ. Le potentiel u est alors solution de

$$\begin{cases} \Delta u = 0 & \text{dans } \Omega, \\ \Delta u = 0 & \text{dans } \Omega^c, \\ u|_\Gamma = u_0. \end{cases}$$

La première partie rappelle les résultats théoriques; le calcul de u se ramène au calcul de la charge électrique q sur Γ définie par

$$q = \left.\frac{\partial u}{\partial n}\right|_{\text{int}\,\Gamma} - \left.\frac{\partial u}{\partial n}\right|_{\text{ext}\,\Gamma} \qquad (\text{où } \vec{n} \text{ est la normale extérieure à } \Gamma)$$

et le calcul de q est un problème variationnel coercif ([10]).

Dans la deuxième partie, on définit une méthode variationnelle d'éléments finis pour la résolution numérique du problème. La frontière Γ est approchée par des arcs de courbe polynômiaux $A_{i-1} A_i$ ($1 \leqq i \leqq n$) de degré p, soit Γ_h

(*) Reçu septembre 1975, et sous forme révisée le 13 février 1976.
(1) Faculté des Sciences, Département de Mathématiques et Informatique, BP 25 A, 35031 Rennes Cedex.

cette approximation de la frontière. On détermine alors une solution approchée q_h dans un espace de dimension finie V_h (par la résolution numérique d'un système linéaire). L'espace V_h sera l'espace des fonctions constantes sur $A_{i-1} A_i$, dont l'intégrale sur Γ_h est nulle ou l'espace des fonctions continues sur Γ_h, dont l'intégrale sur Γ_h est nulle et dont les projections sur les segments $A_{i-1} A_i$ sont des polynômes d'ordre k. Le paragraphe III est consacré à l'étude de l'erreur qui provient de l'introduction des espaces V_h et de l'approximation de la frontière. On montre alors qu'on obtient une précision optimale en prenant une approximation de la frontière Γ par des éléments courbes d'ordre k et pour l'espace V_h des polynômes d'ordre $k-1$. Ceci semble confirmé par les résultats numériques obtenus au paragraphe IV. Hsiao et Wendland [9] ont indépendamment montré la convergence d'une méthode de Galerkin pour le calcul du potentiel.

I. RAPPELS THÉORIQUES

Nous rappelons ici des résultats obtenus par l'auteur [10, 11].

Si Ω est un ouvert borné de $\mathbf{R}^2$, de frontière Γ régulière, les équations du potentiel électrique u engendré par ce conducteur sont alors :

$$\left.\begin{aligned} \Delta u = 0 \quad & \text{dans } \Omega; \\ \Delta u = 0 \quad & \text{dans } \Omega^c; \\ u\big|_\Gamma = u_0. & \end{aligned}\right\} \tag{1.1}$$

L'adhérence de $\mathscr{D}(\mathbf{R}^2)$ pour la norme du gradient n'étant pas un espace de distributions [5], on introduit l'espace

$$W^1(\mathbf{R}^2) = \{ u \in \mathscr{D}'(\mathbf{R}^2);\ (1+r^2)^{-1/2}(1+\operatorname{Log}\sqrt{r^2+1})^{-1} u \in L^2(\mathbf{R}^2); \\ \operatorname{grad} u \in (L^2(\mathbf{R}^2))^2 \},$$

où r représente la distance à l'origine. $W^1(\mathbf{R}^2)$ est muni de la norme

$$\| u \|_{W^1(\mathbf{R}^2)} = \left(\left| \frac{u}{\sqrt{r^2+1}\,(1+\operatorname{Log}\sqrt{r^2+1})} \right|^2_{L^2(\mathbf{R}^2)} + \left| \frac{\partial u}{\partial x_1} \right|^2_{L^2(\mathbf{R}^2)} + \left| \frac{\partial u}{\partial x_2} \right|^2_{L^2(\mathbf{R}^2)} \right)^{1/2}.$$

En utilisant alors une inégalité de Hardy généralisée [1], on montre que l'expression

$$\| u \| = \left(\int_{\mathbf{R}^2} \left(\left| \frac{\partial u}{\partial x_1} \right|^2 + \left| \frac{\partial u}{\partial x_2} \right|^2 \right) d\omega \right)^{1/2}, \tag{1.2}$$

est une norme sur l'espace $W^1(\mathbf{R}^2)$ quotienté par les constantes soit $W^1(\mathbf{R}^2)/P_0$; cette norme étant équivalente à la norme habituelle. De plus, l'espace $\mathscr{D}(\mathbf{R}^2)$ est dense dans $W^1(\mathbf{R}^2)$.

On en déduit la proposition suivante :

PROPOSITION 1.1 : *Le problème* (1.1) *admet une solution unique u si la fonction* u_0 *est donnée dans l'espace* $H^{1/2}(\Gamma)$*; la fonction u ainsi définie est dans le sous-espace vectoriel fermé K de* $W^1(\mathbf{R}^2)$ *défini par*

$$K = \{ u \in W^1(\mathbf{R}^2);\ \Delta u \in (W^1(\mathbf{R}^2)),\ \operatorname{supp}(\Delta u) \in \Gamma \}.$$

Le problème (1.1) *définit un isomorphisme de* $H^{1/2}(\Gamma)$ *sur K.*

D'autre part, si $\vec{n}$ désigne la normale extérieure à Γ, la charge électrique q du conducteur est définie par

$$q = \left.\frac{\partial u}{\partial n}\right|_{\text{int}\,\Gamma} - \left.\frac{\partial u}{\partial n}\right|_{\text{ext}\,\Gamma}. \tag{1.3}$$

Les dérivées normales $\partial u/\partial n\,|_{\text{int}\,\Gamma}$ et $\partial u/\partial n\,|_{\text{ext}\,\Gamma}$ étant définies par les formules [11] :

$$\left\langle \left.\frac{\partial u}{\partial n}\right|_{\text{int}\,\Gamma},\ v|_\Gamma \right\rangle = \int_\Omega (\operatorname{grad} u,\ \operatorname{grad} v)\, d\omega; \qquad \forall v \in H^1(\Omega),$$

$$\left\langle \left.\frac{\partial u}{\partial n}\right|_{\text{ext}\,\Gamma},\ v|_\Gamma \right\rangle = \int_{\Omega^c} (\operatorname{grad} u,\ \operatorname{grad} v)\, d\omega; \qquad \forall v \in W^1(\Omega^c).$$

La charge électrique q vérifie alors la relation

$$\int_{\mathbf{R}^2} (\operatorname{grad} u,\ \operatorname{grad} v)\, d\omega = \langle q,\ v|_\Gamma \rangle_{H^{-1/2}(\Gamma)\times H^{1/2}(\Gamma)}; \qquad \forall v \in W^1(\mathbf{R}^2) \tag{1.4}$$

et donc appartient à l'espace

$$H_0^{-1/2}(\Gamma) = \{ q \in H^{-1/2}(\Gamma);\ \langle q,\ 1 \rangle_{H^{-1/2}(\Gamma)\times H^{1/2}(\Gamma)} = 0 \}.$$

On a alors la proposition suivante :

PROPOSITION 1.2 : *Le problème* (1.3) *admet une solution unique u dans l'espace* $W^1(\mathbf{R}^2)/P_0$ *si q est dans l'espace* $H_0^{-1/2}(\Gamma)$. *En outre, si q est dans l'espace* $H_0^{-1/2}(\Gamma) \cap \mathscr{D}(\Gamma)$, *cette solution est donnée par l'expression*

$$u(x) = \frac{1}{2\pi}\int_\Gamma q(y)\,\mathrm{Log}\,\frac{1}{|x-y|}\, d\gamma(y) + c; \qquad \forall x \in \mathbf{R}^2; \quad c \in \mathbf{R}. \tag{1.5}$$

De ces deux propositions, on peut déduire que la charge électrique q du conducteur est solution d'une équation intégrale sur Γ; et le calcul de cette charge permettra d'obtenir le potentiel dans tout l'espace; c'est ce qu'exprime le théorème suivant :

THÉORÈME 1.1 : *L'application de* $\mathcal{D}(\Gamma) \cap H_0^{-1/2}(\Gamma)$ *dans* $W^1(\mathbf{R}^2)/P_0$ *définie par l'expression* (1.5) *est continue de* $H^{-1/2}(\Gamma)$ *dans* K/P_0 [*et dans* $H^{1/2}(\Gamma)/P_0$] *et se prolonge de manière unique en un isomorphisme de* $H_0^{-1/2}(\Gamma)$ *sur* K/P_0 (*et sur* $H^{1/2}(\Gamma)/P_0$). *D'autre part, cet isomorphisme correspond au problème variationnel coercif défini comme suit :*

Trouver q dans l'espace $H_0^{-1/2}(\Gamma)$ *tel que*

$$\frac{1}{2\pi}\int_\Gamma\int_\Gamma q(x)\,q'(y)\,\mathrm{Log}\frac{1}{|x-y|}\,d\gamma(x)\,d\gamma(y) = \langle q', u_0\rangle_{H^{-1/2}(\Gamma)\times H^{1/2}(\Gamma)}; \quad \forall q'\in H_0^{-1/2}(\Gamma). \tag{1.6}$$

La forme bilinéaire du premier membre est définie pour q et q' dans l'espace $\mathcal{D}(\Gamma) \cap H_0^{-1/2}(\Gamma)$, *est continue sur l'espace* $H_0^{-1/2}(\Gamma)\times H_0^{-1/2}(\Gamma)$ *et donc se prolonge de manière unique en une forme bilinéaire continue sur l'espace* $H_0^{-1/2}(\Gamma)\times H_0^{-1/2}(\Gamma)$.

Enfin l'expression

$$\|q\| = \left(\frac{1}{2\pi}\int_\Gamma\int_\Gamma q(x)\,q(y)\,\mathrm{Log}\frac{1}{|x-y|}\,d\gamma(x)\,d\gamma(y)\right)^{1/2} \tag{1.7}$$

est une norme sur l'espace $H_0^{-1/2}(\Gamma)$ *équivalente à la norme habituelle.*

D'autre part, des hypothèses supplémentaires de régularité sur la fonction u_0 entraînent également davantage de régularité sur u et q.

Le théorème 1.2 est un théorème de régularité sur la frontière Γ.

THÉORÈME 1.2 : *La solution u dans* $W^1(\mathbf{R}^2)/P_0$ *du problème* (1.8)

$$\int_{\mathbf{R}^2}(\mathrm{grad}\,u, \mathrm{grad}\,v)\,d\omega = \langle q, v|_\Gamma\rangle_{H^{-1/2}(\Gamma)\times H^{1/2}(\Gamma)}; \qquad \forall v\in W^1(\mathbf{R}^2)$$

admet une trace sur la frontière Γ, *soit* $u|_\Gamma$ *qui est dans l'espace* $H^s(\Gamma)$ *si la distribution q est dans l'espace* $H^{s-1}(\Gamma)\cap H_0^{-1/2}(\Gamma)$ ($s \geqq 1/2$).

L'application $q \mapsto u|_\Gamma$ *est un isomorphisme de l'espace* $H_0^{s-1}(\Gamma)$ *sur l'espace* $H^s(\Gamma)/P_0$ *pour tout s réel, auto-adjoint par rapport au produit scalaire de l'espace* $L^2(\Gamma)$ *si* $H_0^s(\Gamma)$ *est l'espace suivant :*

$$H_0^s(\Gamma) = \{q\in H^s(\Gamma);\ \langle q, 1\rangle_{H^s(\Gamma)\times H^{-s}(\Gamma)} = 0\}.$$

Le théorème (1.3) est un résultat de régularité dans $\mathbf{R}^2$ et de comportement à l'infini. On définit pour cela les espaces $W^m(\Omega^c)$:

$$W^m(\Omega^c) = \{u\in\mathcal{D}'(\Omega^c);\ (1+r^2)^{-1/2}(1+\mathrm{Log}\sqrt{r^2+1})^{-1}\,u\in L^2(\Omega^c)$$
$$(r^2+1)^{(|\alpha|-1)/2}\,D^\alpha u\in L^2(\Omega^c);\ |\alpha| = 1, 2, \ldots, m\}.$$

THÉORÈME 1.3 : *Le problème* (1.1) *admet une solution unique u telle que :* $u|_{\Omega} \in H^m(\Omega)$; $u|_{\Omega^c} \in W^m(\Omega^c)$; *m entier positif si la fonction* u_0 *est dans l'espace* $H^{m-1/2}(\Gamma)$.

L'application $q \to u|_{\Omega}$ *est continue de* $H^{m-1/2}(\Gamma) \cap H_0^{m-1/2}(\Gamma)$ *dans l'espace* $H^{m+1}(\Omega)/P_0$.

L'application $q \to u|_{\Omega^c}$ *est continue de* $H^{m-1/2}(\Gamma) \cap H_0^{-1/2}(\Gamma)$ *dans l'espace* $W^{m+1}(\Omega^c)/P_0$.

II. DÉFINITION DU PROBLÈME APPROCHÉ

La formulation variationnelle du problème (1.6) va nous permettre d'en déduire une méthode variationnelle d'éléments finis courbes pour la résolution numérique. Le problème (1.6) s'écrit :

Déterminer q dans l'espace $H_0^{-1/2}(\Gamma)$ tel que

$$a(q, q') = \langle q', u_0 \rangle_{H^{-1/2}(\Gamma) \times H^{1/2}(\Gamma)}; \qquad \forall q' \in H_0^{-1/2}(\Gamma),$$

où u_0 est donné dans l'espace $H^{1/2}(\Gamma)$ et $a(q, q')$ est la forme bilinéaire symétrique et coercive dans l'espace $H_0^{-1/2}(\Gamma)$ qui vaut

$$a(q, q') = \frac{1}{2\pi} \int_\Gamma \int_\Gamma q(x) q'(y) \operatorname{Log} \frac{1}{|x-y|} d\gamma(x) d\gamma(y).$$

La frontière Γ est approchée par des arcs de courbe polynômiaux que l'on note Γ_h et on définit des sous-espaces de dimension finie de l'espace de Hilbert $H_0^{-1/2}(\Gamma_h)$ qui sont notés V_h. Le problème approché s'écrit alors : trouver un élément q_h de l'espace V_h tel que

$$a_h(q_h, q_h') = \int_{\Gamma_h} u_{0_h}(y) q_h'(y) d\gamma_h(y); \qquad \forall q_h' \in V_h, \tag{2.1}$$

où la quantité u_{0h} est une approximation de la donnée u_0 et $a_h(q_h, q_h')$ est la forme bilinéaire symétrique définie sur V_h par

$$a_h(q_h, q_h') = \frac{1}{2\pi} \int_{\Gamma_h} \int_{\Gamma_h} q_h(x) q_h'(y) \operatorname{Log} \frac{1}{|x-y|} d\gamma_h(x) d\gamma_h(y).$$

L'erreur commise en remplaçant q_h par q proviendra donc, d'une part de l'approximation de q par une fonction q_h de V_h, d'autre part de l'approximation de la frontière Γ par Γ_h.

a) Choix de l'approximation Γ_h.

La courbe Γ étant régulière, elle admet des représentations paramétriques régulières. Son équation peut donc s'écrire :

$$x = F(s); \qquad s \in [0, L],$$

F application de $\mathbf{R}$ dans $\mathbf{R}^2$, telle que dF/ds soit un vecteur non nul en tout point.

On peut par exemple choisir pour s l'abscisse curviligne; [$L = L(\Gamma)$ est la longueur de la courbe]. Si la courbe Γ est de classe C^p, F sera un C^p-difféomorphisme de $[0, L(\Gamma)]$ sur Γ.

On choisit alors n points $A_i\,(1 \leqq i \leqq n)$ sur la frontière Γ tels que $A_i = F(s_i)$ $(1 \leqq i \leqq n)$, et $s_i - s_{i-1} = h$. [On pose $s_0 = 0$, $s_n = L(\Gamma)$, c'est-à-dire $A_0 = A_n$ car la courbe est fermée.]

Notons

$$h_i = A_{i-1}A_i = \left|F(s_i) - F(s_{i-1})\right|.$$

La fonction F étant régulière, il existe un point ξ tel que

$$s_{i-1} \leqq \xi \leqq s_i,$$

$$F(s_i) - F(s_{i-1}) = (s_i - s_{i-1})\,F'(\xi).$$

La dérivée première F' est bornée; donc

$$h_i = 0(h) \qquad (1 \leqq i \leqq n).$$

Considérons alors le système d'axes orthonormés $(\vec{u}_i, \vec{v}_i)$ d'origine A_{i-1} et de vecteur unitaire $\vec{u}_i$ colinéaire à $\overrightarrow{A_{i-1}A_i}$. L'équation paramétrique de l'arc de courbe $A_{i-1}A_i$ (noté Γ_i) par rapport à ce système d'axes peut s'écrire :

$$\left.\begin{aligned} u &= th_i \qquad (0 \leqq t \leqq 1), \\ v &= f_i(t) = \vec{v}_i \cdot \overrightarrow{A_{i-1}F(s)}, \end{aligned}\right\} \tag{2.2}$$

où s est défini en fonction de t par la relation

$$\vec{u}_i \cdot \overrightarrow{A_{i-1}F(s)} = th_i. \tag{2.3}$$

La fonction F étant régulière, pour h suffisamment petit, s est défini de façon unique en fonction de t; donc

$$s = g_i(t), \qquad t \in [0, 1], \tag{2.4}$$

où g_i est une bijection de $[0, 1]$ sur $[s_{i-1}, s_i]$.

LEMME 2.1 : *Pour tout i $(1 \leqq i \leqq n)$, on a les majorations*

$$\left|\frac{d^m}{dt^m} g_i(t)\right| \leqq Ch^m \qquad (1 \leqq m \leqq p), \quad \forall t \in [0, 1]; \tag{2.5}$$

$$\left.\begin{aligned} &|f_i(t)| \leqq Ch^2; \qquad \left|\frac{df_i}{dt}(t)\right| \leqq Ch^2;\\ &\left|\frac{d^m}{dt^m} f_i(t)\right| \leqq Ch^m \qquad (2 \leqq m \leqq p);\\ &\qquad \forall t \in [0, 1]. \end{aligned}\right\} \tag{2.6}$$

Démonstration : La relation (2.3) s'écrit :

$$th_i = \vec{u}_i \cdot \overrightarrow{A_{i-1} F(g_i(t))}; \qquad \forall t \in [0, 1],$$

donc

$$h_i = (\vec{u}_i \cdot \overrightarrow{F'(g_i(t))})\, g_i'(t); \qquad \forall t \in [0, 1].$$

On a

$$|\vec{u}_i \cdot \overrightarrow{F'(g_i(t))}| \geqq c\, |\vec{u}_i|\, |\overrightarrow{F'(g_i(t))}| \geqq c,$$

pour h assez petit car F' est non nul et l'angle de $\vec{u}_i$ avec $F'(s)$ n'est pas proche de $\pi/2$ pour h assez petit; d'où

$$\left|\frac{d}{dt}(g_i(t))\right| \leqq Ch.$$

La majoration (2.5) est donc obtenue pour $m = 1$; supposons le résultat démontré jusqu'à l'ordre $(m-1)$; $(m > 1)$. La dérivée d'ordre m de la quantité $\vec{u}_i \cdot \overrightarrow{A_{i-1} F(g_i(t))}$ est nulle; d'autre part, elle peut s'écrire :

$$\sum_{l=1}^{m} \alpha_l (\vec{F}^{(l)}(s) \cdot \vec{u}_i) \left(\sum_{i \in I(l, m)} \left(\frac{dg_i}{dt}(t) \right)^{i_1} \cdots \left(\frac{d^m}{dt^m} g_i(t) \right)^{i_m} \right) = 0,$$

où

$$s = g_i(t)$$

et

$$I(l, m) = \{ i = (i_1, \ldots, i_m),\ i_i + \ldots + i_m = l;\ i_1 + 2_{i_2} + \ldots + m i_m = m \}.$$

On obtient donc :

$$(\overrightarrow{F'(s)} \cdot \vec{u}_i) \left(\frac{d^m}{dt^m} g_i(t) \right) = O(h^m),$$

c'est-à-dire

$$\frac{d^m}{dt^m} g_i(t) = O(h^m) \qquad (1 \leqq m \leqq p).$$

D'autre part, le segment $A_{i-1}A_i$ représente le polynôme d'interpolation de degré un de la courbe Γ entre les points d'abscisse curviligne s_{i-1} et s_i; donc d'après la théorie de l'interpolation,

$$\vec{v}_i.\overrightarrow{A_{i-1}F(s)} = O(h^2); \qquad \forall s \in [s_{i-1}, s_i],$$

et

$$\vec{v}_i.\overrightarrow{F'(s)} = O(h); \qquad \forall s \in [s_{i-1}, s_i].$$

Or

$$f_i(t) = \vec{v}_i.\overrightarrow{A_{i-1}F(s)} \qquad \text{où} \quad s = g_i(t), \quad t \in [0, 1],$$

donc

$$f_i(t) = O(h^2); \qquad \forall t \in [0, 1]$$

et

$$f_i'(t) = (\vec{v}_i.\overrightarrow{F'(s)})\, g_i'(t) = O(h^2);$$

d'après l'inégalité (2.5).

Pour les dérivées d'ordre supérieur ou égal à 2, on utilise la majoration [14];

$$\left|\frac{d^m}{dt^m} f_i(t)\right| \leq \alpha \sum_{l=1}^{m} |\vec{F}^{(l)}(s).\vec{v}_i| \times \sum_{i \in I(l,m)} \left|\frac{dg_i}{dt}(t)\right|^{i_1} \cdots \left|\frac{d^m}{dt^m} g_i(t)\right|^{i_m},$$

où

$$I(l, m) = \{ i = (i_1, \ldots, i_m),\ i_1 + \ldots + i_m = l,\ i_1 + 2i_2 + \ldots + m i_m = m \};$$
$$s = g_i(t),$$

d'où, en utilisant les majorations (2.5) :

$$\left|\frac{d^m}{dt^m} f_i(t)\right| \leq C \sum_{l=1}^{m} |\vec{F}^{(l)}(s).\vec{v}_i|\, h^m.$$

Les dérivées successives de F étant bornées, on en déduit la majoration (2.6).

LEMME 2.2 : *Pour tout $i\,(1 \leq i \leq n)$, pour tout $m\,(1 \leq m \leq p)$, on a la majoration*

$$\left|\frac{d^m}{ds^m} g_i^{-1}(s)\right| \leq \frac{C}{h}; \qquad \forall s \in [s_{i-1}, s_i]. \tag{2.7}$$

Démonstration : Par définition de g_i (2.4) :

$$t = g_i^{-1}(s) = \frac{\vec{u_i} . \overrightarrow{A_{i-1} F(s)}}{h_i};$$

$$\frac{d^m}{ds^m} g_i^{-1}(s) = \frac{d^m t}{ds^m} = \frac{\vec{u_i} . \overrightarrow{D^m F(s)}}{h_i},$$

d'où

$$\left| \frac{d^m}{ds^m} g_i^{-1}(s) \right| \leqq \frac{C}{h_i},$$

car la fonction F a des dérivées bornées.

Soit P_i le polynôme d'interpolation de degré p de f_i aux points j/p $(0 \leqq j \leqq p+1)$. L'approximation Γ_{ih} de Γ_i sera alors la courbe dont l'équation paramétrique dans le système d'axes local $(\vec{u_i}, \vec{v_i})$ peut s'écrire :

$$\left. \begin{array}{ll} u = th_i; & t \in [0, 1]; \\ v = P_i(t). & \end{array} \right\} \tag{2.8}$$

Si on note $A_{i-j/p}$ $(0 \leqq j \leqq p)$ les points de coordonnées $(jh_i/p, f_i(j/p))$ dans le système d'axes $(\vec{u_i}, \vec{v_i})$, la courbe Γ_{ih} est l'interpolée d'ordre p de Γ_i aux points $A_{i-j/p}$ $(0 \leqq j \leqq p)$.

On notera : $x = F_i(t)$ l'équation de Γ_i et $x = F_{ih}(t)$ l'équation de Γ_{ih} dans le système d'axes $(\vec{u_i}, \vec{v_i})$. L'approximation Γ_h de Γ sera l'arc polynômial constitué par les arcs de courbe Γ_{ih}.

b) Choix des espaces V_h.

Premier cas : L'espace V_h est l'espace des fonctions constantes sur chaque arc de courbe Γ_{ih} $(1 \leqq i \leqq n)$ et dont l'intégrale sur Γ_h est nulle. Sa dimension est donc $n-1$ et l'espace V_h est inclus dans l'espace $L^2(\Gamma_h)$.

Deuxième cas : L'espace V_h est l'espace des fonctions continues sur Γ_h, d'intégrale nulle sur Γ_h et dont la restriction à chacun des arcs Γ_{ih} $(1 \leqq i \leqq n)$ est dans l'espace P_k^i que l'on va définir.

Notons $\hat{P}_k$ l'espace des polynômes en t $(t \in [0, 1])$ de degré inférieur ou égal à k. A une fonction q_h définie sur Γ_{ih}, on peut associer la fonction $\hat{q}_h$ définie sur $[0, 1]$ par : $\hat{q}_h = q_h \circ F_{ih}$ et, inversement, à une fonction $\hat{q}_h$ définie sur $[0, 1]$, on associe la fonction q_h définie sur Γ_{ih} par $q_h = \hat{q}_h \circ F_{ih}^{-1}$.

L'espace P_k^i est alors défini par

$$P_k^i = \{ p / p = \hat{p}_0 F_{ih}^{-1}, \hat{p} \in \hat{P}_k \}.$$

L'espace P_k^i étant de dimension $k+1$, V_h est de dimension $n\,k-1$ et de plus, V_h est inclus dans l'espace $H^1(\Gamma_h)$.

III. ÉTUDE DE L'ERREUR

L'erreur proviendra d'une part de l'approximation de q par une fonction de V_h, d'autre part de l'approximation de la frontière Γ par Γ_h. La frontière Γ sera supposée au moins de classe C^{p+1}.

La solution q du problème exact (1.6) est définie sur la frontière Γ, tandis que la solution q_h du problème approché est définie sur Γ_h. Pour pouvoir les comparer, il faudra donc définir une approximation de q_h sur Γ.

A une fonction q définie sur Γ_i, on peut associer la fonction $\tilde{q}$ définie sur $[0, 1]$ par $\tilde{q} = q \circ F_i$; et inversement à une fonction $\tilde{q}$ définie sur $[0, 1]$, on associe la fonction q définie sur Γ_i par : $q = \tilde{q} \circ F_i^{-1}$.

De même, si q_h est définie sur Γ_{ih}, on a déjà défini $\hat{q}_h$ sur $[0, 1]$ par : $\hat{q}_h = q_h \circ F_{ih}$ et inversement $q_h = \hat{q}_h \circ F_{ih}^{-1}$.

Soit alors r_h l'opérateur de V_h dans $H^{-1/2}(\Gamma)$ défini par

$$r_h \tilde{q}_h = \hat{q}_h; \qquad \forall q_h \in V_h \qquad (1 \leqq i \leqq n), \tag{3.1}$$

c'est-à-dire

$$r_h q_h \circ F_i = q_h \circ F_{ih} \qquad (1 \leqq i \leqq n).$$

La fonction $r_h q_h$ ainsi définie n'est pas dans l'espace $H_0^{-1/2}(\Gamma)$; c'est pourquoi, on définit l'opérateur p_h de V_h dans $H_0^{-1/2}(\Gamma)$ par

$$p_h \tilde{q}_h \left| \frac{dF_i}{dt} \right| = \hat{q}_h \left| \frac{dF_{ih}}{dt} \right|; \qquad \forall q_h \in V_h \quad (1 \leqq i \leqq n). \tag{3.2}$$

(Dans ce cas,

$$\left. \int_\Gamma p_h q_h(x)\, d\gamma(x) = \int_{\Gamma_h} q_h(x)\, d\gamma_h(x) = 0 \text{ car } q_h \in V_h \right).$$

Pour obtenir des majorations de $\| q - r_h q_h \|_{H^{-1/2}(\Gamma)}$, on utilisera des résultats de la théorie de l'interpolation rappelés dans la proposition suivante [2] :

PROPOSITION 3.1 : *Soient des espaces de Hilbert X, Y, S, T avec $Y \subset X$, $T \subset S$ et soient des espaces intermédiaires définis par une méthode d'interpolation du type* θ. *Alors nous avons*

$$\| u \|_{[X,Y]_\theta} \leqq C \| u \|_X^{1-\theta} \| u \|_Y^\theta; \qquad \forall u \in V. \tag{3.3}$$

L'espace $[X, Y]_\theta$ est par définition l'interpolé de paramètre θ $(0 \leqq \theta \leqq 1)$ *entre les espaces X et Y. (On a $[X, Y]_0 = X$ $[X, Y]_1 = Y$.) D'autre part soit un opérateur linéaire A continu de l'espace X dans l'espace S de norme* α *et linéaire continu de l'espace Y dans l'espace T de norme* β, *nous avons :*

$$\| A u \|_{[S,T]_\theta} \leqq C \alpha^{1-\theta} \beta^\theta \| u \|_{[X,Y]_\theta}; \qquad \forall u \in [X, Y]_\theta. \tag{3.4}$$

Ces résultats seront utilisés pour les espaces $H^s(\Gamma)$, avec s réel.

LEMME 3.1 : *Soit q_h un élément de l'espace V_h, on a les inégalités*

$$c_1 |r_h q_h|_{L^2(\Gamma)} \leqq |q_h|_{L^2(\Gamma_h)} \leqq c_2 |r_h q_h|_{L^2(\Gamma)}; \qquad c_1, c_2 > 0. \tag{3.5}$$

Démonstration : Elle résulte immédiatement de la définition de l'opérateur r_h, en utilisant le fait que F_i et F_{ih} étant régulières, il existe deux constantes c_1 et c_2 telles que :

$$c_1 \left|\frac{dF_i}{dt}\right| \leqq \left|\frac{dF_{ih}}{dt}\right| \leqq c_2 \left|\frac{dF_i}{dt}\right|.$$

LEMME 3.2 : *Inégalités inverses; pour tout q_h de l'espace V_h, on a les majorations*

$$\| r_h q_h \|_{H^s(\Gamma)} \leqq \frac{C}{h^{s-t}} \| r_h q_h \|_{H^t(\Gamma)}; \tag{3.6}$$

$-1 \leqq t \leqq s \leqq 0$ *dans le premier cas* ($V_h \subset L^2(\Gamma)$);
$-1 \leqq t \leqq 0$; $t \leqq s \leqq 1$ *dans le deuxième cas* ($V_h \subset H^1(\Gamma)$).
De plus, dans le second cas, on a aussi les majorations

$$\left.\begin{array}{l} \left(\sum_{i=1}^{n} \| r_h q_h \|^2_{H^s(\Gamma_i)}\right)^{1/2} \leqq \dfrac{C}{h^{s-t}} \| r_h q_h \|_{H^t(\Gamma)}; \\ \forall q_h \in V_h, \quad -1 \leqq t \leqq 0; \quad 1 \leqq s \leqq k, \quad k \geqq 1. \end{array}\right\} \tag{3.7}$$

Démonstration : Dans le premier cas, la démonstration est analogue à celle faite par Nedelec et Planchard en dimension 3 [13].

Dans le second cas, on démontre d'abord le résultat pour $t = 0$ et $s = 1$. Alors pour tout i ($1 \leqq i \leqq n$), les inégalités suivantes résultent de la définition de $\hat{q}_h$ et r_h :

$$c_1 h^{1/2} |\hat{q}_h|_{L^2(0,1)} \leqq |r_h q_h|_{L^2(\Gamma_i)} \leqq c_2 h^{1/2} |\hat{q}_h|_{L^2(0,1)},$$

où c_1 et c_2 sont deux constantes positives.

De plus, par définition de l'espace V_h, la fonction $\hat{q}_h$ est dans l'espace $\hat{P}_k$, qui est de dimension finie; sur cet espace, il y a donc équivalence entre les normes H^1 et L^2; d'où

$$\| \hat{q}_h \|_{H^1(0,1)} \leqq C |q_h|_{L^2(0,1)}.$$

On a également :

$$\| r_h q_h \|^2_{H^1(\Gamma_i)} = \| r_h q_h \|^2_{L^2(\Gamma_i)} + \int_0^1 \left|\frac{d\hat{q}_h}{dt}(t)\right|^2 \frac{1}{g_i'(t)}\, dt.$$

Or

$$\frac{1}{g_i'(t)} = \frac{\vec{u} \cdot \overrightarrow{F'(g_i(t))}}{h_i},$$

donc

$$\left|\frac{1}{g_i'(t)}\right| \leqq \frac{C}{h}$$

et

$$\|r_h q_h\|^2_{H^1(\Gamma_i)} \leqq \|r_h q_h\|^2_{L^2(\Gamma_i)} + \frac{C}{h}|\hat{q}_h|^2_{L^2(0,1)}.$$

D'où pour tout i ($1 \leqq i \leqq n$) :

$$\|r_h q_h\|_{H^1(\Gamma_i)} \leqq \frac{C}{h}|r_h q_h|_{L^2(\Gamma_i)}.$$

La majoration (3.6) pour $t = 0$, $s = 1$ est obtenue en sommant sur tous les indices i.

Pour $1 \leqq m \leqq k$, on utilise la majoration suivante [14] :

$$\left|\frac{d^m}{ds^m} r_h q_h(s)\right|$$
$$\leqq \alpha \sum_{l=1}^{m} \left|\frac{d^l}{dt^l}\hat{q}_h(t)\right| \left(\sum_{j \in J(l,m)} \left|\frac{dg_i^{-1}}{ds}(s)\right|^{j_1} \cdots \left|\frac{d^m}{ds^m} g_i^{-1}(s)\right|^{j_m}\right),$$

où

$$s = g_i(t)$$

et

$$J(l, m) = \{j = (j_1, \ldots, j_m) \in \mathbf{N}^m / j_1 + \ldots + j_m = l,\ j_1 + 2j_2 + \ldots + mj_m = m\}.$$

En utilisant le lemme (2.2), on obtient donc :

$$\left|\frac{d^m}{ds^m} r_h q_h(s)\right| \leqq C \sum_{l=1}^{m} h^{-l} \left|\frac{d^l}{dt^l}\hat{q}_h(t)\right|,$$

d'où

$$\|r_h q_h\|^2_{H^m(\Gamma_i)} \leqq C h^{-2m+1} |\hat{q}_h|^2_{L^2(0,1)}$$

et

$$\|r_h q_h\|_{H^m(\Gamma_i)} \leqq C h^{-m} |r_h q_h|_{L^2(\Gamma_i)}.$$

En sommant sur tous les indices i, on obtient le résultat pour $t = 0$, $s = m$. Les autres résultats s'en déduisent par dualité et interpolation.

LEMME 3.3 : *Soit q_h un élément de l'espace V_h; on a les inégalités*

$$|p_h q_h - r_h q_h|_{L^2(\Gamma)} \leqq C h^{p+1} |r_h q_h|_{L^2(\Gamma_h)}; \tag{3.8}$$

$$\|p_h q_h - r_h q_h\|_{H^{-1/2}(\Gamma)} \leqq C h^{p+1/2} \|r_h q_h\|_{H^{-1/2}(\Gamma)}. \tag{3.9}$$

Démonstration : Soit q_h un élément de l'espace V_h; alors, d'après les définitions de p_h et r_h :

$$|p_h q_h - r_h q_h|^2_{L^2(\Gamma)} = \sum_{i=1}^{n} \int_0^1 |\hat{q}_h(t)|^2 \left(\frac{|(dF_{ih}/dt)(t)|}{|(dF_i/dt)(t)|} - 1 \right)^2 \left| \frac{dF_i}{dt}(t) \right| dt.$$

Or

$$\left| \frac{dF_{ih}}{dt}(t) \right| = (h_i^2 + (P_i'(t))^2)^{1/2}$$

et

$$\left| \frac{dF_i}{dt}(t) \right| = (h_i^2 + (f_i'(t))^2)^{1/2}; \qquad \forall t \in [0, 1].$$

La fonction P_i étant le polynôme d'interpolation d'ordre p de f_i, on a l'égalité

$$f_i(t) - P_i(t) = \pi(t) f_i \left[0, \frac{1}{p}, \ldots, \frac{j}{p}, \ldots, 1, t \right]; \qquad \forall t \in [0, 1],$$

où

$$\pi(t) = \prod_{j=0}^{p} (t - j)$$

et $f_i[0, 1/p, \ldots, 1, t]$ représente une différence divisée.

Donc

$$f_i'(t) - P_i'(t) = \pi'(t) f_i \left[0, \frac{1}{p}, \ldots, \frac{j}{p}, \ldots, 1, t \right] + \pi(t) f_i \left[0, \frac{1}{p}, \ldots, 1, t, t \right]$$

et comme la fonction f_i est régulière, il existe deux points ξ_1 et ξ_2 dans l'intervalle $[0, 1]$ tels que

$$f_i'(t) - P_i'(t) = \frac{\pi'(t)}{(p+1)!} f_i^{(p+1)}(\xi_1) + \frac{\pi(t)}{(p+2)!} f_i^{(p+2)}(\xi_2); \qquad \forall t \in [0, 1].$$

En utilisant les inégalités (2.6), on en déduit :

$$|f_i'(t) - P_i'(t)| = O(h^{p+1}); \qquad \forall t \in [0, 1].$$

De plus,

$$f_i'(t) = O(h^2); \qquad P_i'(t) = O(h^2); \qquad \forall t \in [0, 1],$$

donc

$$|(f_i'(t))^2 - (P_i'(t))^2| \leq C h^{p+3}; \qquad \forall t \in [0, 1]$$

et

$$\frac{|(dF_i/dt)(t)|}{|(dF_{ih}/dt) i(t)|} - 1 = O(h^{p+1}); \qquad \forall t \in [0, 1].$$

On obtient donc :

$$|p_h q_h - r_h q_h|_{L^2(\Gamma)} \leqq C h^{p+1} |r_h q_h|_{L^2(\Gamma)}.$$

L'inégalité (3.9) s'en déduit en appliquant les inégalités inverses à la fonction $r_h q_h$.

PROPOSITION 3.2 : *On suppose que la frontière Γ est de classe C^{p+2} si q_h et q'_h sont deux éléments de l'espace V_h, on a la majoration*

$$|a(p_h q_h, p_h q'_h) - a_h(q_h, q'_h)| \leqq C h^{p+1} |q_h|_{L^2(\Gamma_h)} |q'_h|_{L^2(\Gamma_h)}. \tag{3.10}$$

Démonstration : Soient q_h et q'_h dans l'espace V_h. On a alors :

$$a(p_h q_h, p_h q'_h) - a_h(q_h, q'_h)$$
$$= \frac{1}{2\pi} \sum_{i,j=1}^{n} \int_0^1 \int_0^1 \hat{q}_h(t)\, \hat{q}'_h(s) \operatorname{Log} \frac{|x_h - y_h|}{|x-y|} \left|\frac{dF_{ih}}{dt}(t)\right| \left|\frac{dF_{jh}}{ds}(s)\right| dt\, ds,$$

où dans les systèmes de coordonnées locales :

$$x = F_i(t); \qquad x_h = F_{ih}(t); \qquad y = F_j(s); \qquad y_h = F_{jh}(s).$$

Il faudra donc majorer la quantité

$$\operatorname{Log} \frac{|x_h - y_h|}{|x-y|}; \qquad x \in \Gamma_i; \quad y \in \Gamma_j; \quad x_h \in \Gamma_{ih}; \quad y_h \in \Gamma_{jh}.$$

1) *Cas où $i = j$.*
Dans ce cas $x = F_i(t)$; $y = F_i(s)$.
Donc la quantité $|x-y|$ s'annule si t est égal à s.
De plus,

$$|F_i(t) - F_i(s)|^2 = h_i^2 (t-s)^2 + |f_i(t) - f_i(s)|^2;$$
$$|F_{ih}(t) - F_{ih}(s)|^2 = h_i^2 (t-s)^2 + |P_i(t) - P_i(s)|^2$$

et

$$f_i(t) - P_i(t) = \pi(t) f_i\left[0, \frac{1}{p}, \ldots, \frac{j}{p}, \ldots, 1, t\right],$$

où

$$\pi(t) = \prod_{j=0}^{p} \left(t - \frac{j}{p}\right); \qquad t \in [0, 1].$$

Notons

$$G(t) = \pi(t) f_i\left[0, \frac{1}{p}, \ldots, \frac{j}{p}, \ldots, 1, t\right]; \qquad t \in [0, 1].$$

La fonction f_i étant de classe C^{p+2} sur l'intervalle $[0, 1]$, G est de classe C^1 sur cet intervalle; de plus en utilisant les inégalités (2.6), on a la majoration

$$|G'(t)| \leqq Ch^{p+1}; \qquad \forall t \in [0, 1].$$

D'autre part, on a la relation

$$P_i(t) - P_i(s) = (f_i(t) - f_i(s)) - (G(t) - G(s)),$$

c'est-à-dire

$$P_i(t) - P_i(s) = (t-s)(f_i'(\xi) - G'(\xi')); \qquad \xi, \xi' \in [0, 1],$$

donc

$$\frac{|F_{ih}(t) - F_{ih}(s)|^2}{|F_i(t) - F_i(s)|^2} = \frac{h_i^2 + (f_i'(\xi) - G'(\xi'))^2}{h_i^2 + (f_i'(\xi))^2}.$$

Or

$$f_i'(\xi) = O(h^2); \qquad G'(\xi') = O(h^{p+1}).$$

On en déduit :

$$\mathrm{Log}\frac{|F_{ih}(t) - F_{ih}(s)|}{|F_i(t) - F_i(s)|} = O(h^{p+1}).$$

2) *Cas où* $j = i+1$ (*ou* $i-1$).

Dans ce cas, la quantité $|x-y|$ peut s'annuler en un point. Considérons le système d'axes orthonormés $(\vec{u}_i, \vec{v}_i)$ d'origine A_{i-1}, de vecteur unitaire $\vec{u}_i$ colinéaire à $\overrightarrow{A_{i-1} A_i}$. Les points A_{i-1}, A_i, A_{i+1} ont pour coordonnées dans ce système

$$A_{i-1} = (0, 0); \qquad A_i = (h_i, 0); \qquad A_{i+1} = (u_{i+1}, v_{i+1}),$$

avec la relation

$$(u_{i+1} - h_i)^2 + v_{i+1}^2 = h_{i+1}^2.$$

L'équation de la courbe Γ restreinte à Γ_i, Γ_{i+1} s'écrit dans ce système

$$\begin{cases} u = th_i, & 0 \leqq t \leqq \dfrac{u_{i+1}}{h_i}, \\ v = f_i(t). \end{cases}$$

L'équation de la courbe constituée par Γ_{ih} et $\Gamma_{i+1\,h}$ sera alors :

$$\begin{cases} u = th_i, & 0 \leqq t \leqq \dfrac{u_{i+1}}{h_i}, \\ v = P_i(t). \end{cases}$$

P_i est le polynôme d'interpolation de degré p de f_i entre 0 et 1 et entre 1 et u_{i+1}/h_i.

On a alors les relations

$$|x-y|^2=((1-t-s)h_i+su_{i+1})^2+\left(f_i\left(1+s\left(\frac{u_{i+1}}{h_i}-1\right)\right)-f_i(t)\right)^2;$$

$$|x_h-y_h|^2=((1-t-s)h_i+su_{i+1})^2+\left(P_i\left(1+s\left(\frac{u_{i+1}}{h_i}-1\right)\right)-P_i(t)\right)^2.$$

De plus, P_i étant le polynôme d'interpolation d'ordre p de f_i, on a les égalités

$$f_i(t)-P_i(t)=\prod_{j=0}^{p}\left(t-\frac{j}{p}\right)f_i\left[0,\frac{1}{p},\ldots,\frac{j}{p},\ldots,1,t\right];$$

$$f_i\left(1+s\left(\frac{u_{i+1}}{h_i}-1\right)\right)-P_i\left(1+s\left(\frac{u_{i+1}}{h_i}-1\right)\right)$$
$$=\left(\frac{u_{i+1}}{h_i}-1\right)^{p+1}\prod_{j=0}^{p}\left(s-\frac{j}{p}\right)$$
$$\times f_i\left[1,1+\frac{1}{p}\left(\frac{u_{i+1}}{h_i}-1\right)\ldots,\frac{u_{i+1}}{h_i},1+s\left(\frac{u_{i+1}}{h_i}-1\right)\right].$$

Considérons la fonction définie sur l'intervalle $[0, u_{i+1}/h_i]$ par

$$G(t)=\begin{cases}\displaystyle\prod_{j=0}^{p}\left(t-\frac{j}{p}\right)f_i\left[0,\frac{1}{p},\ldots,1,t\right]; \\ \qquad t\in[0,1]; \\ \displaystyle\prod_{j=0}^{p}\left[t-1-\frac{j}{p}\left(\frac{u_{i+1}}{h_i}-1\right)\right]f_i\left[1,1-\frac{1}{p}+\frac{1}{p}\frac{u_{i+1}}{h_i},\ldots,\frac{u_{i+1}}{h_i},t\right]; \\ \qquad t\in\left[1,\frac{u_{i+1}}{h_i}\right].\end{cases}$$

La fonction G est continue sur l'intervalle $[0, u_{i+1}/h_i]$; elle est dérivable sur cet intervalle, sauf au point 1; où elle admet cependant une dérivée à droite et une dérivée à gauche bornées; donc elle est lipschitzienne et

$$|G(u)-G(v)|\leqq|u-v|\sup_{\xi\in[u,v]}|G'_d(\xi)|.$$

La fonction f_i étant de classe C^{p+2}, en utilisant les majorations (2.6), on obtient :

$$|G(u)-G(v)| \leqq Ch^{p+1}|u-v|; \qquad \forall u, v \in \left[0, \frac{u_{i+1}}{h_i}\right].$$

De plus, il existe un point ξ dans l'intervalle $[0, u_{i+1}/h_i]$ tel que

$$f_i\left(1+s\left(\frac{u_{i+1}}{h_i}-1\right)\right)-f_i(t)=\left(1+s\left(\frac{u_{i+1}}{h_i}-1\right)-t\right)f_i'(\xi).$$

On en déduit les majorations

$$\frac{h_i^2+(f_i'(\xi)-Ch^{p+1})^2}{h_i^2+(f_i'(\xi))^2} \leqq \frac{|x_h-y_h|^2}{|x-y|^2} \leqq \frac{h_i^2+(f_i'(\xi)+Ch^{p+1})^2}{h_i^2+(f_i'(\xi))^2}.$$

Dans l'intervalle $[0, u_{i+1}/h_i]$, la dérivée f_i est de l'ordre de h^2; donc

$$\operatorname{Log}\frac{|x_h-y_h|}{|x-y|} = O(h^{p+1}); \qquad x \in \Gamma_i, \quad y \in \Gamma_{i+1}.$$

3) *Cas où $j \neq i$, $i-1$, $i+1$ (on peut supposer $i<j$).*

L'équation de la courbe Γ s'écrit

$$x=F(s); \qquad s \in [0, L(\Gamma)],$$

donc si x est sur l'arc de courbe, Γ_i,

$$x=F(g_i(t)); \qquad t \in [0, 1],$$

de même

$$y=F(g_j(s)); \qquad s \in [0, 1]; \quad y \in \Gamma_j,$$

donc

$$x-y=F(g_i(t))-F(g_j(s)).$$

En outre, pour tout point x de Γ_i, on a l'égalité

$$x_h-x=(P_i(t)-f_i(t))\vec{v_i}$$

($\vec{v_i}$, vecteur unitaire directement perpendiculaire à $\overrightarrow{A_{i-1}A_i}$) et pour tout point y de Γ_j, on a

$$y_h-y=(P_j(s)-f_j(s))\vec{v_j}$$

($\vec{v_j}$ vecteur unitaire directement perpendiculaire à $\overrightarrow{A_{j-1}A_j}$).

Or

$$P_i(t)-f_i(t)=O(h^{p+1}); \qquad \forall t\in[0,1];$$
$$P_j(s)-f_j(s)=O(h^{p+1}); \qquad \forall s\in[0,1],$$

donc

$$|x_h-y_h|^2=|x-y|^2+2(P_i(t)-f_i(t))\vec{v}_i.\overrightarrow{x-y}$$
$$+2(P_j(s)-f_j(s))\vec{v}_j.\overrightarrow{x-y}+O(h^{2p+2}).$$

En développant F en série de Taylor, on obtient :

$$\vec{v}_i(\overrightarrow{F(g_j(s))}-\overrightarrow{F(g_i(t))})$$
$$=(g_j(s)-g_i(t))\left\{\vec{F}'(g_i(t)).\vec{v}_i+\frac{1}{2}(g_j(s)-g_i(t))\vec{F}''(\xi)\vec{v}_i\right\},$$

où

$$\xi\in[g_i(t),g_j(s)].$$

D'après la théorie de l'interpolation, on a la majoration

$$|\overrightarrow{F'(g_i(t))}.\vec{v}_i|\leqq Ch.$$

On en déduit donc :

$$|\vec{v}_i.(\overrightarrow{F(g_j(s))}-\overrightarrow{F(g_i(t))})|\leqq c\,|g_j(s)-g_i(t)|^2.$$

On démontre de la même façon

$$|\vec{v}_j.(\overrightarrow{F(g_j(s))}-\overrightarrow{F(g_i(t))})|\leqq c\,|g_j(s)-g_i(t)|^2.$$

On a également

$$|\overrightarrow{F(g_j(s))}-\overrightarrow{F(g_i(t))}|\leqq c\,|g_j(s)-g_i(t)|^2.$$

On peut alors en déduire

$$1-Ch^{p+1}\leqq\frac{|x_h-y_h|^2}{|x-y|^2}\leqq 1+Ch^{p+1}.$$

Donc

$$\operatorname{Log}\frac{|x_h-y_h|}{|x-y|}=O(h^{p+1}).$$

Finalement, pour tout i, $j\,(1\leqq i,j\leqq n)$, on a la majoration

$$\left|\operatorname{Log}\frac{|x_h-y_h|}{|x-y|}\right|\leqq Ch^{p+1},$$

où dans les systèmes de coordonnées locales

$$x = F_i(t), \qquad x_h = F_{ih}(t); \qquad t \in [0, 1];$$
$$y = F_j(s), \qquad y_h = F_{jh}(s); \qquad s \in [0, 1].$$

On en déduit alors :

$$\begin{aligned} &|a(p_h q_h, p_h q'_h) - a_h(q_h, q'_h)| \\ &\leqq Ch^{p+1} \sum_{i,j=1}^{n} \int_0^1 \int_0^1 |q_h(t)| . |\hat{q}'_h(s)| . \left|\frac{dF_{ih}}{dt}(t)\right| . \left|\frac{dF_{jh}}{ds}(s)\right| dt\, ds \end{aligned}$$

et d'après la définition de $\hat{q}_h$:

$$|a(p_h q_h, p_h q'_h) - a_h(q_h, q'_h)| \leqq Ch^{p+1} |q_h|_{L^2(\Gamma_h)} |q'_h|_{L^2(\Gamma_h)}.$$

LEMME 3.4 : *Le problème approché* (2.1) *est coercif si h est suffisamment petit. Il existe une constante* β *positive telle que*

$$a_h(q_h, q_h) \geqq \beta \|r_h q_h\|^2_{H^{-1/2}(\Gamma)}; \qquad \forall q_h \in V_h. \tag{3.11}$$

Démonstration : En utilisant la proposition (3.2), on obtient la minoration

$$a_h(q_h, q_h) \geqq a(p_h q_h, p_h q_h) - Ch^{p+1} |q_h|^2_{L^2(\Gamma_h)}; \qquad \forall q_h \in V_h.$$

Or la fonction $p_h q_h$ est dans l'espace $H_0^{-1/2}(\Gamma)$ et la forme bilinéaire a est coercive sur cet espace; donc en utilisant le lemme (3.3), on obtient :

$$a_h(q_h, q_h) \geqq (\alpha - Ch^p) |q_h|^2_{L^2(\Gamma_h)}.$$

Le problème approché est donc coercif pour h assez petit.

THÉORÈME 3.1 : *Soit q la solution du problème exact* (1.6) *et* q_h *la solution du problème approché* (2.1)*; nous avons les estimations d'erreurs suivantes :*

$$\begin{aligned} &\|q - r_h q_h\|_{H^{-1/2}(\Gamma)} \\ &\leqq C\{ \inf_{q'_h \in V_h} [\|q - r_h q'_h\|_{H^{-1/2}(\Gamma)} + h^{p+1/2} |q'_h|_{L^2(\Gamma_h)}] \\ &\qquad + \|u_0 - r_h u_{0h}\|_{H^{1/2}(\Gamma)}\}. \end{aligned} \tag{3.12}$$

Démonstration : Soit q'_h dans l'espace V_h; on peut alors écrire :

$$\begin{aligned} a_h(q_h - q'_h, q_h - q'_h) &= a_h(q_h, q_h - q'_h) - a(q, p_h q_h - p_h q'_h) \\ &\quad + a(q - p_h q'_h, p_h q_h - p_h q'_h) \\ &\quad + a(p_h q'_h, p_h q_h - p_h q'_h) - a_h(q'_h, q_h - q'_h). \end{aligned}$$

La fonction q étant solution du problème exact et q_h solution du problème approché, en utilisant la proposition (3.2) et le lemme (3.4), on obtient la majoration

$$\begin{aligned}\beta \| r_h(q_h - q'_h) \|^2_{H^{-1/2}(\Gamma)} \\ \leq \left| (u_{0h}, q_h - q'_h)_{L^2(\Gamma_h)} - (u_0, p_h q_h - p_h q'_h)_{L^2(\Gamma)} \right| \\ + M \| q - p_h q'_h \|_{H^{-1/2}(\Gamma)} \| p_h(q_h - q'_h) \|_{H^{-1/2}(\Gamma)} \\ + C h^{p+1} | q'_h |_{L^2(\Gamma_h)} | q_h - q'_h |_{L^2(\Gamma_h)}.\end{aligned}$$

En utilisant alors les inégalités (3.5), (3.8), (3.9), il vient :

$$\begin{aligned}\| r_h(q_h - q'_h) \|_{H^{-1/2}(\Gamma)} \\ \leq C \Bigg\{ \| q - p_h q'_h \|_{H^{-1/2}(\Gamma)} + h^{p+1/2} | q'_h |_{L^2(\Gamma_h)} \\ + \frac{\left| (u_{0h}, q_h - q'_h)_{L^2(\Gamma_h)} - (u_0, p_h q_h - p_h q'_h)_{L^2(\Gamma)} \right|}{\| r_h(q_h - q'_h) \|_{H^{-1/2}(\Gamma)}} \Bigg\}.\end{aligned}$$

Il faut donc majorer la différence $| u_{0h}, q''_h)_{L^2(\Gamma_h)} - (u_0, p_h q''_h)_{(L^2 \Gamma)} |$ pour une fonction q''_h de l'espace V_h. On a

$$\begin{aligned}(u_{0h}, q''_h)_{L^2(\Gamma_h)} - (u_0, p_h q''_h)_{L^2(\Gamma)} \\ = \sum_{i=1}^{n} \int_0^1 \left(\hat{u}_{0h}(t) \hat{q}''_h(t) \left| \frac{dF_{ih}}{dt}(t) \right| - \tilde{u}_0(t) p_h \tilde{q}''_h(t) \left| \frac{dF_i}{dt}(t) \right| \right) dt \\ = \sum_{i=1}^{n} \int_0^1 (u_{0h}(t) - \tilde{u}_0(t)) \hat{q}''_h(t) \left| \frac{dF_{ih}}{dt}(t) \right| dt\end{aligned}$$

et d'après la définition de r_h :

$$(u_{0h}, q''_h)_{L^2(\Gamma_h)} - (u_0, p_h q''_h)_{L^2(\Gamma)} = (r_h u_{0h} - u_0, p_h q''_h)_{L^2(\Gamma)},$$

d'où

$$\left| (u_{0h}, q''_h)_{L^2(\Gamma_h)} - (u_0, p_h q''_h)_{L^2(\Gamma)} \right| \leq C \| r_h u_{0h} - u_0 \|_{H^{1/2}(\Gamma)} \| r_h q''_h \|_{H^{-1/2}(\Gamma)}.$$

On en déduit, pour tout élément q'_h de V_h :

$$\begin{aligned}\| r_h(q_h - q'_h) \|_{H^{-1/2}(\Gamma)} \\ \leq C \{ \| q - p_h q'_h \|_{H^{-1/2}(\Gamma)} + h^{p+1/2} | q'_h |_{L^2(\Gamma_h)} + \| u_0 - r_h u_{0h} \|_{H^{1/2}(\Gamma)} \}.\end{aligned}$$

La majoration (3.2) s'obtient alors en utilisant une inégalité triangulaire.

LEMME 3.5 : *Soit s_h l'opérateur de projection orthogonale de $L^2(\Gamma)$ sur l'espace $r_h V_h$. On a les inégalités suivantes :*

Dans le premier cas ($V_h \subset L^2(\Gamma)$) :

$$\| q - s_h q \|_{H^t(\Gamma)} \leqq C h^{s-t} \| q \|_{H^s(\Gamma)}, \tag{3.13}$$

si

$$-1 \leqq t \leqq 0 \leqq s \leqq 1.$$

Dans le second cas ($V_h \subset H^1(\Gamma)$) :

$$\| q - s_h q \|_{H^t(\Gamma)} \leqq C \{ h^{s-t} \| q \|_{H^s(\Gamma)} + h^{p+1} | q |_{L^2(\Gamma)} \},$$

si

$$0 \leqq t \leqq 1; \; 0 \leqq s \leqq k-1.$$

$$\| q - s_h q \|_{H^t(\Gamma)} \leqq C \{ h^{s-t} \| q \|_{H^s(\Gamma)} + h^{p+1-t} | q |_{L^2(\Gamma)} \},$$

si

$$-1 \leqq t \leqq 0; \; 0 \leqq s \leqq k+1.$$

Démonstration : Dans le premier cas, l'opérateur s_h est défini pour toute fonction q de l'espace $L^2(\Gamma)$ par

$$(s_h q)_i = \frac{1}{L(\Gamma_i)} \int_\Gamma q(x) \, d\gamma(x).$$

Cet opérateur laisse invariantes les constantes sur chaque arc de courbe Γ_i, on en déduit donc [13] :

$$| q - s_h q |_{L^2(\Gamma)} \leqq C | q |_{L^2(\Gamma)}; \qquad \forall q \in L^2(\Gamma);$$

$$| q - s_h q |_{L^2(\Gamma)} \leqq C h \| q \|_{H^1(\Gamma)}; \qquad \forall q \in H^1(\Gamma).$$

En outre, s_h étant un projecteur, l'opérateur $I - s_h$ est auto-adjoint dans l'espace $L^2(\Gamma)$, d'où :

$$\| q - s_h q \|_{H^{-1}(\Gamma)} = \sup_{\varphi \in H^1(\Gamma)} \frac{(q - s_h q, \varphi)_{L^2(\Gamma)}}{\| \varphi \|_{H^1(\Gamma)}}$$

$$= \sup_{\varphi \in H^1(\Gamma)} \frac{(q - s_h q, \varphi - s_h \varphi)_{L^2(\Gamma)}}{\| \varphi \|_{H^1(\Gamma)}},$$

c'est-à-dire

$$\| q - s_h q \|_{H^{-1}(\Gamma)} \leqq C h^2 \| q \|_{H^1(\Gamma)}.$$

Le résultat général s'en déduit immédiatement en utilisant la proposition (3.1).

Dans le deuxième cas, si $\hat{q}$ est une fonction définie sur l'intervalle $[0, 1]$, son $\hat{P}_k$-interpolé de Lagrange $\hat{\pi}_h \hat{q}$ est la fonction de l'espace $\hat{P}_k$ qui interpole $\hat{p}$ aux points j/k $(0 \leqq j \leqq k)$. Si q est une fonction définie sur Γ_i, on définit la fonction $\pi_h^i q$ par

$$\widetilde{\pi_h^i q} = \hat{\pi}_h \hat{q}, \qquad \text{c'est-à-dire} \quad \pi_h^i q \circ F_i = \hat{\pi}_h (q \circ F_i).$$

Si la fonction q est définie sur Γ, on définit alors $\pi_h q$ comme la fonction dont les restrictions à chacun des arcs Γ_i $(1 \leqq i \leqq n)$ sont $\pi_h^i q$.

On a alors :

$$\pi_h q = r_h q_h^*,$$

où

$$q_h^*(F_{ih}(t)) = \pi_h^i q(F_i(t)); \qquad t \in [0, 1] \qquad (1 \leqq i \leqq n)$$

et $q_h^* \circ F_{ih}$ est dans l'espace $\hat{P}_k$, mais la fonction q_h^* n'est pas dans l'espace V_h; car son intégrale sur Γ_h n'est pas nulle; on pose alors :

$$q_h = q_h^* - \int_{\Gamma_h} q_h^*(x)\, d\gamma_h(x).$$

La fonction q_h est dans l'espace V_h et

$$r_h q_h = \pi_h q - \int_{\Gamma_h} q_h^*(x)\, d\gamma(x) = (\pi_h q)^*.$$

En outre, on a

$$\begin{aligned}\int_{\Gamma_h} & q_h^*(x)\, d\gamma_h(x) \\ &= \sum_{i=1}^{n} \int_0^1 \pi_h^i q \circ F_i(t) \left| \frac{dF_{ih}}{dt}(t) \right| dt \\ &= \int_{\Gamma} \pi_h q(x)\, d\gamma(x) + \sum_{i=1}^{n} \int_0^1 \pi_h^i q \circ F_i \left(\frac{|(dF_{ih}/dt)(t)|}{|(dF_i/dt)(t)|} - 1 \right) \left| \frac{dF_i}{dt}(t) \right| dt.\end{aligned}$$

En utilisant le lemme 3.3, on obtient :

$$\left| \int_{\Gamma_h} q_h^*(x)\, d\gamma_h(x) \right| \leqq C \{ | q - \pi_h q |_{L^2(\Gamma)} + h^{p+1} | q |_{L^2(\Gamma)} \}. \tag{3.14}$$

D'autre part, si la fonction q est dans l'espace $H^{k+1}(\Gamma)$, on a alors les majorations suivantes pour $0 \leqq m \leqq k+1$ [14] :

$$\begin{aligned}\left| \frac{d^m}{ds^m}(q - \pi_h^i q) \right|_{L^2(\Gamma_i)} &\leqq C \left(\sup_{t \in [0,1]} \frac{dg_i}{dt}(t) \Big/ \inf_{t \in [0,1]} \frac{dg_i}{dt}(t) \right)^{1/2} \\ &\times \sum_{l=1}^{m} \sum_{j \in J(l,m)} \left\{ \sup_{s_{i-1} \leqq s \leqq s_i} \left| \frac{dg_i^{-1}}{ds}(s) \right|^{j_1} \cdots \left| \frac{d^m}{ds^m} g_i^{-1}(s) \right|^{j_m} \right\} \\ &\times \left[\sum_{l=1}^{k+1} \left| \frac{d^l q}{ds^l} \right|_{L^2(\Gamma_i)} \left\{ \sum_{j' \in J(l,k+1)} \sup_{t \in [0,1]} \left| \frac{dg_i}{dt}(t) \right|^{j'_1} \cdots \left| \frac{d^{k+1}}{dt^{k+1}} g_i(t) \right|^{j'_{k+1}} \right\} \right],\end{aligned}$$

où

$$J(l, m) = \{ j = (j_1 \ldots j_m) / j_1 + \ldots + j_m = l,\ j_1 + 2j_2 + \ldots + m j_m = m \}.$$

En utilisant alors les lemmes (2.1) et (2.2), il vient :

$$\left| \frac{d^m}{ds^m}(q-\pi_h^i q) \right|_{L^2(\Gamma_i)} \leqq C h^{k+1-m} \| q \|_{H^{k+1}(\Gamma_i)},$$

en sommant alors sur tous les indices i et en utilisant (3.14), on obtient :

$$\left\{ \begin{aligned} & | q-(\pi_h q)^* |_{L^2(\Gamma)} \leqq C \{ h^{k+1} \| q \|_{H^{k+1}(\Gamma)} + h^{p+1} | q |_{L^2(\Gamma)} \}; \quad (3.15) \\ & \| q-(\pi_h q)^* \|_{H^1(\Gamma)} \leqq C \{ h^k \| q \|_{H^k(\Gamma)} + h^{p+1} | q |_{L^2(\Gamma)} \}; \\ & \left(\sum_{i=1}^n \| q-(\pi_h q)^* \|_{H^m(\Gamma_i)}^2 \right)^{1/2} \leqq C \{ h^{k+1-m} \| q \|_{H^{k+1}(\Gamma)} + h^{p+1} | q |_{L^2(\Gamma)} \} \\ & \qquad (1 \leqq m \leqq k+1). \end{aligned} \right.$$

Le résultat ne s'étend pas au cas où le paramètre m est négatif; c'est pourquoi, on utilise le projecteur s_h de $L^2(\Gamma)$ sur $r_h V_h$. Par définition de s_h,

$$| q-s_h q |_{L^2(\Gamma)} \leqq | q-(\pi_h q)^* |_{L^2(\Gamma)} \leqq C \{ h^{k+1} \| q \|_{H^{k+1}(\Gamma)} + h^{p+1} | q |_{L^2(\Gamma)} \}; \quad \forall q \in H^{k+1}(\Gamma).$$

De plus, nous avons :

$$\left(\sum_{i=1}^n \| q-s_h q \|_{H^m(\Gamma_i)}^2 \right)^{1/2} \leqq \left(\sum_{i=1}^n \| q-(\pi_h q)^* \|_{H^m(\Gamma_i)}^2 \right) + \left(\sum_{i=1}^n \| (\pi_h q)^* - s_h q \|_{H^m(\Gamma_i)}^2 \right)^{1/2},$$

d'où en utilisant les inégalités (3.7) et (3.15) :

$$\left(\sum_{i=1}^n \| q-s_h q \|_{H^m(\Gamma_i)}^2 \right)^{1/2} \leqq C \{ h^{k+1-m} \| q \|_{H^{k+1}(\Gamma)} + h^{p+1} | q |_{L^2(\Gamma)} \}.$$

Le résultat général s'en déduit pas dualité et interpolation en utilisant le fait que l'opérateur $I\text{-}s_h$ est auto-adjoint dans l'espace $L^2(\Gamma)$.

THÉORÈME 3.2 : *Soit q la solution du problème exact* (1.6), *q_h la solution du problème approché* (2.1)*; si la fonction q est dans l'espace $H^s(\Gamma)$, on a les majorations suivantes :*

$$\left. \begin{aligned} & \| q-r_h q_h \|_{H^t(\Gamma)} \\ & \quad \leqq C \{ h^{s-t} \| q \|_{H^s(\Gamma)} + h^{p-t} | q |_{L^2(\Gamma)} + h^{-t-1/2} \| u_0 - r_h u_{0h} \|_{H^{1/2}(\Gamma)} \}, \\ & -\frac{1}{2} \leqq t \leqq 0; \quad t \leqq s \leqq 1, \quad \textit{dans le premier cas } (V_h \subset L^2(\Gamma)); \\ & -\frac{1}{2} \leqq t \leqq 1; \quad t \leqq s \leqq k+1, \quad \textit{dans le second cas } (V_h \subset H^1(\Gamma)). \end{aligned} \right\} \quad (3.16)$$

Démonstration : D'après le théorème (3.1) pour $t = -1/2$, on a la majoration

$$\|q - r_h q_h\|_{H^{-1/2}(\Gamma)} \leqq C\{\|q - s_h q\|_{H^{-1/2}(\Gamma)} + h^{p+1/2}|s_h q|_{L^2(\Gamma)} + \|u_0 - r_h u_{0h}\|_{H^{1/2}(\Gamma)}\},$$

d'où avec la majoration (3.13) :

$$\|q - r_h q_h\|_{H^{-1/2}(\Gamma)} \leqq C\{h^{s+1/2}\|q\|_{H^s(\Gamma)} + h^{p+1/2}|q|_{L^2(\Gamma)} + \|u_0 - r_h u_{0h}\|_{H^{1/2}(\Gamma)}\}.$$

En outre,

$$\|q - r_h q_h\|_{H^t(\Gamma)} \leqq \|q - s_h q\|_{H^t(\Gamma)} + C h^{-t-1/2}\|s_h q - r_h q_h\|_{H^{-1/2}(\Gamma)};$$

$$-\frac{1}{2} \leqq t \leqq 0, \quad \text{dans le premier cas,}$$

$$-\frac{1}{2} \leqq t \leqq 1, \quad \text{dans le second cas.}$$

En utilisant alors les inégalités (3.13), on obtient le résultat :

THÉORÈME 3.3 : *Soit la fonction u définie par l'expression* (1.5) *et la fonction u_h suivante :*

$$u_h(x) = \frac{1}{2\pi}\int_{\Gamma_h} q_h(y)\,\mathrm{Log}\,\frac{1}{|x-y|}\,d\gamma_h(y).$$

Alors pour x tel que $d(x, \Gamma) \geqq \delta > 0$ et h assez petit, on a

$$|u(x) - u_h(x)| \leqq \left(\frac{C_1}{d(x,\Gamma)} + C_2\right)\{h^{p+1}|q|_{L^2(\Gamma)} + h^{s+1}\|q\|_{H^s(\Gamma)} + \|u_0 - r_h u_{0h}\|_{L^2(\Gamma)} + \sqrt{h}\,\|u_0 - r_h u_{0h}\|_{H^{1/2}(\Gamma)}\}. \quad (3.17)$$

$$\left.\begin{aligned} &|D^\alpha u(x) - D^\alpha u_h(x)| \\ &\leqq \frac{C}{(d(x,\Gamma))^{|\alpha|} + (d(x,\Gamma))^{|\alpha|+1}}\{h^{p+1}|q|_{L^2(\Gamma)} \\ &\quad + h^{s+1}\|q\|_{H^s(\Gamma)} + \|u_0 - r_h u_{0h}\|_{L^2(\Gamma)} + \sqrt{h}\,\|u_0 - r_h u_{0h}\|_{H^{1/2}(\Gamma)}\}; \\ &\qquad 0 \leqq s \leqq 1 \quad \textit{dans le premier cas,} \\ &\qquad 0 \leqq s \leqq k+1 \quad \textit{dans le second cas.} \end{aligned}\right\} \quad (3.18)$$

Démonstration : On calcule d'abord l'erreur entre q et $p_h\, q_h$ dans l'espace $H^{-1}(\Gamma)$:

$$\|q-p_h q_h\|_{H^{-1}(\Gamma)} = \sup_{\varphi\in H^1(\Gamma)} \frac{(q-p_h q_h, \varphi)_{L^2(\Gamma)}}{\|\varphi\|_{H^1(\Gamma)}}.$$

Soit alors la fonction g de l'espace $L_0^2(\Gamma)$:

$$\left(L_0^2(\Gamma)=\left\{g\in L^2(\Gamma);\ \int_\Gamma g(x)\,d\gamma(x)=0\right\}\right),$$

définie par

$$\varphi(x)=\frac{1}{2\pi}\int_\Gamma g(y)\,\mathrm{Log}\,\frac{1}{|x-y|}\,d\gamma(y);\qquad \forall x\in\Gamma.$$

D'après le théorème 1.2, on a la majoration

$$\|g\|_{L^2(\Gamma)} \leqq C\,\|\varphi\|_{H^1(\Gamma)/P_0},$$

d'où

$$\|q-p_h q_h\|_{H^{-1}(\Gamma)} \leqq C \sup_{g\in L_0^2(\Gamma)} \frac{a(q-p_h q_h, g)}{\|g\|_{L^2(\Gamma)}}.$$

Soit $s_h\, g$ la projection de g sur l'espace $r_h\, V_h$; alors il existe g_h dans l'espace V_h telle que : $s_h\, g = r_h\, g_h$.

On calcule alors :

$$a(q-p_h q_h, g)=a(q-p_h q_h, g-p_h g_h)+a(q-p_h q_h, p_h g_h).$$

Le premier terme se majore par

$$C\,\|q-p_h q_h\|_{H^{-1/2}(\Gamma)}\,\|g-p_h g_h\|_{H^{-1/2}(\Gamma)}$$

et en utilisant les lemmes 3.5 et 3.3. :

$$|a(q-p_h q_h, g-p_h g_h)| \leqq C\sqrt{h}\,\|q-p_h q_h\|_{H^{-1/2}(\Gamma)}\,|g|_{L^2(\Gamma)}.$$

Le deuxième terme s'écrit :

$$(u_0, p_h g_h)_{L^2(\Gamma)}-(u_{0h}, g_h)_{L^2(\Gamma_h)}+a_h(q_h, g_h)-a(p_h q_h, p_h g_h)$$
$$=(u_0-r_h u_{0h}, p_h g_h)_{L^2(\Gamma)}+a_h(q_h, g_h)-a(p_h q_h, p_h g_h).$$

On majore alors en utilisant la proposition 3.2 par

$$C(\|u_0-r_h u_{0h}\|_{L^2(\Gamma)}+h^{p+1}\,|q_h|_{L^2(\Gamma_h)}\,|g|_{L^2(\Gamma)}.$$

On en déduit donc :

$$\begin{aligned}
&\| q-p_h q_h \|_{H^{-1}(\Gamma)} \\
&\leqq C\{ h^{p+1} | q |_{L^2(\Gamma)} + h^{s+1} \| q \|_{H^s(\Gamma)} + \| u_0 - r_h u_{0h} \|_{L^2(\Gamma)} \\
&\qquad + \sqrt{h} \| u_0 - r_h u_{0h} \|_{H^{1/2}(\Gamma)} \};
\end{aligned}$$

$$0 \leqq s \leqq 1 \quad \text{dans le premier cas,}$$

$$0 \leqq s \leqq k+1 \quad \text{dans le second cas.}$$

D'autre part, on a

$$u_h(y) = \frac{1}{2\pi} \sum_{i=1}^{n} \int_0^1 q_h(F_{ih}(t)) \operatorname{Log} \frac{1}{|F_{ih}(t)-y|} \left| \frac{dF_{ih}}{dt}(t) \right| dt;$$

$$\begin{aligned}
u_h(y) &= \frac{1}{2\pi} \int_\Gamma p_h q_h(x) \operatorname{Log} \frac{1}{|x-y|} \, d\gamma(x) \\
&\quad + \frac{1}{2\pi} \sum_{i=1}^{n} \int_0^1 q_h(F_{ih}(t)) \operatorname{Log} \frac{|F_i(t)-y|}{|F_{ih}(t)-y|} \left| \frac{dF_{ih}}{dt}(t) \right| dt,
\end{aligned}$$

c'est-à-dire

$$\begin{aligned}
u(y) - u_h(y) &= \frac{1}{2\pi} \int_\Gamma (q(x) - p_h q_h(x)) \operatorname{Log} \frac{1}{|x-y|} \, d\gamma(x) \\
&\quad + \frac{1}{2\pi} \sum_{i=1}^{n} \int_0^1 q_h(F_{ih}(t)) \operatorname{Log} \frac{|F_i(t)-y|}{|F_{ih}(t)-y|} \left| \frac{dF_{ih}}{dt}(t) \right| dt.
\end{aligned}$$

On utilise alors le fait que la distance de x à Γ est plus grande que δ fixé, donc nous avons

$$\left| \operatorname{Log} \frac{|F_i(t)-y|}{|F_{ih}(t)-y|} \right| \leqq C \frac{h^{p+1}}{d(y, \Gamma)}.$$

D'autre part, soit x_0 un point de Γ tel que $|y-x_0| = d(y, \Gamma)$, comme la fonction $q-p_h q_h$ est d'intégrale nulle sur Γ, on en déduit :

$$\begin{aligned}
&\int_\Gamma (q(x) - p_h q_h(x)) \operatorname{Log} \frac{1}{|x-y|} \, d\gamma(x) \\
&= \int_\Gamma (q(x) - p_h q_h(x)) \operatorname{Log} \frac{|y-x_0|}{|y-x|} \, d\gamma(x)
\end{aligned}$$

et

$$\left\| \operatorname{Log} \frac{|y-x_0|}{|y-x|} \right\|_{H^1(\Gamma)} \leqq \frac{C}{d(y, \Gamma)},$$

donc

$$\begin{aligned}&|u_h(y)-u(y)|\\&\leqq\left(\frac{C_1}{d(y,\Gamma)}+C_2\right)\{h^{p+1}|q|_{L^2(\Gamma)}+h^{s+1}\|q\|_{H^s(\Gamma)}\\&\qquad+\|u_0-r_h u_{0h}\|_{L^2(\Gamma)}+\sqrt{h}\|u_0-r_h u_{0h}\|_{H^{1/2}(\Gamma)}\};\end{aligned}$$

$0\leqq s\leqq 1$ dans le premier cas;

$0\leqq s\leqq k+1$ dans le second cas.

On a également :

$$\operatorname{grad} u(y)=\frac{1}{2\pi}\int_\Gamma q(x)\frac{y-x}{|y-x|^2}d\gamma(x);$$

$$\operatorname{grad} u_h(y)=\frac{1}{2\pi}\int_{\Gamma_h} q_h(x)\frac{y-x}{|y-x|^2}d\gamma_h(x).$$

La différence se majore de la même façon que dans le cas de u; le résultat sur les dérivées d'ordre supérieur est analogue.

Remarque 1 : On n'a pas obtenu d'estimation au voisinage de la surface Γ; la difficulté provient du fait que le gradient u subit une discontinuité à la traversée de la surface Γ, tandis que le gradient de u_h a une discontinuité à la traversée de Γ_h; donc l'erreur est très mauvaise pour un point x entre Γ et Γ_h.

Par contre, si on pose

$$u_h(x)=\frac{1}{2}\int_\Gamma p_h q_h(y)\operatorname{Log}\frac{1}{|x-y|}d\gamma(y),$$

on obtient une erreur en $h^{p+1/2}+h^{k+3/2}$ dans l'espace $W^1(\mathbf{R}^2)/P_0$.

Remarque 2 : Si la fonction q est dans l'espace $H^{k+1}(\Gamma)$, on a donc la majoration

$$\begin{aligned}&|u(x)-u_h(x)|\\&\leqq\left(\frac{C_1}{d(x,\Gamma)}+C_2\right)\{h^{p+1}|q|_{L^2(\Gamma)}+h^{k+2}\|q\|_{H^{k+1}(\Gamma)}\\&\qquad+\|u_0-r_h u_{0h}\|_{L^2(\Gamma)}+\sqrt{h}\|u_0-r_h u_{0h}\|_{H^{1/2}(\Gamma)}\}.\end{aligned}$$

La précision maximale est donc obtenue quand p est égal à $k+1$; donc quand la frontière est approchée par des éléments courbes d'ordre p, il faudrait approcher q par des polynômes en t de degré $p-1$; ceci est une généralisation du résultat annoncé par Hess ([8]), dans le cas d'approximation d'ordre un par différence finie.

IV. EXEMPLES NUMÉRIQUES

Ils ont été traités avec des éléments droits et des éléments courbes d'ordre deux; l'espace V_h est constitué de fonctions constantes par morceaux ou linéaires affines par morceaux.

Soient $(w_j)_{1 \leq j \leq n \leq 1}$ les fonctions de base de l'espace V_h; la méthode variationnelle nous conduit alors à la résolution du système linéaire

$$\sum_{i=1}^{n-1} \lambda_i a_{ij} = b_j; \qquad 1 \leqq j \leqq n-1,$$

où les coefficients a_{ij} et b_j sont définis par

$$a_{ij} = \frac{1}{2\pi} \int_{\Gamma_h} \int_{\Gamma_h} w_i(x) w_j(y) \operatorname{Log} \frac{1}{|x-y|} d\gamma_h(x) d\gamma_h(y);$$

$$1 \leqq i, j \leqq n-1;$$

$$b_j = \int_{\Gamma_h} u_{0h}(y) w_j(y) d_h(y); \qquad 1 \leqq j \leqq n-1.$$

Dans le cas où V_h est l'ensemble des fonctions constantes par morceaux, d'intégrale nulle sur Γ_h, le calcul des coefficients a_{ij} se ramène au calcul des intégrales

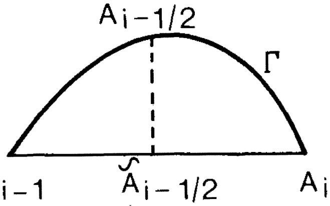
$$\int_0^1 \int_0^1 \operatorname{Log} \frac{1}{|x(\sigma)-y(\tau)|^2} d\sigma \, d\tau,$$

où

$$|x(\sigma)-y(\tau)| = |\sigma \overrightarrow{A_{i-1} A_i} - \tau \overrightarrow{A_{j-1} A_j} + \overrightarrow{A_{j-1} A_{i-1}}|;$$

pour les éléments droits;

$$|x(\sigma)-y(\tau)|$$
$$= |\sigma \overrightarrow{A_{i-1} A_i} - \tau \overrightarrow{A_{j-1} A_j} + 4\sigma(1-\sigma) \overrightarrow{\tilde{A}_{i-1/2} A_{i-1/2}} - 4\tau(1-\tau) \overrightarrow{\tilde{A}_{j-1/2} A_{j-1/2}}|$$



pour les éléments courbes; $\tilde{A}_{i-1/2}$ est le milieu du segment $A_{i-1} A_i$ et $A_{i-1/2}$ le point d'intersection de la perpendiculaire en $\tilde{A}_{i-1/2}$ à $A_{i-1} A_i$ avec la frontière Γ.

Dans le cas où V_h est l'ensemble des fonctions affines par morceaux, d'intégrale nulle sur Γ_h, le calcul des coefficients a_{ij} se ramène au calcul des intégrales

$$\int_0^1 \int_0^1 \sigma\tau \operatorname{Log} \frac{1}{|x(\sigma)-y(\tau)|} d\sigma \, d\tau;$$

$$\int_0^1 \int_0^1 (1-\sigma)\tau \operatorname{Log} \frac{1}{|x(\sigma)-y(\tau)|} d\sigma\, d\tau;$$

$$\int_0^1 \int_0^1 (1-\sigma)(1-\tau) \operatorname{Log} \frac{1}{|x(\sigma)-y(\tau)|} d\sigma\, d\tau,$$

où la fonction $(\sigma, \tau) \mapsto |x(\sigma)-y(\tau)|$ est la même que dans le cas des fonctions constantes par morceaux.

Si i est égal à j, ces intégrales sont des intégrales singulières calculées, exactement dans le cas des éléments droits et avec une erreur en h^2 dans le cas des éléments courbes d'ordre 2. Sinon, on utilise une formule d'intégration d'ordre deux sur le carré $[0, 1] \times [0, 1]$. (Pour le détail du calcul de ces coefficients a_{ij}, *voir* [11].)

1er exemple

L'ouvert Ω est l'ellipse d'équation $(x^2/R^2)+y^2 = 1$. Le potentiel u_0 sur la frontière est donné par

$$u_0(x, y) = \frac{x}{R}.$$

Pour calculer le potentiel dans l'espace, on se ramène au cas du cercle de centre 0 et de rayon 1, par une transformation de Joukowski. On obtient :

$$u(x, y) = \frac{x}{R}; \qquad \text{si} \quad (x, y) \in \Omega,$$

$$u(x, y) = \frac{1}{R-1}\left(x - sg(x) \times \left[\frac{((x^2-y^2-R^2+1)^2+4x^2y^2)^{1/2}+(x^2-y^2-R^2+1)}{2}\right]^{1/2}\right),$$

si

$$(x, y) \in \Omega^c.$$

La charge électrique q vaut alors, si (x, y) est un point de la frontière Γ :

$$q(x, y) = \left(\frac{1}{R}+1\right)\frac{x}{R^2(\sqrt{x^2/R^4})+y^2}.$$

On choisit comme points A_i sur la frontière les points de coordonnées

$$A_i = \left(R\cos\frac{i\pi}{n}, \sin\frac{i\pi}{n}\right) \qquad (1 \leqq i \leqq n).$$

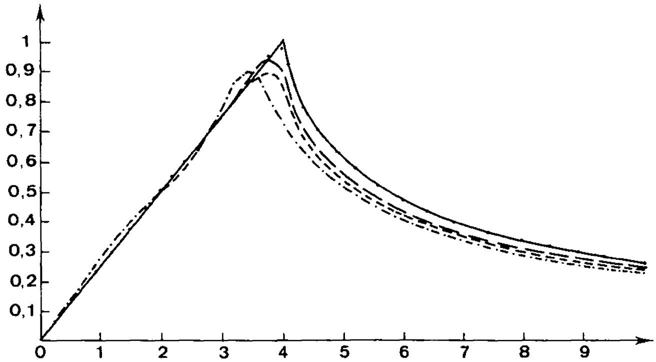


Figure 1.

Éléments droits fonctions constantes - - - .
Éléments droits fonctions affines — — —.
Éléments courbes fonctions constantes ou affines —•—•—, collocation •-•-•-•-•, solution exacte ———.

Les essais numériques ont été faits avec n égal à 8 et 16. Le potentiel u est calculé sur l'axe des x sur l'intervalle $[0, 10]$ et :

$$u(x, 0) = \frac{x}{R}; \qquad x \leqq R;$$

$$u(x, 0) = \frac{1}{R-1}(x - \sqrt{x^2 - R^2 + 1}); \qquad x \geqq R.$$

Dans le cas où R est égal à 4, on obtient les erreurs relatives :

		$n = 8$	$n = 16$
	$h_0 = \min\limits_{1 \leqq i \leqq n} h_i$ $h = \max\limits_{1 \leqq i \leqq n} h_i$	1,368 2,844	0,489 1,533
Éléments droits	Fonctions constantes Fonctions affines	0,15 0,10	0,045 0,035
Éléments courbes	Fonctions constantes Fonctions affines	0,05 0,05	0,01 0,01

C'est sur la frontière Γ que l'erreur est maximale. La figure 1 représente les résultats obtenus dans le cas où n est égal à 8. Les deux courbes sont pratiquement confondues dans le cas des éléments courbes. Cet exemple montre l'importance de l'approximation de la frontière Γ; les éléments courbes avec des fonctions constantes par morceaux donnant des résultats meilleurs que les éléments droits, même avec des fonctions affines.

2e exemple

L'ouvert Ω est le cercle de centre 0, de rayon 1. Le potentiel u_0 sur la frontière est donné par

$$u_0(x, y) = \begin{cases} x^4, & \text{si } x \geqq 0, \\ 0, & \text{si } x \leqq 0. \end{cases}$$

Pour calculer le potentiel dans l'espace, on utilise les coordonnées polaires

$$\begin{cases} x = \rho \cos \varphi, \\ y = \rho \sin \varphi. \end{cases}$$

Alors en développant u_0 en série de Fourier, on obtient :

$$u(\rho, \varphi) = \frac{3}{16} + \rho^2 \frac{\cos 2\varphi}{4} + \rho^4 \frac{\cos 4\varphi}{16} + \frac{1}{2\pi} \times \sum_{k=0}^{+\infty} (-1)^k \left\{ \frac{1}{2} \frac{(2k+1)}{(2k+5)(2k-3)} - \frac{2(2k+1)}{(2k+3)(2k-1)} - \frac{3}{2(2k+1)} \right\} \rho^{2k+1} \cos(2k+1)\varphi$$

$$\text{si} \quad \rho \leqq 1.$$

Si ρ est supérieur à 1, il suffit de remplacer ρ par $1/\rho$ dans l'expression précédente pour obtenir le potentiel à l'extérieur de l'ouvert. Les points A_i sont les mêmes que précédemment avec n égal à 8 et 16. La méthode numérique calcule alors :

$$\tilde{u}(x) = \frac{1}{2\pi} \int_\Gamma q(y) \operatorname{Log} \frac{1}{|x-y|} \, d\gamma(y),$$

c'est une fonction qui tend vers 0 à l'infini et qui est égale à u_0 à une constante près. Dans le cas du cercle, en développant u en série de Fourier, on voit immédiatement que cette constante est le terme constant de la série de Fourier, c'est-à-dire :

$$\frac{1}{L(\Gamma)} \int_\Gamma u_0(x, y) \, d\gamma.$$

La méthode numérique nous donnera donc ici la valeur $u-(3/16)$ en tout point de l'espace. Le potentiel u est calculé sur les deux segments suivants :

segment 1 : c'est le segment $[0, 10]$ de l'axe des x;
segment 2 : c'est le segment $[-2, +8]$ de la droite $x = 1$.

On obtient les erreurs relatives :

		Segment 1		Segment 2	
		$n = 8$	$n = 16$	$n = 8$	$n = 16$
	h	0,765 4	0,390 2	0,765 4	0,390 2
Éléments droits	Fonctions constantes Fonctions affines	0,4 0,25	0,08 0,07	0,4 0,3	0,08 0,08
Éléments courbes	Fonctions constantes Fonctions affines	0,25 0,01	0,04 0,002	0,25 0,03	0,04 0,006

Les figures 2 et 3 représentent les fonctions u calculées sur chacun des deux segments quand n est égal à 8.

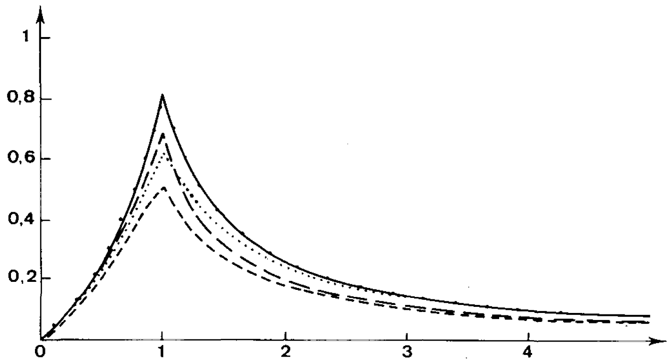


Figure 2.

Potentiel u sur l'axe x.

Éléments droits, fonctions constantes ----.
Éléments droits, fonctions affines ----.

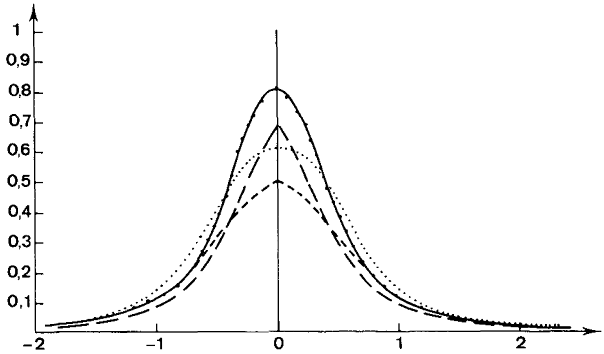


Figure 3.

Potentiel sur la droite $x = 1$.

Éléments courbes, fonctions constantes ----.
Éléments courbes, fonctions affines ----, solution exacte ——.

En comparant les différentes méthodes, on remarque donc que les éléments courbes avec des fonctions affines par morceaux donnent de très bons résultats avec n égal à 8, même si le pas h est grand. Cette méthode est nettement meilleure que les trois autres qui, dans l'exemple 2 donnent le potentiel avec une erreur du même ordre. Ceci correspond au résultat obtenu théoriquement.

BIBLIOGRAPHIE

1. P. Bolley et J. Camus, *Quelques résultats sur les espaces de Sobolev avec poids.* Publications des séminaires de Mathématiques, Rennes, 1968-1969.
2. P. L. Butzer et H. Berens, *Semi-groups of Operators and Approximations,* Springer-Verlag, Berlin, 1967.
3. P. G. Ciarlet et P. A. Raviart, *General Lagrange and Hermite Interpolation in R^n with Applications to Finite Element Methods,* Arch. Rat. Mech. Anal., vol. 46, 1972, 177-199.
4. P. J. Davis et P. Rabinowitz, *Ignoring the Singularity in Numerical Integration,* J. SIAM, Ser. B, Numer. Anal., vol. 2, 1965, p. 367-383.
5. J. Deny et J. L. Lions, *Les espaces du type Beppo-Levi,* Ann. Inst. Fourier, vol. 5, 1953-1954, p. 305-370.
6. M. E. A. El-Tom, *On Ignoring the Singularity in Approximate Integration.* J. SIAM Numer. Anal., vol. 8, 2, 1971, p. 412-424.
7. B. Hanouzet, *Espaces de Sobolev avec poids. Application au problème de Dirichlet dans un demi-espace,* Rend. Del Sem. Math. della Univer. di Padova, vol. XLVI, 1971.
8. J. L. Hess, *Higher Order Numerical Solution of the Integral Equation for the Two-Dimensionnal Neumann Problem,* Computer Methods in Appl. Mech. and Eng, vol. 2, 1973, p. 1-15.

9. G. C. HSIAO et W. L. WENDLAND, *A Finite Method for Some Integral Equations of the First Kind* (à paraître).
10. M. N. LE ROUX, *Equations intégrales pour le problème du potentiel électrique dans le plan*, C. R. Acad. Sc. Paris, t. 278, série A, 1974, p. 541.
11. M. N. LE ROUX, *Résolution numérique du problème du potentiel dans le plan par une méthode variationnelle d'éléments finis*, Thèse 3e cycle, Rennes, 1974.
12. N. I. MUSKHELISHVILI, *Singular Integral Equations*, Moscow, 1946, P. Noordhoff, N. V., Groningen, Holland.
13. J. C. NEDELEC et J. PLANCHARD, *Une méthode variationnelle d'éléments finis pour la résolution numérique d'un problème extérieur dans* $\mathbf{R}^3$, R.A.I.R.O., 7e année, R^3, 1973, p. 105-129.
14. P. A. RAVIART, *Méthode des éléments finis*, D. E. A., Analyse numérique, Université Paris VI, 1972.