

PIERRE JAMET

**Estimations d'erreur pour des éléments finis  
droits presque dégénérés**

*Revue française d'automatique, informatique, recherche opérationnelle. Analyse numérique*, tome 10, n° R1 (1976), p. 43-60

[http://www.numdam.org/item?id=M2AN\\_1976\\_\\_10\\_1\\_43\\_0](http://www.numdam.org/item?id=M2AN_1976__10_1_43_0)

© AFCET, 1976, tous droits réservés.

L'accès aux archives de la revue « Revue française d'automatique, informatique, recherche opérationnelle. Analyse numérique » implique l'accord avec les conditions générales d'utilisation (<http://www.numdam.org/conditions>). Toute utilisation commerciale ou impression systématique est constitutive d'une infraction pénale. Toute copie ou impression de ce fichier doit contenir la présente mention de copyright.

NUMDAM

Article numérisé dans le cadre du programme  
Numérisation de documents anciens mathématiques  
<http://www.numdam.org/>

## ESTIMATIONS D'ERREUR POUR DES ELEMENTS FINIS DROITS PRESQUE DEGENERES

par Pierre JAMET (<sup>1</sup>)

Communiqué par P.-A. RAVIART

Résumé. — On met en évidence une propriété qui est vérifiée par certains des éléments finis les plus couramment utilisés et qui permet d'améliorer l'estimation classique de l'erreur d'interpolation dans les espaces de Sobolev  $W^{m,p}$ . Cette nouvelle estimation n'interdit pas aux éléments d'être presque dégénérés (presque « plats »).

### 1) Introduction

Lorsqu'on utilise une méthode d'éléments finis pour résoudre un problème d'équations aux dérivées partielles dans un domaine de  $\mathbb{R}^n$ , la première étape est la discrétisation du domaine considéré, couramment appelée triangulation même lorsque les éléments utilisés ne sont pas des triangles. Cette discrétisation doit satisfaire certaines conditions qui assurent une estimation d'erreur satisfaisante; appelées conditions de régularité par Ciarlet et Raviart [5] et conditions d'uniformité par Strang [10], elles sont obtenues en étudiant l'erreur d'interpolation relative à chaque élément.

Différents auteurs ont étudié l'erreur d'interpolation correspondant à divers types d'éléments finis et ont déduit des conditions de régularité pour la triangulation (Zlamal [14], Bramble et Zlamal [4], Strang [10], Strang et Fix [11]); les résultats sous leur forme la plus générale sont donnés dans Ciarlet et Raviart [5] [6]. Le cas le plus simple est celui des éléments « droits », c'est-à-dire d'éléments qui sont les images par une transformation affine  $F$  d'un même élément, appelé-élément de référence. Dans ce cas, Ciarlet et Raviart [5] établissent une estimation de la forme :

$$(1.1) \quad \|u - \Pi u\|_{m, \mathcal{R}, K} = O(h^{k+1}/\rho^m),$$

où  $u$  est une fonction suffisamment régulière,  $\Pi u$  son interpolée dans l'élé-

(1) Centre d'Études de Limeil, Villeneuve Saint-Georges, France.

ment  $K$ ,  $\|\cdot\|_{m,p,k}$  la norme dans l'espace de Sobolev  $W^{m,p}(K)$ ,  $h$  le diamètre de  $K$ ,  $\rho$  le maximum du diamètre des sphères contenues dans  $K$  et  $k$  un entier qui dépend de l'espace des polynômes utilisés pour l'interpolation. De l'estimation (1.1), on déduit :

$$(1.2) \quad \|u - \Pi u\|_{m,p,K} = O(h^{k+1-m}),$$

si l'on fait l'hypothèse que tous les éléments  $K$  de la triangulation satisfont une condition de la forme :

$$(1.3) \quad \frac{\rho}{h} \geq \alpha > 0,$$

où  $\alpha$  est une constante arbitraire.

La condition (1.3) entraîne que les éléments  $K$  ne doivent pas être trop plats ; en particulier, dans le cas d'éléments triangulaires, les angles des triangles ne doivent pas être trop petits.

Dans cet article, nous allons montrer que pour certains des éléments finis les plus utilisés en pratique, la condition (1.3) peut être affaiblie. Nous établirons une estimation de la forme :

$$(1.4) \quad \|u - \Pi u\|_{m,p,K} = O(h^{k+1-m}/(\cos \theta)^m),$$

où  $\theta$  est un certain angle compris entre 0 et  $\frac{\pi}{2}$ , qui ne peut approcher  $\frac{\pi}{2}$  que si toutes les arêtes de  $K$  sont presque parallèles à un même hyperplan de  $\mathbb{R}^n$ . De (1.4), on déduit (1.2) sous la condition :

$$(1.5) \quad \theta \leq \theta_0 < \frac{\pi}{2}.$$

Cette condition est plus faible que (1.3). Elle n'interdit pas aux éléments d'être presque plats. Ainsi, dans le cas d'éléments triangulaires,  $\theta$  est égal à la moitié du *plus grand angle* des triangles ; par exemple, pour un triangle isocèle qui possède un angle arbitrairement petit et deux angles voisins de  $\frac{\pi}{2}$ , on a  $\theta \sim \frac{\pi}{4}$  et la condition (1.5) est satisfaite. Une estimation identique à (1.4) a été établie par Syngé [12], dans le cas particulier de l'interpolation linéaire sur un triangle avec  $k = 1$ ,  $m = 1$  et  $p = \infty$  (1).

Pour les éléments « courbes », c'est-à-dire déduits d'un même élément de référence au moyen d'une transformation  $F$  non affine, il est aussi possible d'affaiblir les conditions de régularité données par Strang et Fix [11] et

---

(1) L'auteur remercie le Professeur Gilbert Strang pour avoir attiré son attention sur ce résultat de Syngé.

Ciarlet et Raviart [6]. Ainsi, pour certains éléments quadrilatéraux, on peut laisser les quadrilatères dégénérer en triangles soit avec un côté dont la longueur tend vers zéro, soit avec un angle qui tend vers  $\pi$ . L'étude de ces éléments sera abordée dans un prochain article.

Nous allons commencer par préciser quelques notations (qui sont identiques à celles utilisées par Ciarlet et Raviart [5]). Puis, dans la deuxième partie nous démontrerons des résultats généraux relatifs à un opérateur linéaire  $\Pi$  possédant certaines propriétés; la propriété essentielle est celle qui est formulée dans l'hypothèse H.2; bien qu'elle soit satisfaite par les éléments finis les plus courants, il semble qu'elle ait été jusqu'à présent inaperçue. Le résultat principal est énoncé dans le théorème 2.2; le théorème 2.3 en est une variante. Dans la troisième partie, nous appliquerons ces résultats aux opérateurs d'interpolation correspondant à divers exemples d'éléments finis.

### Notations :

$\|\xi\|$  = norme Euclidienne d'un vecteur  $\xi$  de  $\mathbb{R}^n$ .

$(\xi_1, \xi_2)$  = produit scalaire de deux vecteurs  $\xi_1$  et  $\xi_2$  de  $\mathbb{R}^n$ .

Pour toute fonction  $u$  suffisamment régulière définie dans un domaine  $\Omega \subset \mathbb{R}^n$  :

$Du$  = dérivée de Fréchet d'ordre 1.

$D^m u$  = dérivée de Fréchet d'ordre  $m$ ,

$D^m u \cdot (\xi_1, \xi_2, \dots, \xi_m)$  = dérivée partielle d'ordre  $m$  relativement à  $m$  vecteurs  $\xi_1, \dots, \xi_m$ ,

$D^m u(x) \cdot (\xi_1, \xi_2, \dots, \xi_m)$  = valeur au point  $x \in \Omega$  de la dérivée ci-dessus,

$\|D^m u(x)\| = \text{Max} \{ |D^m u(x) \cdot (\xi_1, \xi_2, \dots, \xi_m)|; \|\xi_s\| = 1, 1 \leq s \leq m \}$ .

$\|u\|_{p, \Omega}$  = norme de  $u$  dans  $L^p(\Omega)$ .

$|u|_{m, p, \Omega} = \|D^m u\|_{p, \Omega} = \left( \int_{\Omega} \|D^m u(x)\|^p dx \right)^{1/p}$  est une semi-norme pour l'es-

pace de Sobolev  $W^{m, p}(\Omega)$ ,  $1 \leq p < \infty$ .

$\|u\|_{m, p, \Omega} = \left( \sum_{l=0}^m \|D^l u\|_{p, \Omega}^p \right)^{1/p}$  est une norme équivalente à la norme usuelle de  $W^{m, p}(\Omega)$ . Dans le cas  $p = \infty$ , ces deux dernières définitions doivent être modifiées de la façon habituelle.

$\mathfrak{L}(X, Y)$  désigne l'ensemble des applications linéaires continues d'un espace normé  $X$  dans un espace normé  $Y$ .

$P_k$  désigne l'ensemble des polynômes de  $n$  variables de degré  $\leq k$ .

## 2) Résultats généraux

Soit  $\hat{\Omega}$  un domaine borné de  $\mathbb{R}^n$  et soit  $\Omega$  un domaine « équivalent » quelconque, c'est-à-dire qu'il existe une transformation affine inversible  $F$  telle que :

$$(2.1) \quad \Omega = F(\hat{\Omega}) = \{ x \in \mathbb{R}^n; x = F(\hat{x}), \hat{x} \in \hat{\Omega} \}.$$

On peut écrire la transformation  $F$  sous la forme :  $F(\hat{x}) = B\hat{x} + b$ , où  $B$  est une matrice inversible d'ordre  $n$  et  $b$  est un  $n$ -vecteur. On a alors le résultat suivant (lemme 2 de Ciarlet et Raviart [5]) :

$$(2.2) \quad \|B\| \leq h/\hat{\rho}, \quad \text{où :}$$

$h =$  diamètre de  $\Omega$ ,  $\hat{\rho} = \sup \{ \text{diamètre des sphères contenues dans } \hat{\Omega} \}$ , et  $\|B\| =$  norme de la matrice  $B$  induite par la norme vectorielle euclidienne.

A toute fonction  $u$  définie sur  $\Omega$ , on fait correspondre de façon biunivoque une fonction  $\hat{u}$  définie sur  $\hat{\Omega}$ , au moyen de la relation canonique :

$$\hat{u}(\hat{x}) = u(x), \quad \text{où} \quad x = B\hat{x} + b.$$

Si  $u \in W^{l,p}(\Omega)$ , pour  $l$  entier  $\geq 0$  et  $1 \leq p \leq \infty$ , alors  $\hat{u} \in W^{l,p}(\hat{\Omega})$  et l'on a (formule (4.15) de Ciarlet et Raviart [5]) :

$$(2.3) \quad |\hat{u}|_{l,p,\hat{\Omega}} \leq \|B\|^l |\det B|^{-1/p} |u|_{l,p,\Omega}.$$

Les estimations (2.2) et (2.3) seront utilisées ultérieurement.

Soient maintenant  $k, l, m$  trois entiers positifs <sup>(1)</sup> et considérons un opérateur  $\Pi \in \mathcal{L}(W^{l,p}(\Omega), W^{m,p}(\Omega))$ , avec  $1 \leq p \leq \infty$ , qui satisfait les deux hypothèses suivantes :

$$(H.1) \quad \Pi u = u, \quad \text{pour tout } u \in P_k.$$

(H.2) Il existe un ensemble  $\{ \xi_s \}_{s=1}^m$  de vecteurs non nécessairement distincts, tel que :

$$D^m \Pi u \cdot (\xi_1, \dots, \xi_m) = 0 \text{ pour toute fonction } u \text{ telle que } D^m u \cdot (\xi_1, \dots, \xi_m) = 0.$$

Nous supposons que les vecteurs  $\xi_s$  sont unitaires, ce qui n'est évidemment pas une restriction.

A l'opérateur  $\Pi$ , il correspond un opérateur « équivalent »  $\hat{\Pi} \in \mathcal{L}(W^{l,p}(\hat{\Omega}), W^{m,p}(\hat{\Omega}))$  défini au moyen de la relation canonique :  $\hat{\Pi} \hat{u}(\hat{x}) = \Pi u(x)$ .

Si  $\Pi$  satisfait les propriétés H.1 et H.2, alors  $\hat{\Pi}$  satisfait des propriétés analogues avec les vecteurs  $\xi_s$  remplacés par  $\hat{\xi}_s = B^{-1} \xi_s$ .

Nous allons commencer par démontrer quelques lemmes préliminaires. Dans tout ce qui suit nous supposons que le domaine  $\Omega$  a la « propriété du

(1) La plupart de nos résultats sont triviaux dans le cas où ces entiers sont nuls. Nous excluons donc ce cas sans intérêt.

cône » (c.f. Courant et Hilbert [7], Agmon [2], Lions [8]), ce qui est une propriété très générale qui sera toujours vérifiée dans les exemples pratiques. D'autre part, toutes les démonstrations seront faites en supposant  $p$  fini; le cas  $p = \infty$  est toujours plus simple, mais nécessite quelques modifications.

### Lemme 2.1

Soient  $\Omega$  un domaine borné de  $\mathbb{R}^n$  ayant la propriété du cône et  $\xi$  un vecteur unité arbitraire. Pour tout  $v \in W^{l,p}(\Omega)$ ,  $l \geq 1$ , il existe une fonction  $u \in W^{l,p}(\Omega)$ , telle que  $Du \cdot (\xi) = v$  et  $\|u\|_{l,p,\Omega} \leq C \|v\|_{l,p,\Omega}$ , où  $C$  est une constante qui ne dépend que de  $\Omega$  et  $l$ .

*Démonstration.* — Nous allons démontrer :  $|u|_{r,p,\Omega} \leq C \|v\|_{l,p,\Omega}$  pour  $0 \leq r \leq l$ . Pour plus de simplicité, nous considérerons seulement le cas particulier :  $r = 1$ ,  $n = 2$ , et  $p < \infty$ . L'extension de la démonstration au cas général est immédiate et présente seulement des complications de notations.

Nous choisissons des coordonnées rectangulaires  $x_1$  et  $x_2$  de sorte que l'axe relatif à  $x_1$  soit parallèle au vecteur  $\xi$  et que  $\Omega$  soit contenu dans le carré  $G = \{ (x_1, x_2); 0 < x_1 < h, 0 < x_2 < h \}$ , où  $h$  est le diamètre de  $\Omega$ . D'après Lions [8] et grâce à la propriété du cône satisfaite par le domaine  $\Omega$ , on peut étendre la définition de  $v$  à tout l'espace  $\mathbb{R}^2$  au moyen d'un opérateur de prolongement qui est continu de  $W^{l,p}(\Omega)$  dans  $W^{l,p}(\mathbb{R}^2)$ . Désignant la fonction prolongée par la même notation  $v$ , on a alors :

$$\|v\|_{l,p,G} \leq \|v\|_{l,p,\mathbb{R}^2} \leq C_1 \|v\|_{l,p,\Omega}$$

où la constante  $C_1$  ne dépend que de  $\Omega$ ,  $l$  et  $p$ . Il en résulte qu'il est suffisant de démontrer le lemme 2.1 pour le domaine carré  $G$  au lieu de  $\Omega$ .

Soit  $v$  une fonction arbitraire dans  $C^\infty(\bar{G})$  et soit :

$$u(x_1, x_2) = \int_0^{x_1} v(s, x_2) ds.$$

La fonction  $u$  satisfait :  $Du \cdot (\xi) = \frac{\partial u}{\partial x_1} = v$ . Donc :

$$(2.4) \quad \left\| \frac{\partial u}{\partial x_1} \right\|_{p,G} = \|v\|_{p,G} \leq \|v\|_{l,p,G}$$

De plus :

$$\frac{\partial u}{\partial x_2}(x_1, x_2) = \int_0^{x_1} \frac{\partial v}{\partial x_2}(s, x_2) ds.$$

D'où, en appliquant l'inégalité de Hölder :

$$\left| \frac{\partial u}{\partial x_2}(x_1, x_2) \right| \leq \int_0^h \left| \frac{\partial v}{\partial x_2}(x_1, x_2) \right| dx_1 \leq h^{1/q} \left( \int_0^h \left| \frac{\partial v}{\partial x_2}(x_1, x_2) \right|^p dx_1 \right)^{1/p},$$

avec  $\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1$ . On en déduit :

$$\int_0^h \left| \frac{\partial u}{\partial x_2}(x_1, x_2) \right|^p dx_2 \leq h^{p/q} \left\| \frac{\partial v}{\partial x_2} \right\|_{p,G}^p,$$

et, par conséquent, en intégrant par rapport à  $x_1$  :

$$(2.5) \quad \left\| \frac{\partial u}{\partial x_2} \right\|_{p,G} \leq h \left\| \frac{\partial v}{\partial x_2} \right\|_{p,G} \leq h \|v\|_{l,p,G}.$$

De (2.4) et (2.5), nous déduisons :

$$\|u\|_{1,p,G} \leq \sqrt{2} \text{Max} \{ 1, h \} \|v\|_{1,p,G}.$$

Cette inégalité s'étend par densité à toute fonction  $v \in W^{l,p}(G)$ , ce qui achève la démonstration.  $\square$ .

## Lemme 2.2

Soit  $\Omega$  un domaine borné de  $\mathbb{R}^n$  ayant la propriété du cône. Soient  $l$  et  $m$  deux entiers positifs et  $\{\xi_s\}_{s=1}^m$  un ensemble de vecteurs unités qui ne sont pas nécessairement distincts. Pour tout  $v \in W^{l,p}(\Omega)$ , il existe une fonction  $u \in W^{l,p}(\Omega)$  telle que :

$$(2.6) \quad D^m u \cdot (\xi_1, \dots, \xi_m) = v \quad \text{et} \quad \|u\|_{l,p,\Omega} \leq C' \|v\|_{l,p,\Omega},$$

où  $C'$  est une constante qui dépend seulement de  $\Omega$ ,  $m$  et  $l$ .

*Démonstration.* — Par récurrence en utilisant le lemme 2.1. D'après le lemme 2.1, il existe  $u_1 \in W^{l,p}(\Omega)$  tel que  $Du_1 \cdot (\xi_1) = v$  et  $\|u_1\|_{l,p,\Omega} \leq C \|v\|_{l,p,\Omega}$ . Puis, il existe  $u_2 \in W^{l,p}(\Omega)$  tel que  $Du_2 \cdot (\xi_2) = u_1$  et  $\|u_2\|_{l,p,\Omega} \leq C \|u_1\|_{l,p,\Omega}$ . Cette fonction  $u_2$  satisfait :

$$D^2 u_2 \cdot (\xi_1, \xi_2) = Du_1 \cdot (\xi_1) = v \quad \text{et} \quad \|u_2\|_{l,p,\Omega} \leq C^2 \|v\|_{l,p,\Omega}.$$

En continuant ainsi de proche en proche, on obtient une fonction  $u = u_m$  qui satisfait les conditions du lemme 2.2 avec  $C' = C^m$ , où  $C$  est la constante du lemme 2.1.  $\square$

## Lemme 2.3

Soit  $\Pi \in \mathcal{L}(W^{l,p}(\Omega), W^{m,p}(\Omega))$  un opérateur qui satisfait les hypothèses H.1 et H.2. Alors, il existe un opérateur unique  $Q \in \mathcal{L}(W^{l,p}(\Omega), L^p(\Omega))$  tel que :

$$(2.7) \quad D^m \Pi u \cdot (\xi_1, \dots, \xi_m) = Q(D^m u \cdot (\xi_1, \dots, \xi_m)),$$

pour tout  $u \in W^{l+m,p}(\Omega)$  De plus, cet operateur satisfait  
 (2 8)  $Qv = v$ , pour tout  $v \in P_{k-m}$

*Demonstration* – Considerons les espaces suivants

$$\begin{aligned} S_1(l, p, \Omega, \xi_1, \dots, \xi_m) &= \{ u/u \in W^{l,p}(\Omega), D^m u (\xi_1, \dots, \xi_m) \in W^{l,p}(\Omega) \} \\ S_2(l, p, \Omega, \xi_1, \dots, \xi_m) &= \{ u/u \in W^{l,p}(\Omega), D^m u (\xi_1, \dots, \xi_m) = 0 \} \\ S(l, p, \Omega, \xi_1, \dots, \xi_m) &= S_1(l, p, \Omega, \xi_1, \dots, \xi_m) / S_2(l, p, \Omega, \xi_1, \dots, \xi_m), \text{ munis} \end{aligned}$$

de la norme de  $W^{l,p}(\Omega)$  pour les deux premiers et de la norme quotient pour le troisieme

Il resulte du lemme 2 2 que la relation (2 6) definit une application biunivoque continue de  $W^{l,p}(\Omega)$  dans  $S(l, p, \Omega, \xi_1, \dots, \xi_m)$  Soit  $v$  quelconque dans  $W^{l,p}(\Omega)$  et soit  $u$  son image dans  $S(l, p, \Omega, \xi_1, \dots, \xi_m)$  Il resulte de l'hypothese H 2 que l'operateur  $\Pi$  fait correspondre a  $u$  un element unique de  $S(m, p, \Omega, \xi_1, \dots, \xi_m)$  et par consequent  $D^m \Pi u (\xi_1, \dots, \xi_m)$  est determine de facon unique dans  $L^p(\Omega)$  La correspondance  $v \rightarrow D^m \Pi u (\xi_1, \dots, \xi_m) = Qv$  definit un operateur lineaire continu de  $W^{l,p}(\Omega)$  dans  $L^p(\Omega)$  qui satisfait la propriete (2 7) L'unicite de cet operateur est immediate Finalement, (2 8) resulte de l'hypothese H 1  $\square$

Maintenant, nous allons utiliser le lemme 2 3 pour demontrer le theoreme suivant qui est a comparer avec le theoreme 5 de Ciarlet et Raviart [5]

**Theoreme 2.1**

Supposons  $k \geq m$  et soit  $\Pi \in \mathcal{L}(W^{k+1-m,p}(\Omega), W^{m,p}(\Omega))$  un operateur qui satisfait les hypotheses H 1 et H 2 Alors, pour tout  $u \in W^{k+1,p}(\Omega)$ , on a

$$(2 9) \quad \|D^m u (\xi_1, \dots, \xi_m) - D^m \Pi u (\xi_1, \dots, \xi_m)\|_{p,\Omega} \leq C h^{k+1-m} |u|_{k+1,p,\Omega}$$

ou  $C$  est une constante qui ne depend que de  $\Omega, \Pi, k, m$  et  $p$  (c'est-a-dire que  $C$  est le même pour tous les domaines  $\Omega$  equivalents et tous les operateurs  $\Pi$  equivalents)

*Demonstration* – En appliquant le lemme 2 3 ci-dessus et le lemme 7 de Ciarlet et Raviart [5] (extension du lemme de Bramble et Hilbert [3]) dans le domaine de reference  $\hat{\Omega}$ , on obtient

$$\begin{aligned} (2 10) \quad \|D^m \hat{u} (\hat{\xi}_1, \dots, \hat{\xi}_m) - D^m \Pi \hat{u} (\hat{\xi}_1, \dots, \hat{\xi}_m)\|_{p,\hat{\Omega}} &= \|(\hat{I} - \hat{Q})(D^m \hat{u} (\hat{\xi}_1, \dots, \hat{\xi}_m))\|_{p,\hat{\Omega}} \\ &\leq \hat{C} \|\hat{I} - \hat{Q}\| |D^m \hat{u} (\hat{\xi}_1, \dots, \hat{\xi}_m)|_{k+1-m,p,\hat{\Omega}}, \end{aligned}$$

ou  $\hat{I}$  designe l'injection canonique de  $W^{k+1-m,p}(\hat{\Omega})$  dans  $L^p(\hat{\Omega})$ ,  $\|\hat{I} - \hat{Q}\|$



désigne la norme de l'opérateur  $\hat{I} - \hat{Q}$  dans  $\mathcal{L}(W^{k+1-m,p}(\hat{\Omega}), L^p(\hat{\Omega}))$  et  $\hat{C}$  est une constante. Mais, pour toute fonction  $w$  définie dans  $\Omega$ , on a :

$$D^m \hat{w}(\hat{x}) \cdot (\hat{\xi}_1, \dots, \hat{\xi}_m) = D^m w(x) \cdot (\xi_1, \dots, \xi_m), \quad \forall x \in \Omega.$$

D'où, en prenant  $w = u - \Pi u$  :

$$(2.11) \quad \begin{aligned} & \|D^m \hat{u} \cdot (\hat{\xi}_1, \dots, \hat{\xi}_m) - D^m \Pi \hat{u} \cdot (\hat{\xi}_1, \dots, \hat{\xi}_m)\|_{p, \hat{\Omega}} \\ &= |\det B|^{-1/p} \|D^m u \cdot (\xi_1, \dots, \xi_m) - D^m \Pi u \cdot (\xi_1, \dots, \xi_m)\|_{p, \Omega}, \end{aligned}$$

et aussi, en appliquant (2.3) à la fonction  $D^m u \cdot (\xi_1, \dots, \xi_m)$  :

$$(2.12) \quad \begin{aligned} & |D^m \hat{u} \cdot (\hat{\xi}_1, \dots, \hat{\xi}_m)|_{k+1-m, p, \hat{\Omega}} \\ &\leq \|B\|^{k+1-m} |\det B|^{-1/p} |D^m u \cdot (\xi_1, \dots, \xi_m)|_{k+1-m, p, \Omega}. \end{aligned}$$

D'où, en regroupant (2.10), (2.11) et (2.12) et en appliquant (2.2) :

$$\begin{aligned} & \|D^m u \cdot (\xi_1, \dots, \xi_m) - D^m \Pi u \cdot (\xi_1, \dots, \xi_m)\|_{p, \Omega} \\ &\leq \hat{C} \|\hat{I} - \hat{Q}\| \|B\|^{k+1-m} |D^m u \cdot (\xi_1, \dots, \xi_m)|_{k+1-m, p, \Omega} \\ &\leq \hat{C} \|\hat{I} - \hat{Q}\| (h/\hat{\rho})^{k+1-m} |u|_{k+1, p, \Omega}, \end{aligned}$$

ce qui achève la démonstration du théorème.  $\square$

Nous allons maintenant considérer un ensemble  $E_n = \{e_s\}_{s=1}^n$  de  $n$  vecteurs unités linéairement indépendants. Soit  $\xi$  un vecteur unité quelconque de  $\mathbb{R}^n$ . On peut écrire :

$$(2.14) \quad \xi = \sum_{s=1}^n \alpha_s e_s.$$

Soit  $\theta_s$ ,  $0 \leq \theta_s \leq \frac{\pi}{2}$ , l'angle du vecteur  $\xi$  avec la droite supportant le vecteur  $e_s$  et soit :

$$(2.15) \quad \theta(E_n) = \text{Max}_{\xi \in \mathbb{R}^n} \min_{e_s \in E_n} \{ \theta_s \}$$

### Lemme 2.4

Pour tout vecteur unité  $\xi \in \mathbb{R}^n$ , on a :

$$(2.16) \quad \sum_{s=1}^n |\alpha_s| \leq \frac{1}{\cos \theta}, \quad \text{avec } \theta = \theta(E_n).$$

L'égalité a lieu pour les vecteurs  $\xi$  tels que  $\theta_s = \theta$  pour tout  $s$ .

*Démonstration.* — Cherchons le maximum de  $\varphi(\alpha_1, \dots, \alpha_n) = \sum_{s=1}^n \alpha_s$  sous la contrainte :

$$\|\xi\|^2 = \left( \sum_{s=1}^n \alpha_s e_s, \sum_{r=1}^n \alpha_r e_r \right) = \psi(\alpha_1, \dots, \alpha_n) = 1.$$

En un point où le maximum est réalisé, il existe un multiplicateur de Lagrange  $(\lambda, \mu)$  tel que :

$$\lambda \overrightarrow{\text{grad}} \varphi + \mu \overrightarrow{\text{grad}} \psi = 0, \quad \text{c'est-à-dire :}$$

$$\lambda \frac{\partial \varphi}{\partial \alpha_s} + \mu \frac{\partial \psi}{\partial \alpha_s} = 0, \quad \text{pour } s = 1, 2, \dots, n.$$

Or,  $\frac{\partial \varphi}{\partial \alpha_s} = 1$  et  $\frac{\partial \psi}{\partial \alpha_s} = 2(\xi, e_s) = 2 \cos \theta_s^*$ , où  $\theta_s^*$  est l'angle des deux vecteurs  $\xi$  et  $e_s$  (on a :  $0 \leq \theta_s^* \leq \pi$ ;  $\theta_s^*$  est égal à  $\theta_s$  ou à  $\pi - \theta_s$ ). Donc, en un maximum de  $\varphi$ , on doit avoir :  $(\xi, e_s) = \cos \theta_s^* = \gamma$ ,  $-1 \leq \gamma \leq 1$ ,  $\gamma$  indépendant de  $s$ . D'autre part, le maximum de  $\varphi$  est nécessairement positif puisque le signe de  $\varphi$  change lorsque l'on change  $\xi$  en  $-\xi$ ; or, en multipliant scalairement (2.14) par  $\xi$ , on obtient :

$$1 = \sum_{s=1}^n \alpha_s (\xi, e_s) = \gamma \varphi(\alpha_1, \dots, \alpha_n),$$

ce qui entraîne que  $\gamma$  doit être positif. On peut donc poser :  $\gamma = \cos \theta^*$  avec  $0 < \theta^* < \frac{\pi}{2}$ . On a alors :  $\theta_s^* = \theta^*$  pour  $s = 1, 2, \dots, n$  et :

$$(2.17) \quad \sum_{s=1}^n \alpha_s = \frac{1}{\cos \theta^*}.$$

Le maximum absolu de la fonction  $\varphi$  correspond au plus grand angle  $\theta^*$  tel qu'il existe un vecteur  $\xi$  pour lequel  $\theta_s^* = \theta^*$  pour tout  $s$ ; cet angle est donné par :

$$\theta^* = \text{Max}_{\xi} \min_s \theta_s^*.$$

La conclusion du théorème résulte de ce que, pour tous les vecteurs  $\xi$ , on peut écrire :  $\xi = \sum_{s=1}^n \alpha_s^* e_s^*$ , avec  $e_s^* = \pm e_s$ ,  $\alpha_s^* = \pm \alpha_s \geq 0$  et par conséquent :

$\sum_{s=1}^n \alpha_s^* = \sum_{s=1}^n |\alpha_s|$ . Donc, le maximum de  $\sum_{s=1}^n |\alpha_s|$  est égal au maximum de  $\sum_{s=1}^n \alpha_s^*$  pour tous les ensembles de vecteurs  $e_s^* = \pm e_s$ ,  $s = 1, 2, \dots, n$ . Ce maximum est donné par (2.17) avec l'angle  $\theta^*$  remplacé par l'angle  $\theta$  défini par (2.15) qui est indépendant de l'orientation des vecteurs  $e_s$  ou  $e_s^*$ .

## Théorème 2.2

Soit  $E_n$  une base de  $\mathbb{R}^n$  et soit  $\Pi \in \mathcal{L}(W^{k+1-m,p}(\Omega), W^{m,p}(\Omega))$ , avec  $k \geq m$ , un opérateur qui satisfait les hypothèses H.1 et H.2 pour tout ensemble de vecteurs  $\{\xi_s\}_{s=1}^m \in (E_n)^m$ . Alors, pour tout  $u \in W^{k+1,p}(\Omega)$ , on a :

$$(2.18) \quad |u - \Pi u|_{m,p,\Omega} \leq C \frac{h^{k+1-m}}{(\cos \theta)^m} |u|_{k+1,p,\Omega}$$

où  $C$  est une constante qui ne dépend que de  $\hat{\Omega}$ ,  $\hat{\Pi}$ ,  $k$ ,  $m$ ,  $p$  et où  $\theta = \theta(E_n)$  est un angle qui ne dépend que de l'ensemble  $E_n$  et qui est défini par (2.15).

*Démonstration*

Posons  $E_n = \{e_1, \dots, e_n\}$  et supposons que les vecteurs  $e_1, \dots, e_n$  sont unitaires. Soit  $\{\varepsilon_r\}_{r=1}^m$  un ensemble de  $m$  vecteurs unités arbitraires. On peut écrire :  $\varepsilon_r = \sum_{s=1}^n \alpha_{r,s} e_s$ . Posons d'autre part :  $w = u - \Pi u$ . On a :

$$D^m w \cdot (\varepsilon_1, \dots, \varepsilon_m) = \sum_{s_1, \dots, s_m=1}^n \alpha_{1,s_1} \dots \alpha_{m,s_m} D^m w \cdot (e_{s_1}, \dots, e_{s_m})$$

D'où :

$$\begin{aligned} \|D^m w \cdot (\varepsilon_1, \dots, \varepsilon_m)\|_{p,\Omega} &\leq \sum_{s_1, \dots, s_m=1}^n |\alpha_{1,s_1}| \dots |\alpha_{m,s_m}| \|D^m w \cdot (e_{s_1}, \dots, e_{s_m})\|_{p,\Omega} \\ &\leq \left( \sum_{s=1}^n |\alpha_{1,s}| \right) \dots \left( \sum_{s=1}^n |\alpha_{m,s}| \right) \max_{1 \leq s_1, \dots, s_m \leq n} \|D^m w \cdot (e_{s_1}, \dots, e_{s_m})\|_{p,\Omega} \\ &\leq C \frac{h^{k+1-m}}{(\cos \theta)^m} |u|_{k+1,p,\Omega} \end{aligned}$$

d'après le lemme 2.4 et le théorème 2.1. Comme les vecteurs  $\varepsilon_s$  sont arbitraires, on obtient (2.18).  $\square$

Nous allons maintenant démontrer une variante du théorème 2.2 : nous allons affaiblir l'hypothèse de continuité de l'opérateur  $\pi$ , mais en contrepartie nous devons supposer davantage de régularité sur la fonction  $u$ .

Nous utiliserons le lemme suivant qui est une variante du lemme 7 de Ciarlet-Raviart [5] et qui se démontre de la même manière :

**Lemme 2.5**

Soit  $\Omega$  un ouvert borné de  $\mathbb{R}^n$  avec une frontière continue. Soient  $1 \leq p \leq \infty$  et  $k, l, m$  des entiers  $\geq 0$  avec  $k+l \geq k+1 \geq m$ . Soit  $\Pi \in \mathcal{L}(W^{k+l,p}(\Omega), W^{m,p}(\Omega))$  tel que :  $\Pi u = u$  pour tout  $u \in P_k$ . Alors il existe une constante  $C$  qui dépend de  $n, k, l, p$  et  $\Omega$  telle que, pour tout  $u \in W^{k+l,p}(\Omega)$  :

$$(2.19) \quad \|u - \Pi u\|_{m,p,\Omega} \leq C \|I - \Pi\| \sum_{s=1}^l |u|_{k+s,p,\Omega}$$

où  $I$  est l'opérateur identité et  $\|I - \Pi\|$  désigne la norme de l'opérateur  $I - \Pi$  dans  $\mathcal{L}(W^{k+l,p}(\Omega), W^{m,p}(\Omega))$ .

**Théorème 2.3**

Soit  $\Pi \in \mathcal{L}(W^{k-m+1,p}(\Omega), W^{m,p}(\Omega))$ , avec  $l \geq 1$ , un opérateur qui satisfait les hypothèses du théorème 2.2. Alors, pour tout  $u \in W^{k+1,p}(\Omega)$ , on a :

$$(2.20) \quad |u - \Pi u|_{m,p,\Omega} \leq C \frac{h^{k+1-m}}{(\cos \theta)^m} \sum_{r=0}^{l-1} h^r |u|_{k+1+r,p,\Omega}.$$

*Démonstration.* — Analogue à celle du théorème 2.2. L'opérateur  $Q$  du lemme 2.3 est maintenant continu de  $W^{k+1,p}(\Omega)$  dans  $L^p(\Omega)$ . Au stade de la formule (2.12) de la démonstration du théorème 2.1, on applique le lemme 2.5 et tout le reste est sans changement.

**3) Applications**

Nous allons considérer successivement plusieurs exemples d'éléments finis qui satisfont les conditions d'applications des théorèmes 2.2 et 2.3, ainsi qu'un contre-exemple.

**EXEMPLE 1**

Soit  $K$  un  $n$ -simplexe non dégénéré de sommets  $A_1, A_2, \dots, A_{n+1}$  et désignons par  $\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_{n+1}$  les coordonnées barycentriques correspondantes. Soit  $k$  un entier positif et soit  $\Sigma$  l'ensemble des points de  $K$  dont chaque coordonnée  $\lambda_j$  est égale à un multiple entier de  $1/k$ . Nous considérons l'opérateur  $\Pi$  qui fait correspondre à toute fonction  $u$  continue sur  $K$  le polynôme de degré  $\leq k$  qui interpole la fonction  $u$  aux points de  $\Sigma$ . (Pour l'existence et l'unicité de ce polynôme, voir Nicolaidis [9].)

Soit  $E_N$  un ensemble de  $n(n+1)/2$  vecteurs unités dirigés dans la direction des arêtes et orientés dans un sens arbitraire, et soit  $E_n$  un sous-ensemble quelconque de  $E_N$  qui forme une base de  $\mathbb{R}^n$ . Nous allons montrer que l'opérateur  $\Pi$  satisfait l'hypothèse H.2 pour tout ensemble de vecteurs  $\{\xi_s\}_{s=1}^m \in (E_n)^m$ .

Posons  $E_n = \{e_s\}_{s=1}^n$  et utilisons cette base pour définir un système de coordonnées  $(y_1, \dots, y_n)$  à partir d'une origine quelconque. Pour toute fonction  $u$ , on peut alors écrire :  $D^m u \cdot (\xi_1, \dots, \xi_m) = \partial^\alpha u$ , où  $\alpha = (\alpha_1, \dots, \alpha_n)$  est un multi-indice avec  $|\alpha| = \sum_{j=1}^n \alpha_j = m$ ,  $\alpha_j \geq 0$  et

$$\partial^\alpha u = \frac{\partial^{\alpha_1}}{(\partial y_1)^{\alpha_1}} \dots \frac{\partial^{\alpha_n}}{(\partial y_n)^{\alpha_n}} u.$$

**Lemme 3.1**

Si  $u$  est une fonction telle que  $\partial^\alpha u = 0$ , alors  $u$  peut s'écrire sous la forme :

$$(3.1) \quad u = \sum_{j=1}^n \sum_{s=0}^{\alpha_j-1} (y_j)^s f_{j,s}(y'_j),$$

où  $y'_j = (y_1, \dots, y_{j-1}, y_{j+1}, \dots, y_n)$  et les  $f_{j,s}(y'_j)$  sont des fonctions arbitraires de  $y'_j$ .

*Démonstration.* — Élémentaire, par intégrations successives.  $\square$

Supposons maintenant que l'on ait choisi l'origine des coordonnées en un sommet du  $n$ -simplexe  $K$  et que l'on ait choisi l'orientation des vecteurs  $e_s$  de telle sorte que  $K$  soit contenu dans la région :  $y_j \geq 0$  pour tout  $j$ . Désignons par  $h_j$  la longueur de l'arête de  $K$  parallèle au vecteur  $e_j$  et soit  $z_j = y_j/h_j$ . Relativement aux nouvelles coordonnées  $z_j$ , le  $n$ -simplexe  $K$  est situé dans l'hypercube :  $0 \leq z_j \leq 1$ ,  $j = 1, 2, \dots, n$ . Considérons une suite de polynômes  $q_{s,k}$  définis par :

$$(3.2) \quad \begin{cases} q_{0,k}(t) = 1 \\ q_{s,k}(t) = \prod_{i=0}^{s-1} \left( t - \frac{i}{k} \right), \quad \text{pour } s = 1, 2, \dots, k. \end{cases}$$

Ces polynômes étant linéairement indépendants, tout polynôme d'une seule variable de degré  $\leq k$  peut s'exprimer au moyen d'une combinaison linéaire des  $q_{s,k}$ . On peut donc écrire (3.1) sous la forme :

$$(3.3) \quad u = \sum_{j=1}^n \sum_{s=0}^{\alpha_j-1} q_{s,k}(z_j) g_{j,s}(z'_j),$$

où les  $g_{j,s}$  sont des fonctions arbitraires de  $z'_j = y'_j/h_j$ .

### Lemme 3.2

Soit  $u$  une fonction de la forme :

$$(3.4) \quad u = q_{s,k}(z_j) g_{j,s}(z'_j), \quad 0 \leq s \leq k.$$

Alors,  $\Pi u$  est de la forme :

$$(3.5) \quad \Pi u = q_{s,k}(z_j) g_{j,s}^*(z'_j),$$

où  $g_{j,s}^*(z'_j)$  est le polynôme de degré  $\leq (k-s)$  par rapport aux variables  $z_1, \dots, z_{j-1}, z_{j+1}, \dots, z_n$ , qui interpole la fonction  $g_{j,s}$  aux points de  $\Sigma$  situés dans l'hyperplan  $z_j = s/k$ .

*Démonstration :*

Il suffit de vérifier que les fonctions (3.4) et (3.5) prennent les mêmes valeurs en tous les points de  $\Sigma$ . Or, dans chacun des hyperplans  $z_j = i/k$ , avec  $0 \leq i \leq s-1$ , on a :  $u = \Pi u = 0$ . Considérons maintenant un point  $P \in \Sigma$  situé dans un hyperplan  $z_j = i/k$  avec  $s \leq i \leq k$ ; la projection  $P'$  de

ce point sur l'hyperplan  $z_j = s/k$  parallèlement au vecteur  $e_j$ , appartient aussi à  $\Sigma$ ; donc, par définition de  $g_{js}^*$ , on a :

$$g_{js}^*(P) = g_{js}^*(P') = g_{js}(P') = g_{js}(P),$$

et par conséquent,  $\Pi u(P) = u(P)$ .  $\square$

Des lemmes 3.1 et 3.2, on déduit immédiatement :

**Corollaire 3.1.** Soit  $\alpha$  un multi-indice  $\leq 0$  arbitraire. Si  $u$  est une fonction telle que  $\partial^\alpha u = 0$ , alors son interpolée  $\Pi u$  satisfait :  $\partial^\alpha \Pi u = 0$ .

Nous pouvons maintenant appliquer les théorèmes 2.2 et 2.3. En utilisant le théorème d'immersion de Sobolev, on obtient le résultat suivant :

### Théorème 3.1

Soit  $\Pi$  l'opérateur d'interpolation considéré ci-dessus et soit  $E_N$  un ensemble de vecteurs dirigés selon les  $N$  arêtes du  $n$ -simplexe  $K$ . Alors :

i) Si  $k + 1 - m > n/p$  (ou si  $k + 1 - m \geq 0$  si  $p = \infty$ ), l'estimation (2.18) est satisfaite pour toute fonction  $u \in W^{k+1,p}(\Omega)$ , avec  $\theta = \min_{E_n \subset E_N} \{ \theta(E_n) \}$ .

ii) Si  $l$  est le plus petit entier positif tel que  $k + l - m > n/p$ , l'estimation (2.20) est satisfaite pour toute fonction  $u \in W^{k+l,p}(\Omega)$ .

REMARQUE :

L'estimation (2.18) (ou (2.20)) montre que l'approximation est bonne pourvu que l'angle  $\theta$  ne soit pas trop voisin de  $\pi/2$ , c'est-à-dire que les directions des arêtes ne soient pas toutes trop voisines d'un même hyperplan. Par contre, il n'y a aucune restriction sur l'aplatissement du  $n$ -simplexe  $K$ , c'est-à-dire sur le rapport  $h/\rho$ , où  $\rho$  est le diamètre de l'hypersphère inscrite dans  $K$ .

Dans le cas particulier  $n = 2$ , le théorème 3.1 donne

$$\theta = \frac{1}{2} \text{Max} \{ \alpha, \pi - \alpha \} \leq \text{Max} \{ \alpha/2, \pi/3 \},$$

où  $\alpha$  est le plus grand angle du triangle  $K$ . (Un raisonnement particulier montre d'ailleurs qu'on peut prendre aussi  $\theta = \alpha/2$ ). Dans l'application de la méthode des éléments finis, il faut donc imposer que tous les angles  $\alpha_i$  de tous les triangles de la triangulation satisfassent une condition de la forme :

$$(3.6) \quad \alpha_i \leq \gamma < \pi$$

où  $\gamma$  est un angle fixé. La condition (3.6) est moins restrictive que la condition de Zlamal [14] qui est de la forme :

$$(3.7) \quad 0 < \beta \leq \alpha_i,$$

où  $\beta$  est un angle fixé. En effet, (3.7) implique (3.6) avec  $\gamma = \pi - 2\beta$  (notons que l'on a nécessairement  $\beta \leq \pi/3$ ). Par contre la condition (3.6) n'exclut pas la possibilité pour un angle du triangle  $K$  (un *seul* angle) d'être arbitrairement petit; l'utilisation de tels triangles sera évidemment limitée par les erreurs d'arrondi du calculateur utilisé.

### EXEMPLE 2

Soit  $\{A_s\}_{s=0}^n$  un ensemble de points de  $R^n$  tel que les vecteurs  $\overrightarrow{A_0A_s}$  soient linéairement indépendants et soit  $K$  le paralléloétope :

$$K = \left\{ P; \overrightarrow{A_0P} = \sum_{s=0}^n \lambda_s \overrightarrow{A_0A_s}, 0 \leq \lambda_s \leq 1 \right\}.$$

Soit  $k$  un entier positif et soit  $\Sigma$  l'ensemble des points de  $K$  tels que chaque coordonnée  $\lambda_s$  soit un multiple entier  $\geq 0$  de  $1/k$ .

Soit  $Q_k$  l'ensemble des polynômes de degré  $\leq nk$  par rapport à l'ensemble des variables  $\lambda_s$  et de degré  $\leq k$  par rapport à chacune d'entre elles. Nous considérons l'opérateur  $\Pi$  qui fait correspondre à toute fonction  $u$  continue sur  $K$  le polynôme  $\Pi u \in Q_k$  qui interpole  $u$  aux points de  $\Sigma$ . (L'existence et l'unicité de ce polynôme sont bien connues.) Soit  $E_n$  l'ensemble des vecteurs  $\overrightarrow{A_0A_s}$ .

Alors, il est facile de montrer en utilisant le lemme 3.1 que l'opérateur  $\Pi$  satisfait l'hypothèse H.2 pour tout ensemble de vecteurs  $\{\xi_s\}_{s=1}^m \in (E_n)^m$  où  $m$  est un entier positif quelconque (la démonstration est plus simple que pour l'exemple 1).

Dans les exemples suivants,  $K$  est un parallélogramme construit à partir de deux vecteurs  $\overrightarrow{A_0A_1}$  et  $\overrightarrow{A_0A_2}$ . Comme il s'agit seulement de vérifier les propriétés H.1 et H.2 et que ces propriétés sont invariantes par transformation affine, nous pouvons supposer que  $K$  est le carré unité du plan  $(x, y)$  (ce qui revient à confondre  $K$  avec l'élément de référence  $\hat{K}$ ). Les sommets sont alors les points :  $A_0 = (0, 0)$ ,  $A_1 = (1, 0)$ ,  $A_2 = (0, 1)$ ,  $A_3 = (1, 1)$ .

### EXEMPLE 3

Pour toute fonction  $u \in C^2(K)$ ,  $\Pi u$  est le polynôme de  $Q_3$  tel que, en chaque sommet  $A_s$  :  $\Pi u(A_s) = u(A_s)$ ,  $\frac{\partial}{\partial x} \Pi u(A_s) = \frac{\partial}{\partial x} u(A_s)$ ,  $\frac{\partial}{\partial y} \Pi u(A_s) = \frac{\partial}{\partial y} u(A_s)$ ,  $\frac{\partial^2}{\partial x \partial y} \Pi u(A_s) = \frac{\partial^2}{\partial x \partial y} u(A_s)$ . (Interpolation de type Hermite.)

Il est facile de vérifier, en utilisant le lemme 3.1, que l'opérateur  $\Pi$  satisfait l'hypothèse H.2 pour  $m \leq 3 = k$  et  $\xi_s \in \{ \overrightarrow{A_0 A_1}, \overrightarrow{A_0 A_2} \}$ .

Les exemples suivants appartiennent à la famille des éléments « serendipity » de Zienkiewicz [13] et reposent sur la propriété suivante des polynômes de  $P_3$ .

Soit  $0 < d < 1$  et considérons les points :

$$A_4 = (0, d), \quad A_5 = (d, 0), \quad A_6 = (1, d), \quad A_7 = (d, 1), \quad A_8 = (d, d).$$

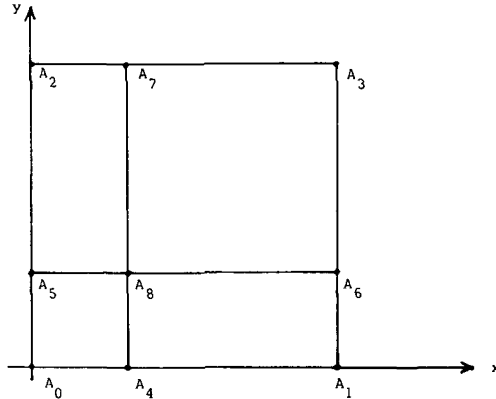


Figure 1

### Lemme 3.3

Pour tout polynôme  $u \in P_3$ , il existe une relation linéaire entre les valeurs de  $u$  aux points  $A_s$ ,  $0 \leq s \leq 8$ . Plus précisément, on a :

$$(3.9) \quad u(A_8) = \sum_{s=0}^7 \alpha_s u(A_s), \quad \text{avec :}$$

$$\alpha_0 = -(1-d)^2, \quad \alpha_1 = \alpha_2 = -d(1-d), \quad \alpha_3 = -d^2$$

$$\alpha_4 = \alpha_5 = 1-d, \quad \alpha_6 = \alpha_7 = d.$$

#### Démonstration

Soit  $u$  un polynôme quelconque de  $P_3$  et soient  $a_1, a_2, \dots, a_{10}$  ses coefficients. Désignons par  $a$  le vecteur :  $a = (a_1, a_2, \dots, a_{10})$ . Pour chacun des points  $A_s$ , on a :

$$u(A_s) = L_s(a),$$

où  $L_s(a)$  est une fonctionnelle linéaire de  $a$ . Il s'agit de montrer que les fonctionnelles  $L_s(a)$  sont linéairement dépendantes et de calculer des coefficients  $\alpha_s$  tels que :

$$(3.10) \quad L_8(a) \equiv \sum_{s=0}^7 \alpha_s L_s(a).$$



En identifiant les coefficients de chaque composante de  $a$  dans (3.10), on obtient un système de 10 équations pour les 7 inconnues  $\alpha_s$ . En fait, ce système se résout facilement et l'on trouve les valeurs indiquées dans le lemme 3.3.

**Corollaire :**

Tout polynôme  $u \in P_3$  satisfait la relation :

$$(3.11) \quad \frac{\partial^2 u}{\partial x \partial y}(A_0) = -u(A_0) + u(A_1) + u(A_2) - u(A_3) \\ - \frac{\partial u}{\partial x}(A_0) - \frac{\partial u}{\partial y}(A_0) + \frac{\partial u}{\partial y}(A_1) + \frac{\partial u}{\partial x}(A_2).$$

*Démonstration :*

Après division par  $d^2$ , la relation (3.9) peut s'écrire sous la forme :

$$-u_0 + u_1 + u_2 - u_3 - \frac{u_4 - u_0}{d} - \frac{u_5 - u_0}{d} + \\ + \frac{u_6 - u_1}{d} + \frac{u_7 - u_2}{d} - \frac{u_8 - u_4 - u_5 + u_0}{d^2} = 0.$$

La relation (3.11) en résulte immédiatement en faisant tendre  $d$  vers zéro.

**Lemme 3.6**

Les relations (3.9) et (3.11) sont également satisfaites par les polynômes  $x^3y$  et  $xy^3$ .

*Démonstration :* Vérification immédiate.

**EXEMPLE 4**

Soit  $K$  le carré unité de sommets  $A_0, A_1, A_2, A_3$  et soient  $A_4, A_5, \dots, A_8$  les points définis comme dans le lemme 3.3 avec  $d = \frac{1}{2}$  (milieux des côtés et centre du carré).  $\Pi$  est l'opérateur qui à toute fonction  $u \in C(K)$  fait correspondre son interpolée aux points  $A_0, A_1, \dots, A_7$  par un polynôme de  $\mathcal{Q}_2$  qui satisfait (3.9), c'est-à-dire par un polynôme de  $\mathcal{Q}_2 \cap P_3$ . (Voir Zienkienvicz [13]).

Il est facile de vérifier que l'opérateur  $\pi$  satisfait l'hypothèse H.2 pour  $m \leq 2 = k$  et  $\xi_s \in \{ \overrightarrow{A_0 A_1}, \overrightarrow{A_0 A_2} \}$ .

**EXEMPLE 5**

Soit  $K$  le carré unité de sommets  $A_0, A_1, A_2, A_3$ . Soit  $0 < d < 1$  et considérons l'ensemble  $\Sigma$  des points dont chaque coordonnée est égale à 0,  $d$ ,  $1 - d$

ou 1. Désignons par  $\partial K$  la frontière de  $K$  et soient  $\Sigma_1 = \Sigma \cap \partial K, \Sigma_2 = \Sigma - \Sigma_1$ . L'opérateur  $\Pi$  fait correspondre à toute fonction  $u \in C(K)$  son interpolée  $\Pi u$  aux points de  $\Sigma_1$  par un polynôme de  $\mathcal{Q}_3$  qui satisfait aux points de  $\Sigma_2$  la relation (3.9) (ou la relation analogue déduite par permutation circulaire des sommets). Il résulte des lemmes 3.5 et 3.6 que  $\Pi u$  est un polynôme de la forme :  $p_3(x, y) + a_{11}x^3y + a_{12}xy^3$ , où  $p_3$  est un polynôme arbitraire de  $P_3$ .

On vérifie que l'opérateur  $\Pi$  satisfait l'hypothèse H.2 pour  $m \leq 3 = k$  et  $\xi_s \in \{ \overrightarrow{A_0A_1}, \overrightarrow{A_0A_2} \}$ .

**Cas particuliers :**

1) Cas  $d = 1/3$ .

On obtient un élément classique de Zienkiewicz [13].

2) Cas limite  $d = 0$ .

On obtient l'élément d'Adini [1]. L'interpolation est de type Hermite : on donne les valeurs de la fonction et de ses dérivées premières aux quatre sommets, Cet élément correspond à l'élément de l'exemple 3 dans lequel on a éliminé les dérivées secondes  $\frac{\partial^2 u}{\partial x \partial y}$  au moyen de la relation (3.11).

CONTRE-EXEMPLE. — Élément serendipity triangulaire (voir [13]).

Soit dans le plan  $(x, y)$  le triangle  $K$  de sommets  $A_1 = (0, 0), A_2 = (d, 0)$  et  $A_3 = (0, 1)$ , où  $d$  est un nombre positif quelconque. Soient  $A$  le centre de gravité du triangle et  $A_{ij} = \frac{1}{3}(2A_i + A_j), 1 \leq i \leq 3, 1 \leq j \leq 3$ .

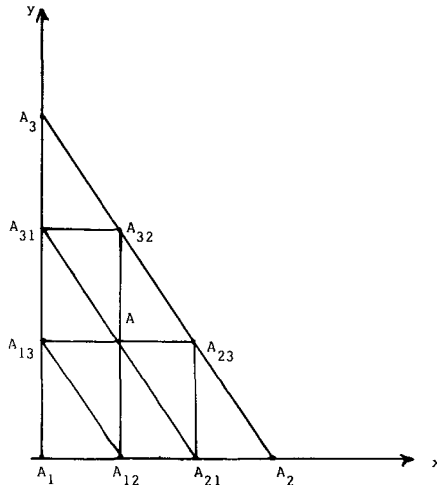


Figure 2

On considère l'opérateur  $\Pi$  qui fait correspondre à toute fonction  $u$  continue sur  $K$  son interpolée aux points  $A_i$  et  $A_{i,j}$  par un polynôme de degré  $\leq 3$  qui satisfait la relation

$$\Pi u(A) = -\frac{1}{6} \sum_{i=1}^3 \Pi u(A_i) + \frac{1}{4} \sum_{\substack{i,j=1 \\ i \neq j}}^3 \Pi u(A_{i,j})$$

Considérons, par exemple, la fonction  $u(x, y) = y^3$ . On a

$$u(A) = u(A_{13}) = u(A_{23}) = \Pi u(A_{13}) = \Pi u(A_{23}) = 1/27, \text{ mais } \Pi u(A) = 0$$

L'hypothèse H 2 n'est donc pas vérifiée. D'ailleurs, lorsque  $d \rightarrow 0$ , la dérivée  $\frac{\partial}{\partial x} \Pi u$  tend vers l'infini comme  $1/d$ , alors que l'on a  $\frac{\partial u}{\partial x} = 0$ .

#### REFERENCES

- [1] ADINI A and CLOUGH R W, *Analysis of plate bending by the finite element method* N S F report G 7337, 1961
- [2] AGMON S, *Lectures on elliptic boundary value problems*, Van Nostrand, 1965
- [3] BRAMBLE J H and HILBERT S R, *Estimation of linear functionals on Sobolev spaces with application to Fourier transforms and spline interpolation*, S I A M J Numer Anal, 7, 112-124, 1970
- [4] BRAMBLE J H and ZLAMAL M, *Triangular elements in the finite element method*, Math Comp, 24, 809-820, 1970
- [5] CIARLET P G and RAVIART P-A, *General Lagrange and Hermite interpolation in  $\mathbb{R}^n$  with applications to finite element methods*, Arch Rat Mech Anal, 46, 177-199, 1972
- [6] CIARLET P G and RAVIART P-A, *Interpolation theory over curved elements, with applications to finite element methods*, Comp Meth Appl Mech Eng, 1, 217-249, 1972
- [7] COURANT R and HILBERT D, *Methods of mathematical physics* Vol 2, Interscience publishers, 1962
- [8] LIONS J L, *Problèmes aux limites dans les équations aux dérivées partielles*, Presses de l'Université de Montréal, 1962
- [9] NICOLAIDES R A, *On a class of finite elements generated by Lagrange interpolation*, S I A M J, Numer Anal 10, 182-189 1973
- [10] STRANG G, *Approximation in the finite element method*, Numer Math, 19, 81-98, 1972
- [11] STRANG G and FIX G J, *An analysis of the finite element method*, Prentice Hall, 1973
- [12] SYNGE, J L, *The hypocircle in mathematical physics*, Cambridge University Press, 1957
- [13] ZIENKIEWICZ O C, *The finite element method in engineering science*, McGraw-Hill, 1971
- [14] ZLAMAL M, *On the finite element method*, Numer Math, 12, 394-409, 1968