

J.-C. NEDELEC

J. PLANCHARD

**Une méthode variationnelle d'éléments
finis pour la résolution numérique d'un
problème extérieur dans R^3**

*Revue française d'automatique informatique recherche opération-
nelle. Analyse numérique*, tome 7, n° R3 (1973), p. 105-129

http://www.numdam.org/item?id=M2AN_1973__7_3_105_0

© AFCET, 1973, tous droits réservés.

L'accès aux archives de la revue « Revue française d'automatique in-
formatique recherche opérationnelle. Analyse numérique » implique l'ac-
cord avec les conditions générales d'utilisation ([http://www.numdam.org/
conditions](http://www.numdam.org/conditions)). Toute utilisation commerciale ou impression systématique est
constitutive d'une infraction pénale. Toute copie ou impression de ce fi-
chier doit contenir la présente mention de copyright.

NUMDAM

Article numérisé dans le cadre du programme
Numérisation de documents anciens mathématiques
<http://www.numdam.org/>

UNE METHODE VARIATIONNELLE D'ELEMENTS FINIS POUR LA RESOLUTION NUMERIQUE D'UN PROBLEME EXTERIEUR DANS \mathbf{R}^3

par J.-C. NEDELEC ⁽¹⁾ et J. PLANCHARD ⁽²⁾

Communiqué par P. G. CIARLET

Résumé. — *Nous étudions le problème du calcul du potentiel électrique dans \mathbf{R}^3 en présence d'un conducteur Ω dont la frontière est Γ .*

Le potentiel u est alors solution des équations :

$$\begin{cases} \Delta u = 0 & \text{dans } \Omega, \\ \Delta u = 0 & \text{dans } \Omega^c, \\ u|_{\Gamma} = u_0 \end{cases}$$

En utilisant la technique du potentiel de simple couche, ce problème se ramène à une équation intégrale sur la frontière Γ du conducteur. Nous montrons dans une première partie que cette équation intégrale correspond à un problème variationnel coercif dans l'espace de Hilbert $H^{-1/2}(\Gamma)$. Nous appliquons ensuite les mêmes techniques au problème du potentiel électrique en présence d'un diélectrique parfait.

Dans une seconde partie nous en déduisons des méthodes variationnelles du type éléments finis pour résoudre numériquement ce problème. Nous donnons des estimations d'erreurs optimales dans divers espaces de Hilbert et en particulier dans $L^2(\Gamma)$.

1. PROBLEME EXTERIEUR POUR UN CONDUCTEUR ELECTRIQUE

Le problème est posé dans l'espace à trois dimensions \mathbf{R}^3 . Nous avons un conducteur électrique Ω de frontière Γ régulière et nous supposons que Ω est un ouvert borné de \mathbf{R}^3 . Les équations du potentiel électrique u engendré par

(1) Département de Mathématiques, Faculté des Sciences de Rennes-Beaulieu.

(2) Direction des Études et Recherches, Électricité de France.

le conducteur sont alors

$$(1.1) \quad \begin{cases} \Delta u = 0 & ; & \text{dans } \Omega, \\ \Delta u = 0 & ; & \text{dans } \Omega^c, \\ u|_{\Gamma} = u_0. \end{cases}$$

D'autre part le potentiel u est continu de part et d'autre de la frontière Γ . Les dérivées normales de part et d'autre de cette frontière sont définies dans le conducteur Ω et dans son complémentaire Ω^c respectivement mais elles sont différentes. (Ceci correspond à la discontinuité du champ électrique à la traversée d'un conducteur.) Nous orientons la normale à la frontière Γ vers l'extérieur du conducteur Ω et alors nous appelons charge électrique du conducteur la quantité q définie par :

$$(1.2) \quad q = \frac{\partial u}{\partial n} \Big|_{\text{int}\Omega} - \frac{\partial u}{\partial n} \Big|_{\text{ext}\Omega}.$$

Il est alors bien connu (cf. par exemple l'étude du potentiel de simple couche dans S. G. Mikhlín [11]), que la solution de (1.1) peut s'écrire sous la forme intégrale suivante :

$$(1.3) \quad u(x) = \frac{1}{4\pi} \int_{\Gamma} \frac{q(y)}{|x-y|} d\gamma(y) \quad , \quad \forall x \in \mathbf{R}^3$$

La quantité $r = |x|$ qui intervient dans l'équation (1.3) est la norme euclidienne dans l'espace \mathbf{R}^3 .

Nous allons montrer que la relation (1.3) permet de définir un isomorphisme que lie u_0 à q dans des espaces de Hilbert et que de plus, cet isomorphisme est associé à une forme bilinéaire symétrique et coercive.

1.1. Résolution du problème dans l'espace de Hilbert $H^{-1/2}(\Gamma)$

L'espace « naturel » pour résoudre le problème variationnel du potentiel dans \mathbf{R}^3 est l'adhérence de l'espace fonctionnel $\mathcal{D}(\mathbf{R}^3)$ pour la norme suivante :

$$(1.4) \quad \|u\| = \sqrt{\sum_{i=1}^3 \int_{\mathbf{R}^3} \left| \frac{\partial u}{\partial x_i} \right|^2 d\omega}.$$

Nous noterons, selon une convention couramment admise, par $W_0^1(\mathbf{R}^3)$ cet espace de Hilbert. D'après Deny-Lions [5] et Barros-Neto [1], nous avons les propriétés suivantes :

$$\begin{aligned} W_0^1(\mathbf{R}^3) &= \left\{ u \in L^6(\mathbf{R}^3) \ ; \ \frac{\partial u}{\partial x_i} \in L^2(\mathbf{R}^3) \ ; \ i = 1, 2, 3 \right\} \\ &= \left\{ u \in \mathcal{D}'(\mathbf{R}^3) \ ; \ (1+r^2)^{-1/2}u \in L^2(\mathbf{R}^3) \ ; \ \frac{\partial u}{\partial x_i} \in L^2(\mathbf{R}^3) \ ; \right. \\ &\quad \left. i = 1, 2, 3 \right\}. \end{aligned}$$

Nous introduisons les espaces de Hilbert suivants :

$$H^1(\Omega) = \left\{ u \in L^2(\Omega) \quad ; \quad \frac{\partial u}{\partial x_i} \in L^2(\Omega) \quad ; \quad i = 1, 2, 3 \right\}.$$

Nous savons (d'après Lions-Magènes [10]) que les fonctions de l'espace $H^1(\Omega)$ admettent une trace sur la frontière Γ et que l'application trace ainsi définie est continue et surjective de l'espace $H^1(\Omega)$ sur l'espace $H^{1/2}(\Gamma)$, qui est encore un espace de Hilbert. (Pour la définition exacte et les propriétés de cet espace et des espaces $H^s(\Gamma)$, pour s réel, nous renvoyons à Lions-Magènes [10].)

Nous noterons $u|_{\Gamma}$, la trace de la fonction u sur la frontière Γ . Alors nous introduisons l'espace de Hilbert suivant :

$$H_0^1(\Omega) = \{ u \in H^1(\Omega) \quad ; \quad u|_{\Gamma} = 0 \}.$$

Nous savons, d'après l'inégalité de Friedrichs, que l'expression :

$$(1.5) \quad \|u\| = \sqrt{\int_{\Omega} \sum_{i=1}^3 \left| \frac{\partial u}{\partial x_i} \right|^2 d\omega},$$

est une norme sur l'espace $H_0^1(\Omega)$, qui est équivalente à la norme habituelle. Nous introduisons enfin les espaces qui jouent un rôle analogue aux précédents pour le complémentaire Ω^c du conducteur Ω :

$$W^1(\Omega^c) = \left\{ u \in \mathcal{D}'(\Omega^c) \quad ; \quad (1+r^2)^{-1/2}u \in L^2(\Omega^c) \quad ; \quad \frac{\partial u}{\partial x_i} \in L^2(\Omega^c) \quad ; \right. \\ \left. i = 1, 2, 3 \right\}.$$

Nous savons, d'après Deny-Lions [5] que l'espace $W^1(\Omega^c)$ est contenu dans l'espace de Hilbert $H_{loc}^1(\Omega^c)$. En particulier les éléments de l'espace $W^1(\Omega^c)$ admettent une trace sur la frontière Γ qui est encore dans l'espace $H^{1/2}(\Gamma)$; et nous pouvons donc définir l'espace :

$$W_0^1(\Omega^c) = \{ u \in W^1(\Omega^c) \quad ; \quad u|_{\Gamma} = 0 \}.$$

D'après l'inégalité de Hardy, l'expression

$$(1.6) \quad \|u\| = \sqrt{\int_{\Omega^c} \sum_{i=1}^3 \left| \frac{\partial u}{\partial x_i} \right|^2 d\omega},$$

est une norme sur $W_0^1(\Omega^c)$ équivalente à la norme habituelle.

Nous allons résoudre le problème (1.1) dans l'espace $W_0^1(\mathbb{R}^3)$ de la façon suivante.

Soit un relèvement de la fonction u_0 de l'espace $H^{1/2}(\Gamma)$, que nous noterons φ . Nous pouvons choisir ce relèvement φ dans l'espace $W_0^1(\mathbb{R}^3)$ et à support compact dans l'espace \mathbb{R}^3 .

Alors la fonction u vérifie :

$$(1.7) \quad \begin{cases} \Delta(u - \varphi) = -\Delta\varphi & , \text{ dans } \Omega, \\ (u - \varphi)|_{\Gamma} = 0. \end{cases}$$

Le problème (1.7) admet une solution unique dans l'espace $H_0^1(\Omega)$ qui est l'unique solution u du problème variationnel (et coercif d'après (1.5)) :

$$(1.8) \quad \sum_{i=1}^3 \int_{\Omega} \frac{\partial(u - \varphi)}{\partial x_i} \frac{\partial v}{\partial x_i} d\omega = - \sum_{i=1}^3 \int_{\Omega} \frac{\partial\varphi}{\partial x_i} \frac{\partial v}{\partial x_i} d\omega \quad ; \quad \forall v \in H_0^1(\Omega).$$

D'autre part la fonction u vérifie :

$$(1.9) \quad \begin{cases} \Delta(u - \varphi) = -\Delta\varphi & , \text{ dans } \Omega^c, \\ (u - \varphi)|_{\Gamma} = 0. \end{cases}$$

Le problème (1.9) admet une solution unique dans l'espace $W_0^1(\Omega^c)$ qui est l'unique solution u du problème variationnel (et coercif d'après (1.6)) :

$$(1.10) \quad \sum_{i=1}^3 \int_{\Omega^c} \frac{\partial(u - \varphi)}{\partial x_i} \frac{\partial v}{\partial x_i} d\omega = - \sum_{i=1}^3 \int_{\Omega^c} \frac{\partial\varphi}{\partial x_i} \frac{\partial v}{\partial x_i} d\omega \quad ; \quad \forall v \in W_0^1(\Omega^c).$$

En raccordant les deux solutions ainsi construites, nous obtenons une solution u dans l'espace $W_0^1(\mathbb{R}^3)$ du problème (1.1) au sens défini par les problèmes (1.8) et (1.10). Il est facile de voir que cette solution est indépendante du relèvement φ choisi de la fonction u_0 . Remarquons encore que la solution u ainsi construite du problème (1.1) est telle que la distribution Δu est dans l'espace de Hilbert $(W_0^1(\mathbb{R}^3))'$ et a son support contenu dans la surface Γ . Cette dernière propriété nous permet de montrer l'unicité dans l'espace $W_0^1(\mathbb{R}^3)$ de la solution u du problème (1.1) ainsi précisé.

Soit deux solutions du problème (1.1); alors la différence vérifie :

$$\begin{cases} \text{supp } (\Delta w) \subset \Gamma & ; \quad w \in W_0^1(\mathbb{R}^3) ; \\ w|_{\Gamma} = 0. \end{cases}$$

Donc la fonction w vérifie :

$$\begin{aligned} \sum_{i=1}^3 \int_{\Omega} \frac{\partial w}{\partial x_i} \frac{\partial v}{\partial x_i} d\omega &= 0 \quad ; \quad \forall v \in \mathcal{D}(\Omega) ; \\ \sum_{i=1}^3 \int_{\Omega^c} \frac{\partial w}{\partial x_i} \frac{\partial v}{\partial x_i} d\omega &= 0 \quad ; \quad \forall v \in \mathcal{D}(\Omega^c). \end{aligned}$$

Il existe une suite de fonction v_n définies sur \mathbf{R}^3 et dans l'espace

$$\mathcal{D}(\Omega) \cap \mathcal{D}(\Omega^c)$$

telle que

$$v_n \rightarrow w,$$

dans l'espace $W_0^1(\mathbf{R}^3)$ car la trace $w|_{\Gamma}$ est nulle.

En passant à la limite dans les deux égalités ci-dessus, nous en déduisons :

$$\sum_{i=1}^3 \int_{\mathbf{R}^3} \frac{\partial w}{\partial x_i} \frac{\partial w}{\partial x_i} d\omega = 0.$$

Donc la fonction w est nulle d'après la propriété de l'expression (1.4).

Nous résumons ce résultat dans le lemme suivant :

Lemme 1.1. *Le problème (1.1) admet une solution unique u , si la fonction u_0 est donnée dans l'espace $H^{1/2}(\Gamma)$; la fonction u ainsi définie est dans le sous-espace vectoriel fermé K de l'espace $W_0^1(\mathbf{R}^3)$ suivant :*

$$K = \{ u \in W_0^1(\mathbf{R}^3) \quad ; \quad \Delta u \in (W_0^1(\mathbf{R}^3))' \quad ; \quad \text{supp}(\Delta u) \subset \Gamma \}.$$

Enfin le problème (1.1) définit un isomorphisme de $H^{1/2}(\Gamma)$ sur K .

Nous appelons $H^{-1/2}(\Gamma)$ l'espace dual de l'espace de Hilbert $H^{1/2}(\Gamma)$, qui est un espace de distributions sur la variété sans bord Γ . Nous noterons par $\langle \cdot, \cdot \rangle$, la dualité entre les espaces $H^{-1/2}(\Gamma)$ et $H^{1/2}(\Gamma)$.

Nous choisissons cette dualité de façon que :

$$(1.11) \quad \langle q, u \rangle = \int_{\Gamma} q u \, d\gamma \quad ; \quad \forall q \in L^2(\Gamma) \quad , \quad \forall u \in H^{1/2}(\Gamma).$$

Le lemme 1.1 nous permet de définir (d'après Lions-Magenès [9]) les dérivées

normales $\frac{\partial u}{\partial n} \Big|_{\text{int}\Omega}$ et $\frac{\partial u}{\partial n} \Big|_{\text{ext}\Omega}$ par les formules :

$$(1.12) \quad \left\langle \frac{\partial u}{\partial n} \Big|_{\text{int}\Omega}, v|_{\Gamma} \right\rangle = \sum_{i=1}^3 \int_{\Omega} \frac{\partial u}{\partial x_i} \frac{\partial v}{\partial x_i} d\omega \quad ; \quad \forall v \in H^1(\Omega) \quad ;$$

$$(1.13) \quad \left\langle \frac{\partial u}{\partial n} \Big|_{\text{ext}\Omega}, v|_{\Gamma} \right\rangle = - \sum_{i=1}^3 \int_{\Omega^c} \frac{\partial u}{\partial x_i} \frac{\partial v}{\partial x_i} d\omega \quad ; \quad \forall v \in W^1(\Omega^c).$$

En utilisant alors la définition de la charge électrique q donnée par l'expression (1.2), nous avons montré que si la fonction u_0 est dans l'espace $H^{1/2}(\Gamma)$, la distribution de charge q est dans l'espace de Hilbert $H^{-1/2}(\Gamma)$.

Nous avons :

$$(1.14) \quad \sum_{i=1}^3 \int_{\mathbb{R}^3} \frac{\partial u}{\partial x_i} \frac{\partial v}{\partial x_i} d\omega = \langle q, v|_{\Gamma} \rangle \quad ; \quad \forall v \in W_0^1(\mathbb{R}^3).$$

Réciproquement si la distribution q est donnée dans l'espace $H^{-1/2}(\Gamma)$ le problème variationnel (1.14) admet une solution unique u dans $W_0^1(\mathbb{R}^3)$ d'après la propriété de l'expression (1.4). Il est facile de voir que cette solution u est dans le sous-espace K de l'espace $W_0^1(\mathbb{R}^3)$. Nous avons donc ainsi un isomorphisme de l'espace $H^{1/2}(\Gamma)$ sur l'espace $H^{-1/2}(\Gamma)$.

Pour expliciter l'équation résolue, nous rappelons le résultat suivant (cf. Mikhlin [11] par exemple).

Lemme 1.2. *Si $q \in \mathcal{D}(\Gamma)$, la solution unique du problème (1.14) est donnée par l'expression (1.3).*

Démonstration. La fonction $r \rightarrow \frac{1}{4\pi r}$ étant la solution élémentaire de l'opérateur Δ , on en déduit que les équations (1.14) sont vérifiées. Il est d'autre part facile de voir que l'expression (1.3) définit une fonction u de l'espace $W_0^1(\mathbb{R}^3)$ dès que la fonction q est assez régulière.

Théorème 1.1. *L'application de $\mathcal{D}(\Gamma)$ dans $W_0^1(\mathbb{R}^3)$ définie par l'expression (1.3) est continue de $H^{-1/2}(\Gamma)$ dans K (et dans $H^{1/2}(\Gamma)$) et se prolonge de manière unique en un isomorphisme de $H^{-1/2}(\Gamma)$ sur K (et sur $H^{1/2}(\Gamma)$). D'autre part cet isomorphisme correspond au problème variationnel coercif défini comme suit : Trouver q dans l'espace $H^{-1/2}(\Gamma)$ tel que :*

$$(1.15) \quad \frac{1}{4\pi} \int_{\Gamma} \int_{\Gamma} \frac{q(x)q'(y)}{|x-y|} d\gamma(x) d\gamma(y) = \langle q', u_0 \rangle \quad ; \quad \forall q' \in H^{-1/2}(\Gamma).$$

La forme bilinéaire du premier membre est définie pour q et q' dans l'espace $\mathcal{D}(\Gamma)$, est continue sur l'espace $H^{-1/2}(\Gamma) \times H^{-1/2}(\Gamma)$ et donc se prolonge de manière unique en une forme bilinéaire continue sur l'espace

$$H^{-1/2}(\Gamma) \times H^{-1/2}(\Gamma).$$

Enfin l'expression

$$(1.16) \quad \|q\| = \left[\frac{1}{4\pi} \int_{\Gamma} \int_{\Gamma} \frac{q(x)q(y)}{|x-y|} d\gamma(x) d\gamma(y) \right]^{1/2},$$

est une norme sur l'espace $H^{-1/2}(\Gamma)$ équivalente à la norme habituelle.

Démonstration. La première partie du théorème résulte des lemmes 1.1 et 1.2. Il reste à vérifier que la forme bilinéaire définie par l'expression (1.16) est coercive sur l'espace $H^{-1/2}(\Gamma)$. Soit q dans l'espace $H^{-1/2}(\Gamma)$; en résolvant le problème (1.14) avec pour second membre la distribution q , nous définissons

une fonction u de l'espace K et sa trace $u|_{\Gamma}$ dans l'espace $H^{1/2}(\Gamma)$. Alors si la distribution est plus régulière nous avons

$$u(y) = \frac{1}{4\pi} \int_{\Gamma} \frac{q(x)}{|x-y|} d\gamma(x) ;$$

d'où :

$$\langle q, u \rangle = \frac{1}{4\pi} \int_{\Gamma} \int_{\Gamma} \frac{q(x)q(y)}{|x-y|} d\gamma(x) d\gamma(y) = \sum_{i=1}^3 \int_{\mathbb{R}^3} \left| \frac{\partial u}{\partial x_i} \right|^2 d\omega ;$$

Mais nous avons (nous utilisons l'isomorphisme $q \rightarrow u$ défini de $H^{-1/2}(\Gamma)$ sur K) :

$$\sum_{i=1}^3 \int_{\mathbb{R}^3} \left| \frac{\partial u}{\partial x_i} \right|^2 d\omega \geq \alpha \|q\|_{H^{-1/2}(\Gamma)}^2 \quad ; \quad \alpha > 0.$$

1.2. Théorèmes de régularité

Nous avons supposé jusque là que la fonction u_0 était dans l'espace $H^{1/2}(\Gamma)$; nous allons montrer que des hypothèses supplémentaires de régularité sur la fonction u_0 entraînent également davantage de régularité sur les fonctions q et u .

Nous introduisons les espaces de Hilbert suivants (m entier ≥ 1) :

$$H^m(\Omega) = \{ u \in L^2(\Omega) \ ; \ \partial^\lambda u \in L^2(\Omega) \ ; \ \lambda \text{ multi-indice avec } |\lambda| \leq m \}.$$

$$W_{m-1}^m(\Omega^c) = \{ u \in \mathcal{D}'(\Omega^c) \ ; \ (1+r^2)^{\frac{|\lambda|-1}{2}} \partial^\lambda u \in L^2(\Omega^c) \ ; \ |\lambda| \leq m \}.$$

Nous avons le théorème suivant :

Théorème 1.2. *La solution u dans l'espace $W_0^1(\mathbb{R}^3)$ du problème suivant :*

$$(1.17) \quad \sum_{i=1}^3 \int_{\Omega} \frac{\partial u}{\partial x_i} \frac{\partial v}{\partial x_i} d\omega + \eta \sum_{i=1}^3 \int_{\Omega^c} \frac{\partial u}{\partial x_i} \frac{\partial v}{\partial x_i} d\omega = \langle q, v|_{\Gamma} \rangle \ ; \ \forall v \in W_0^1(\mathbb{R}^3)$$

($n > 0$) admet une trace sur la surface Γ , soit $u|_{\Gamma}$, qui est dans l'espace $H^s(\Gamma)$ si la distribution q est dans l'espace $H^{s-1}(\Gamma)$ ($s \geq \frac{1}{2}$).

Si m est un entier positif; l'application $q \rightarrow u|_{\Omega}$, est continue de l'espace $H^{m-1/2}(\Gamma)$ dans l'espace $H^{m+1}(\Omega)$; l'application $q \rightarrow u|_{\Omega^c}$, est continue de l'espace $H^{m-1/2}(\Gamma)$ dans l'espace $W_{m-1}^{m+1}(\Omega^c)$; enfin l'application $q \rightarrow u|_{\Gamma}$, est un isomorphisme, auto-adjoint par rapport au produit scalaire de l'espace $L^2(\Gamma)$, de l'espace $H^s(\Gamma)$ sur l'espace $H^{s+1}(\Gamma)$ pour tout s réel.

Démonstration. Nous avons déjà démontré le résultat pour m nul avec η égal à 1. Le cas η différent de 1 est analogue. L'application $q \rightarrow u|_{\Gamma}$, est évidemment auto-adjointe, et il nous suffit donc pour montrer la dernière partie du théorème

de nous restreindre au cas s supérieur à $\frac{1}{2}$; il suffit même de le montrer pour $s = m + \frac{1}{2}$, entier positif, puis d'utiliser la théorie de l'interpolation sur la surface Γ pour démontrer le résultat général. La continuité des applications $q \rightarrow u|_{\Omega}$ et $q \rightarrow u|_{\Omega^c}$, résultera de la démonstration de la dernière partie du théorème. Nous avons par ailleurs déjà démontré (pour $\eta = 1$, cependant la démonstration s'adapte facilement) que l'application $q \rightarrow u|_{\Gamma}$, est un isomorphisme de l'espace $H^{-1/2}(\Gamma)$ sur $H^{1/2}(\Gamma)$. Pour démontrer notre résultat, nous allons montrer que si la fonction $u|_{\Gamma}$ est dans l'espace $H^{m+1/2}(\Gamma)$ alors la fonction q est dans l'espace $H^{m-1/2}(\Gamma)$ et réciproquement. La continuité des applications correspondantes résulte du théorème du graphe fermé. Soit $u|_{\Gamma}$ dans l'espace $H^{m+1/2}(\Gamma)$. Il résulte des théorèmes de régularité des problèmes aux limites non homogènes (cf. Lions-Magenes [10]) que la solution du problème (1.8) est dans l'espace $H^{m+1}(\Omega)$, donc la dérivée normale $\left. \frac{\partial u}{\partial n} \right|_{\text{int } \Omega}$ est dans l'espace $H^{m-1/2}(\Gamma)$. De même il résulte de la régularité des problèmes aux limites non homogènes dans le complémentaire d'un ouvert borné régulier (cf. Hanouzet [7]) que la fonction u est dans l'espace $W_m^{m+1}(\Omega^c)$; donc la dérivée normale $\left. \frac{\partial u}{\partial n} \right|_{\text{ext } \Omega}$ est dans l'espace $H^{m-1/2}(\Gamma)$. Donc la fonction q donnée par l'expression (1.2) est aussi dans l'espace $H^{m-1/2}(\Gamma)$.

Il reste à démontrer la réciproque. Soit

$$a(u, v) = \sum_{i=1}^3 \int_{\Omega} \frac{\partial u}{\partial x_i} \frac{\partial v}{\partial x_i} d\omega + \eta \sum_{i=1}^3 \int_{\Omega^c} \frac{\partial u}{\partial x_i} \frac{\partial v}{\partial x_i} d\omega.$$

Nous noterons par γ l'application trace sur la surface Γ .

Nous résolvons le problème suivant :

$$(1.18) \quad a(u, v) = \langle q, \gamma \circ v \rangle \quad ; \quad \forall v \in W_0^1(\mathbb{R}^3).$$

Nous utilisons un système de cartes locales au voisinage de la surface Γ . Plus précisément, soit x_0 sur Γ et V un voisinage ouvert de x_0 dans \mathbb{R}^3 . Nous nous donnons un C^∞ -difféomorphisme θ de V sur une boule B de \mathbb{R}^3 , tel que $V \cap \Gamma$ a pour image l'ensemble $B \cap \{y_3 = 0\}$.

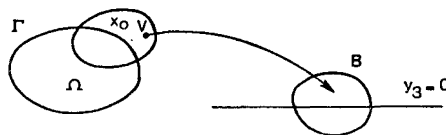


Figure 1.

Il suffit de montrer le résultat cherché pour chacun des voisinages de la surface Γ ainsi construits.

Soit Ψ une fonction de l'espace $\mathcal{D}(V)$ avec Ψ identique à 1 dans un voisinage du point x_0 . Nous calculons la quantité $a(u, \Psi v)$:

$$a(u, \Psi v) = \langle q, \gamma \circ (\Psi v) \rangle = \langle \gamma \circ (\Psi q), \gamma \circ v \rangle \quad ; \quad \forall v \in W_0^1(\mathbb{R}^3).$$

D'où :

$$\left\{ \begin{aligned} a(\Psi u, v) &= \langle \gamma \circ (\Psi q), \gamma \circ v \rangle - \sum_{i=1}^3 \left[\int_{\Omega} \left(\frac{\partial \Psi}{\partial x_i} u \frac{\partial v}{\partial x_i} + \frac{\partial \Psi}{\partial x_i} \frac{\partial u}{\partial x_i} v \right) d\omega \right. \\ &\quad \left. + \eta \int_{\Omega'} \left(\frac{\partial \Psi}{\partial x_i} u \frac{\partial v}{\partial x_i} + \frac{\partial \Psi}{\partial x_i} \frac{\partial u}{\partial x_i} v \right) d\omega \right]. \end{aligned} \right.$$

Nous définissons alors sur la boule B la forme bilinéaire :

$$d(u_1, u_2) = a(u_1 \tilde{\circ} \theta, u_2 \tilde{\circ} \theta) \quad ; \quad \forall u_1, u_2 \in H_0^1(B).$$

($\tilde{\circ}$ désigne le prolongement par zéro à \mathbb{R}^3 tout entier des fonctions définies sur l'ouvert V).

Alors la forme bilinéaire d est coercive sur l'espace $H_0^1(B)$, donc

$$(1.19) \quad \|u\|_{H_0^1(B)} \leq c \sup_{w \in H_0^1(B)} \frac{d(u_1, w)}{\|w\|_{H_0^1(B)}}$$

Soit $w_1 = \Psi u \circ \theta^{-1}$ une fonction de l'espace $H_0^1(B)$. Nous avons :

$$(1.20) \quad \left\{ \begin{aligned} d(w_1, w) &= a(\Psi u, w \tilde{\circ} \theta) = \langle \gamma \circ (\Psi q), \gamma \circ (w \tilde{\circ} \theta) \rangle \\ &\quad - \sum_{i=1}^3 \left[\int_{\Omega} \frac{\partial \Psi}{\partial x_i} u \frac{\partial (w \tilde{\circ} \theta)}{\partial x_i} d\omega \right. \\ &\quad \left. + \int_{\Omega} \frac{\partial \Psi}{\partial x_i} \frac{\partial u}{\partial x_i} \cdot (w \tilde{\circ} \theta) \cdot d\omega \right. \\ &\quad \left. + \eta \int_{\Omega'} \left(\frac{\partial \Psi}{\partial x_i} u \frac{\partial (w \tilde{\circ} \theta)}{\partial x_i} + \frac{\partial \Psi}{\partial x_i} \frac{\partial u}{\partial x_i} w \tilde{\circ} \theta \right) d\omega \right], \\ &\quad \forall w \in H_0^1(B). \end{aligned} \right.$$

En fait l'égalité (1.20) a lieu pour toute fonction w dans l'espace $H^1(\mathbb{R}^3)$ car les fonctions Ψ et $\frac{\partial \Psi}{\partial x_i}$ sont nulles sur le bord de l'ouvert V . Nous utilisons maintenant les quotients différentiels dans l'expression (1.19).

Soit,

$$\rho_{ih} w(y) = \frac{w(-, y_i + h, -) - w(y)}{h} \quad ; \quad \forall w \in H^1(\mathbb{R}^3) \quad ; \quad h > 0.$$

Nous avons alors :

$$(1.21) \left\{ \begin{aligned} d(w_1, \rho_{ih}w) &= \langle \gamma \circ (\Psi q), \gamma \circ (\rho_{ih}w \tilde{\theta}) \rangle \\ &- \sum_{j=1}^3 \left[\int_{\Omega} \frac{\partial \Psi}{\partial x_j} u \frac{\partial}{\partial x_j} (\rho_{ih}w \tilde{\theta}) \right] d\omega \\ &+ \int_{\Omega} \frac{\partial \Psi}{\partial x_j} \frac{\partial u}{\partial x_j} (\rho_{ih}w \tilde{\theta}) d\omega + \eta \int_{\Omega^c} \left(\frac{\partial \Psi}{\partial x_j} u \frac{\partial}{\partial x_j} (\rho_{ih}w \tilde{\theta}) \right. \\ &\left. + \frac{\partial \Psi}{\partial x_j} \frac{\partial u}{\partial x_j} \rho_{ih}w \tilde{\theta} \right) d\omega. \end{aligned} \right.$$

D'autre part nous avons :

$$\begin{aligned} d(\rho_{ih}w_1, w) &= \sum_{j=1}^3 \left[\int_{\Omega} \frac{\partial}{\partial x_j} (\rho_{ih}w_1(\theta(x))) \frac{\partial}{\partial x_j} (w(\theta(x))) d\omega \right. \\ &\left. + \eta \int_{\Omega^c} \frac{\partial}{\partial x_j} (\rho_{ih}w_1(\theta(x))) \frac{\partial}{\partial x_j} w(\theta(x)) d\omega \right] \\ &= \sum_{j=1}^3 \left[\int_{\mathbf{R}^{3+}} \frac{\partial}{\partial x_j} (\rho_{ih}w_1(y)) \frac{\partial}{\partial x_j} w(y) \cdot J(y) dy \right. \\ &\left. + \eta \int_{\mathbf{R}^{3-}} \frac{\partial}{\partial x_j} (\rho_{ih}w_1(y)) \frac{\partial}{\partial x_j} w(y) J(y) dy \right] ; \\ \frac{\partial}{\partial x_j} &= \sum_{k=1}^3 \frac{\partial}{\partial x_j} \theta_k \frac{\partial}{\partial y_k} \end{aligned}$$

la quantité J désigne le jacobien de l'application θ^{-1} . Nous effectuons une intégration par parties discrète sur les termes de la forme d .

Soit (nous notons h_i le vecteur $h\vec{e}_i$) :

$$\begin{aligned} \sum_{j=1}^3 \int_{\mathbf{R}^{3+}} \frac{\partial}{\partial x_j} \left(\frac{w_1(y + h_i) - w_1(y)}{h} \right) \frac{\partial}{\partial x_j} (w(y)) \cdot J(y) dy \\ = - \int_{\mathbf{R}^{3+}} \sum_{j=1}^3 \frac{\partial}{\partial x_j} (w_1(y)) \frac{\partial}{\partial x_j} \left(\frac{w(y - h_i) - w(y)}{h} \right) J(y) dy \\ + \sum_{j=1}^3 \int_{\mathbf{R}^{3+}} \frac{\partial}{\partial x_j} (w_1(y)) \frac{\partial}{\partial x_j} (w(y - h_i)) \frac{J(y - h_i) - J(y)}{h} dy. \end{aligned}$$

Donc

$$(1.22) \left\{ \begin{aligned} d(\rho_{ih}w_1, w) &= -d(w_1, \rho_{ih}w) \\ &+ \int_{\mathbf{R}^{3+}} \sum_{j=1}^3 \frac{\partial w_1(y)}{\partial x_j} \frac{\partial w(y - h_i)}{\partial x_j} \frac{J(y - h_i) - J(y)}{h} dy \\ &+ \eta \int_{\mathbf{R}^{3-}} \sum_{j=1}^3 \frac{\partial w_1(y)}{\partial x_j} \frac{\partial w(y - h_i)}{\partial x_j} \frac{J(y - h_i) - J(y)}{h} dy \end{aligned} \right.$$

En effectuant de même des intégrations par parties discrètes dans l'expression (1.21) nous obtenons finalement :

$$d(\rho_{ih} w_1, w) = \langle \gamma \circ (\Psi \rho_{ih} q), \gamma \circ w \tilde{\theta} \rangle + \mathbf{R}.$$

Le reste R vérifie la majoration

$$|R| \leq c \|u\|_{W_0^1(\mathbf{R}^3)} \|w\|_{H^1(B)}.$$

En utilisant alors l'inégalité (1.19) nous déduisons :

$$\|\rho_{ih} w\|_{H_0^1(B)} \leq c \left(\left\| \frac{\partial}{\partial x_i} q \right\|_{H^{-1/2}(\Gamma)} + \|u\|_{H^1(\Omega)} + \|u\|_{W^1(\Omega^c)} \right).$$

Nous déduisons de l'inégalité ci-dessus en faisant tendre h vers zéro :

$$\frac{\partial}{\partial y_i} w_1 \in H_0^1(B) \quad ; \quad i = 1, 2 \quad ; \quad \Rightarrow \gamma w_1 \in H^{3/2}(\mathbf{R}^3).$$

En revenant à l'expression de la fonction u nous déduisons :

$$u \in H^{3/2}(V) \quad , \quad \forall V \Rightarrow u \in H^{3/2}(\Gamma).$$

En utilisant les théorèmes de régularité des problèmes aux limites non homogènes dans les ouverts Ω et Ω^c respectivement, nous en déduisons

$$u \in H^2(\Omega) \quad , \quad u \in W_1^2(\Omega^c).$$

Nous pouvons obtenir les estimations d'ordre supérieur en procédant par récurrence et en utilisant des quotients différentiels d'ordre supérieur.

Corollaire 1.1. *L'isomorphisme défini par le problème (1.15) est aussi un isomorphisme de l'espace $H^s(\Gamma)$ sur l'espace $H^{s-1}(\Gamma)$ pour tout s réel.*

REMARQUE 1.1. La technique développée ci-dessus n'est pas particulière à l'opérateur $-\Delta$. Elle s'adapte facilement à tous les opérateurs elliptiques coercifs du second ordre et à coefficients constants, dont on connaît explicitement la solution élémentaire. Nous renvoyons à Hormander [9] pour le calcul des solutions élémentaires.

Avec un choix convenable des espaces de Hilbert, on peut aussi résoudre par des méthodes analogues des problèmes d'ordre plus élevé. Pour l'établissement des équations intégrales dans le cas du système de l'élasticité linéaire, nous renvoyons à Muskhelishvili [12].

II. PROBLEME EXTERIEUR POUR UN DIELECTRIQUE PARFAIT

Le problème est encore posé dans l'espace \mathbf{R}^3 . Nous avons un diélectrique parfait qui est un ouvert borné Ω de frontière Γ régulière. Les équations du potentiel électrique sont alors :

$$(2.1) \quad \begin{cases} \Delta u = 0 & ; \quad \text{dans } \Omega \\ \Delta u = 0 & ; \quad \text{dans } \Omega^c \\ \frac{\partial u}{\partial n} \Big|_{\text{ext}\Omega} = \varepsilon \frac{\partial u}{\partial n} \Big|_{\text{int}\Omega} - g & ; \quad \varepsilon > 0. \end{cases}$$

D'autre part, le potentiel u est continu à la traversée de la surface Γ .

Il est facile de voir que l'équation (2.1) est équivalente au problème variationnel suivant :

trouver u dans l'espace $W_0^1(\mathbf{R}^3)$ vérifiant

$$(2.2) \quad \sum_{i=1}^3 \left[\varepsilon \int_{\Omega} \frac{\partial u}{\partial x_i} \frac{\partial v}{\partial x_i} d\omega + \int_{\Omega^c} \frac{\partial u}{\partial x_i} \frac{\partial v}{\partial x_i} d\omega = \langle g, v|_{\Gamma} \rangle ; \quad \forall v \in W_0^1(\mathbf{R}^3). \right.$$

Le théorème 2.1 montre que l'application $g \rightarrow u|_{\Gamma}$, est un isomorphisme de l'espace $H^{s-1}(\Gamma)$ sur l'espace $H^s(\Gamma)$ pour tout s réel. Mais, nous ne connaissons pas de représentation intégrale du potentiel u en fonction de la donnée g analogue à l'expression (1.3), si le paramètre ε est différent de 1. Aussi afin d'écrire le problème (2.2) sous une forme intégrale nous introduisons

$$(2.3) \quad q = - \frac{\partial u}{\partial n} \Big|_{\text{ext}\Omega} + \frac{\partial u}{\partial n} \Big|_{\text{int}\Omega}.$$

La quantité q peut alors s'interpréter comme une charge fictive du diélectrique (cf. les cours classiques d'électrostatique).

Alors :

$$(2.4) \quad u(y) = \frac{1}{4\pi} \int_{\Gamma} \frac{q(x)}{|x-y|} d\gamma(x) \quad , \quad y \in \mathbf{R}^3.$$

Nous avons d'autre part le résultat suivant :

Lemme 2.1. *Soit la fonction u définie sur \mathbf{R}^3 par l'intégrale (2.4) pour une charge q dans l'espace $\mathcal{D}(\Gamma)$, alors les dérivées normales $\frac{\partial u}{\partial n} \Big|_{\text{ext}\Omega}$ et $\frac{\partial u}{\partial n} \Big|_{\text{int}\Omega}$*

sont données par :

$$(2.5) \quad \left. \frac{\partial u(y)}{\partial n} \right|_{\text{ext}\Omega} = -\frac{q(y)}{2} + \frac{1}{4\pi} \int_{\Gamma} \frac{q(x)(x-y, n_y)}{|x-y|^3} d\gamma(x),$$

$$(2.6) \quad \left. \frac{\partial u(y)}{\partial n} \right|_{\text{int}\Omega} = \frac{q(y)}{2} + \frac{1}{4\pi} \int_{\Gamma} \frac{q(x)(x-y, n_y)}{|x-y|^3} d\gamma(x).$$

La normale extérieure à Ω au point y de la surface Γ est désignée par n_y .

Démonstration. Nous renvoyons par exemple à Mikhlin [11].

Théorème 2.1. L'isomorphisme défini par le problème (2.2) se représente par la solution de l'équation :

$$\begin{cases} \frac{1+\varepsilon}{2} q(y) + \frac{\varepsilon-1}{4\pi} \int_{\Gamma} \frac{q(x)(x-y, n_y)}{|x-y|^3} d\gamma(x) = g(y) & ; \quad \forall y \in \Gamma & ; \\ u(y) = \frac{1}{4\pi} \int_{\Gamma} \frac{q(x)}{|x-y|} d\gamma(x) & ; \quad \forall y \in \mathbb{R}^3. \end{cases}$$

L'application $g \rightarrow q$, est un isomorphisme de l'espace $H^s(\Gamma)$ sur lui-même pour tout s réel, qui correspond au problème variationnel coercif suivant :

Trouver q dans l'espace $H^{-1/2}(\Gamma)$ vérifiant :

$$(2.8) \quad \begin{cases} \frac{1+\varepsilon}{2} \int_{\Gamma} \int_{\Gamma} \frac{q(y)q'(x)}{|x-y|} d\gamma(x) d\gamma(y) \\ + \frac{\varepsilon-1}{4\pi} \int_{\Gamma} \int_{\Gamma} \int_{\Gamma} \frac{q(z)(z-y, n_y)}{|z-y|^3} \frac{q'(x)}{|x-y|} d\gamma(x) d\gamma(y) d\gamma(z) \\ = \int_{\Gamma} \int_{\Gamma} \int_{\Gamma} \frac{g(y)q'(x)}{|x-y|} d\gamma(x) d\gamma(y) & ; \quad \forall q' \in H^{-1/2}(\Gamma). \end{cases}$$

Démonstration. L'application $g \rightarrow q$, se décompose en les deux isomorphismes $g \rightarrow u|_{\Gamma}$, et $u|_{\Gamma} \rightarrow q$. Le résultat s'en déduit donc facilement. La coercivité de la forme bilinéaire (2.8) s'obtient en vérifiant que, si la fonction q' est égale à la fonction q , le premier membre de l'expression (2.8) vaut I .

$$I = \sum_{i=1}^3 \left[\varepsilon \int_{\Omega} \left| \frac{\partial u}{\partial x_i} \right|^2 d\omega + \int_{\Omega^c} \left| \frac{\partial u}{\partial x_i} \right|^2 d\omega \right] \geq \alpha \|q\|_{H^{-1/2}(\Gamma)}^2 & ;$$

$$\forall q \in H^{-1/2}(\Gamma) & ; \quad \alpha > 0.$$

La dernière inégalité ci-dessus résulte du chapitre I.

REMARQUE 2.1. Les problèmes de potentiel électrique en présence de plusieurs conducteurs et plusieurs diélectriques, conduisent à des systèmes

d'équations intégrales du type ci-dessus, que l'on peut étudier facilement à l'aide des techniques utilisées ici.

REMARQUE 2.2. Les équations intégrales que nous considérons ici sont des cas particuliers d'opérateurs pseudo-différentiels sur la variété sans bord Γ . Pour une étude très complète de ces problèmes par des techniques très différentes nous renvoyons à Seeley [15] et à Boutet de Monvel [2].

III. UNE METHODE D'ELEMENTS FINIS POUR LA RESOLUTION NUMERIQUE DES PROBLEMES EXTERIEURS

Nous allons étudier une méthode d'éléments finis pour résoudre le problème (1.15) sous sa forme variationnelle. Nous définissons des sous-espaces de dimension finie de l'espace de Hilbert $H^{-1/2}(\Gamma)$, que nous noterons V_h , et le problème approché est :

Trouver un élément q_h dans V_h tel que

$$(3.1) \quad \frac{1}{4\pi} \int_{\Gamma} \int_{\Gamma} \frac{q_h(x)q'_h(y)}{|x-y|} d\gamma(x) d\gamma(y) = \int_{\Gamma} u_{0h}(y)q'_h(y) d\gamma(y) \quad ; \quad \forall q'_h \in V_h.$$

La quantité u_{0h} est une approximation dans l'espace V_h de la donnée u_0 . Alors en utilisant la coercivité, nous déduisons le théorème d'erreur :

Théorème 3.1. *Si q désigne la solution du problème (1.15) et q_h désigne l'unique solution du problème (3.1), nous avons la majoration :*

$$(3.2) \quad \|q - q_h\|_{H^{-1/2}(\Gamma)} \leq c[\inf_{q'_h \in V_h} \|q - q'_h\|_{H^{-1/2}(\Gamma)} + \|u_0 - u_{0h}\|_{H^{1/2}(\Gamma)}].$$

Démonstration. Nous avons l'inégalité : ($\alpha > 0$)

$$\begin{aligned} \alpha \|q_h - q'_h\|_{H^{-1/2}(\Gamma)}^2 &\leq \frac{1}{4\pi} \int_{\Gamma} \int_{\Gamma} \frac{(q_h(x) - q'_h(x))(q_h(y) - q'_h(y))}{|x-y|} d\gamma(x) d\gamma(y) \\ &= \frac{1}{4\pi} \int_{\Gamma} \int_{\Gamma} \frac{(q(x) - q'_h(x))(q_h(y) - q'_h(y))}{|x-y|} d\gamma(x) d\gamma(y) - \int_{\Gamma} (u_0 - u_{0h})(q_h - q'_h) d\gamma \\ &\leq c[\|q - q'_h\|_{H^{-1/2}(\Gamma)} + \|u_0 - u_{0h}\|_{H^{1/2}(\Gamma)}] \|q_h - q'_h\|_{H^{-1/2}(\Gamma)}. \end{aligned}$$

D'où :

$$\|q - q_h\|_{H^{-1/2}(\Gamma)} \leq c[\|q - q'_h\|_{H^{-1/2}(\Gamma)} + \|u_0 - u_{0h}\|_{H^{1/2}(\Gamma)}].$$

La majoration (3.2) s'en déduit en faisant varier q'_h dans l'espace V_h .

Nous allons préciser le choix des espaces V_h . Nous supposons que la surface Γ est polyédrique. Soit une triangulation de cette surface que nous

noterons \mathfrak{T}_h . Nous supposons que cette triangulation recouvre la surface Γ et que deux triangles quelconques de la triangulation ont, soit une intersection vide, soit un sommet commun, soit une arête commune. Nous noterons par I le nombre de sommets et par J le nombre de triangles.

Cas 1. L'espace V_h est l'espace des fonctions continues sur la surface Γ et linéaires affines sur chaque triangle. Sa dimension est I et on peut le repérer par les valeurs de chacune des fonctions u_h dans l'espace V_h , aux sommets de la triangulation. Alors l'espace V_h est inclus dans l'espace $H^1(\Gamma)$. La méthode variationnelle (3.1) conduit alors à un système linéaire à I inconnues dont les coefficients sont :

$$a_{ij} = \frac{1}{4\pi} \int_{\Gamma} \int_{\Gamma} \frac{w_i(x)w_j(y)}{|x-y|} d\gamma(x) d\gamma(y).$$

Les fonctions w_i sont les fonctions de base de l'espace V_h . Nous avons :

$$\begin{aligned} w_i(M_i) &= 1, \\ w_i(M_j) &= 0 \quad ; \quad j \neq i. \end{aligned}$$

REMARQUE 3.1. Nous pouvons utiliser également des éléments finis d'ordre plus élevé, de type Lagrange ou de type Hermite. Nous ne les examinerons pas ici, afin d'éviter d'alourdir la présentation. L'étude d'erreur correspondante est en tous points analogue à celle des éléments d'ordre 1. Par ailleurs ces éléments conduisent à des coefficients a_{ij} de plus en plus difficiles à calculer. Nous renvoyons à Zienkiewicz [17], pour une étude systématique des différents types d'éléments finis.

Cas 2. L'espace V_h est l'espace des fonctions constantes sur chaque triangle. Sa dimension est donc J , et il est repéré par les valeurs de chaque fonction u_h de l'espace V_h , sur chaque triangle de la triangulation. Alors l'espace V_h est inclus dans l'espace $L^2(\Gamma)$, mais pas dans l'espace $H^1(\Gamma)$. La méthode variationnelle conduit alors à l'évaluation des intégrales doubles :

$$a_{ij} = \frac{1}{4\pi} \int_{T_i} \int_{T_j} \frac{d\gamma(x) d\gamma(y)}{|x-y|} \quad ; \quad T_i, T_j \in \mathfrak{T}_h.$$

Nous avons considéré ce cas, qui conduit à une évaluation d'erreur moins bonne, parce qu'il est plus facile de calculer les coefficients a_{ij} correspondants.

3.1. Etude d'erreur. Cas 1

Afin d'obtenir des estimations sur la quantité $\inf_{q' \in V_h} \|q - q'\|_{H^{-1/2}(\Gamma)}$ nous utiliserons des résultats d'approximation de Ciarlet-Raviart [4], que nous rappellerons.

Nous ferons toujours l'hypothèse suivante :

$$(3.3) \quad \left\{ \begin{array}{l} \text{Tous les angles des triangles de la triangulation} \\ \text{vérifient } \theta \geq \theta_0 > 0; \\ \\ \text{où la quantité } \theta_0 \text{ est indépendante du para-} \\ \text{mètre } h \text{ associé à la triangulation } \mathcal{T}_h. \end{array} \right.$$

Ce paramètre h désignera le plus grand des diamètres des triangles de la triangulation \mathcal{T}_h .

Nous aurons besoin également de résultats de la théorie de l'interpolation que nous rappelons dans la proposition suivante (cf. Butzer-Berens [3]).

Proposition 3.1. *Soit des espaces de Hilbert X, Y, S, T , avec $Y \subset X, T \subset S$, et soient des espaces intermédiaires définis par une méthode d'interpolation de type θ . Alors nous avons :*

$$(3.4) \quad \|u\|_{[X, Y]_\theta} \leq C \|u\|_X^{1-\theta} \|u\|_Y^\theta \quad ; \quad \forall u \in Y.$$

L'espace $[X, Y]_\theta$ est par définition l'interpolé de paramètre θ ($0 \leq \theta \leq 1$), entre les espaces X et Y . (On a $[X, Y]_0 = X, [X, Y]_1 = Y$). D'autre part, soit un opérateur linéaire Π continu de l'espace X dans l'espace S de norme α , et linéaire continu de l'espace Y dans l'espace T de norme β ; nous avons

$$(3.5) \quad \|\Pi u\|_{[S, T]_\theta} \leq C \alpha^{1-\theta} \beta^\theta \|u\|_{[X, Y]_\theta} \quad ; \quad \forall u \in [X, Y]_\theta.$$

Nous utiliserons les résultats ci-dessus pour les espaces $H^s(\Gamma)$, avec s réel.

Lemme 3.1. *Sous l'hypothèse (3.3), nous avons les inégalités suivantes (dites inégalités inverses) :*

$$(3.6) \quad \|w_h\|_{H^s(\Gamma)} \leq \frac{C}{h^{s-t}} \|w_h\|_{H^t(\Gamma)} \quad ; \quad \forall w_h \in V_h \quad ; \quad -1 \leq t \leq 0 \quad ; \\ t \leq s \leq 1.$$

Démonstration. Nous établissons d'abord le résultat pour s et t entiers positifs et sur chacun des triangles. Soit donc un triangle T de la triangulation \mathcal{T}_h et soit un triangle de référence \hat{T} fixé (cf. Ciarlet-Raviart [4]), et

$$x = B\hat{x} + b \quad ; \quad b \in \mathbf{R}^2 \quad , \quad B \in \mathcal{L}(\mathbf{R}^2, \mathbf{R}^2) \quad , \quad B = \{b_{ij}\},$$

l'unique transformation affine qui échange les deux triangles T et \hat{T} .

L'hypothèse (3.3) entraîne que l'opérateur \mathbf{B} est inversible et que :

$$\|B^{-1}\|_{\mathcal{L}(\mathbf{R}^2, \mathbf{R}^2)} \leq \frac{C}{h}.$$

Soit alors une fonction w_h de l'espace V_h et :

$$\hat{w}_h(\hat{x}) = w_h(B\hat{x} + b).$$

Nous avons

$$\frac{\partial}{\partial \hat{x}_i} \hat{w}_h(\hat{x}) = \sum_{j=1}^2 b_{ji} \frac{\partial}{\partial x_j} w_h(B\hat{x} + b).$$

Nous utilisons alors l'équivalence des normes sur les espaces $H^1(\hat{T})$ et $L^2(\hat{T})$, sur le sous-espace de dimension trois des fonctions affines du triangle \hat{T} :

$$\begin{aligned} \|\hat{w}_h\|_{H^1(\hat{T})} &\leq C \|\hat{w}_h\|_{L^2(\hat{T})}; \\ \|\hat{w}_h\|_{H^1(\hat{T})}^2 &= \int_T |w_h(x)|^2 dx + \sum_{i=1}^2 \int_T \left| \frac{\partial w_h}{\partial x_i}(x) \right|^2 dx, \\ &= \int_{\hat{T}} |\hat{w}_h(\hat{x})|^2 \det B d\hat{x} + \sum_{i=1}^2 \int_{\hat{T}} \left| \frac{\partial \hat{w}_h}{\partial \hat{x}_i}(B\hat{x} + b) \right|^2 \det B d\hat{x}, \\ &\leq \det B \left(\|\hat{w}_h\|_{L^2(\hat{T})}^2 + \|B^{-1}\|^2 \sum_{j=1}^2 \int_{\hat{T}} \left| \frac{\partial \hat{w}_h}{\partial \hat{x}_i}(x) \right|^2 d\hat{x} \right), \\ &\leq \det B \left(1 + \frac{C}{h^2} \right) \|\hat{w}_h\|_{L^2(\hat{T})}^2 = \left(1 + \frac{C}{h^2} \right) \|w_h\|_{L^2(T)}^2. \end{aligned}$$

D'où l'on déduit pour h assez petit; l'inégalité suivante :

$$\|w_h\|_{H^1(T)}^2 \leq \frac{C}{h^2} \|w_h\|_{L^2(T)}^2 \quad ; \quad \forall T \in \mathfrak{T}_h.$$

En sommant alors les inégalités ci-dessus sur tous les triangles de la triangulation \mathfrak{T}_h nous en déduisons :

$$\|w_h\|_{H^1(\Gamma)}^2 \leq \frac{C}{h^2} \|w_h\|_{L^2(\Gamma)}^2 \quad ; \quad \forall w_h \in V_h.$$

En utilisant l'inégalité (3.4), et l'inégalité ci-dessus, nous obtenons facilement le résultat cherché pour $t = 0$ et $0 \leq s \leq 1$.

D'autre part :

$$\|w_h\|_{L^2(\Gamma)}^2 \leq \|w_h\|_{H^t(\Gamma)} \|w_h\|_{H^{-t}(\Gamma)} \leq \frac{C}{h^{-t}} \|w_h\|_{H^t(\Gamma)} \|w_h\|_{L^2(\Gamma)} \quad -1 \leq t \leq 0.$$

Soit :

$$\|w_h\|_{L^2(\Gamma)} \leq \frac{C}{h^{-t}} \|w_h\|_{H^t(\Gamma)} \quad ; \quad -1 \leq t \leq 0 \quad ; \quad \forall w_h \in V_h.$$

Le résultat général se déduit alors en combinant les deux cas déjà démontrés.

Lemme 2.2. Soit l'opérateur s_h de projection orthogonale dans $L^2(\Gamma)$ sur le sous-espace vectoriel V_h . Alors sous l'hypothèse (3.3) nous avons :

$$(3.7) \quad \|q - s_h q\|_{H^t(\Gamma)} \leq Ch^{s-t} \|q\|_{H^s(\Gamma)} \quad ; \quad -2 \leq t \leq 1 \quad ; \\ t \leq s \quad ; \quad -1 \leq s \leq 2.$$

Démonstration. Soit l'opérateur d'interpolation de Lagrange que nous désignerons par π_h , qui est défini pour toute fonction q dans l'espace $H^2(\Gamma)$ par : la fonction $\pi_h q$ est l'unique fonction affine sur chaque triangle qui vaut la valeur $q(M_i)$ aux sommets M_i de la triangulation (ceci a un sens car l'espace $H^2(\Gamma)$ est inclus dans l'espace $C^0(\bar{\Omega})$). Alors d'après Ciarlet-Raviart [4] nous savons que :

$$(3.8) \quad \left\{ \begin{array}{l} \|q - \pi_h q\|_{H^s(\Gamma)} \leq Ch^{2-s} \|q\|_{H^2(\Gamma)} \quad ; \quad 0 \leq s \leq 1 \quad ; \\ \left(\sum_{T \in \mathcal{T}_h} \|q - \pi_h q\|_{H^2(T)}^2 \right)^{1/2} \leq C \|q\|_{H^2(\Gamma)} \quad ; \quad \forall q \in H^2(\Gamma). \end{array} \right.$$

Ce résultat ne s'étend pas au cas où le paramètre s est négatif. (On peut le vérifier assez facilement en dimension 1 d'espace.) Soit donc le projecteur s_h , nous avons par définition :

$$\|q - s_h q\|_{L^2(\Gamma)} \leq \|q - \pi_h q\|_{L^2(\Gamma)} \leq Ch^2 \|q\|_{H^2(\Gamma)} \quad ; \quad \forall q \in H^2(\Gamma).$$

D'autre part, nous avons :

$$\left(\sum_{T \in \mathcal{T}_h} \|q - s_h q\|_{H^2(T)}^2 \right)^{1/2} \leq \left(\sum_{T \in \mathcal{T}_h} \|q - \pi_h q\|_{H^2(T)}^2 \right)^{1/2} + \|\pi_h q - s_h q\|_{H^1(\Gamma)}.$$

En utilisant les inégalités (3.8) et (3.6), nous avons :

$$\left(\sum_{T \in \mathcal{T}_h} \|q - s_h q\|_{H^2(T)}^2 \right)^{1/2} \leq C \|q\|_{H^2(\Gamma)} + \frac{C}{h} \|\pi_h q - s_h q\|_{L^2(\Gamma)}.$$

En utilisant alors les inégalités triangulaires :

$$\|\pi_h q - s_h q\|_{L^2(\Gamma)} \leq \|q - \pi_h q\|_{L^2(\Gamma)} + \|q - s_h q\|_{L^2(\Gamma)} \leq Ch^2 \|q\|_{H^2(\Gamma)}.$$

D'où :

$$\left(\sum_{T \in \mathcal{T}_h} \|q - s_h q\|_{H^2(T)}^2 \right)^{1/2} \leq C \|q\|_{H^2(\Gamma)} \quad ; \quad \forall q \in H^2(\Gamma).$$

On a aussi :

$$\|q - s_h q\|_{L^2(\Gamma)} \leq \|q\|_{L^2(\Gamma)} \quad ; \quad \forall q \in L^2(\Gamma).$$

En utilisant alors la proposition 3.1 avec pour paramètre θ égal à $1/2$ et :

$$S = X = L^2(\Gamma) \quad ; \quad T = \prod_{T \in \mathcal{T}_h} H^2(T) \quad ; \quad Y = H^2(\Gamma) \quad ;$$

on obtient :

$$(3.10) \quad \|q - s_h q\|_{H^1(\Gamma)} \leq C \|q\|_{H^1(\Gamma)} \quad ; \quad \forall q \in H^1(\Gamma).$$

Nous utilisons maintenant les propriétés du projecteur s_h (auto-adjoint dans l'espace $L^2(\Gamma)$), d'où :

$$\|q - s_h q\|_{H^{-k}(\Gamma)} = \sup_{\varphi \in H^k(\Gamma)} \frac{(q - s_h q, \varphi)_{L^2(\Gamma)}}{\|\varphi\|_{H^k(\Gamma)}} = \sup_{H^k(\Gamma)} \frac{(q - s_h q, \varphi - s_h \varphi)_{L^2(\Gamma)}}{\|\varphi\|_{H^k(\Gamma)}}$$

En utilisant enfin les inégalités (3.9) et (3.10) dans l'inégalité ci-dessus nous déduisons :

$$(3.11) \quad \|q - s_h q\|_{H^{-k}(\Gamma)} \leq C h^{k+k'} \|q\|_{H^k(\Gamma)} \quad ; \quad k = 1 \text{ ou } 2, \\ k' = 1 \text{ ou } 2 \quad ; \quad \forall q \in H^{k'}(\Gamma).$$

Le résultat général (3.7) se déduit alors des inégalités (3.9), (3.10) et (3.11) en utilisant à nouveau la proposition 3.1 pour l'opérateur $I - s_h$.

Théorème 3.2. *Soit la solution q du problème (1.16) et la solution q_h du problème (3.1) pour le cas 1. Sous l'hypothèse (3.3) nous avons les estimations d'erreurs suivantes :*

$$(3.12) \quad \left\{ \begin{array}{l} \|q - q_h\|_{H^t(\Gamma)} \leq C [h^{t-s} \|q\|_{H^s(\Gamma)} + h^{-s-1/2} \|u_0 - u_{0h}\|_{H^{1/2}(\Gamma)}] ; \\ q \in H^t(\Gamma) \quad ; \quad -\frac{1}{2} \leq s \leq 1 \quad ; \quad -\frac{1}{2} \leq t \leq 2 \quad ; \quad s \leq t. \end{array} \right.$$

Soit alors la fonction u définie par l'expression (1.3) et la fonction u_h suivante :

$$u_h(x) = \frac{1}{4\pi} \int_{\Gamma} \frac{q_h(y)}{|x-y|} d\gamma(y) \quad ; \quad \forall x \in \mathbb{R}^3.$$

Alors nous avons les estimations :

$$(3.13) \quad \|u - u_h\|_{W_0^1(\mathbb{R}^3)} \leq C [h^{t+1/2} \|q\|_{H^t(\Gamma)} + \|u_0 - u_{0h}\|_{H^{1/2}(\Gamma)}] \\ -\frac{1}{2} \leq t \leq 2$$

$$(3.14) \quad \left\{ \begin{array}{l} \|u - u_h\|_{H^2(\Omega)} + \|u - u_h\|_{W_1^2(\Omega^c)} \\ \leq C \left[h^{t-1/2} \|q\|_{H^t(\Gamma)} + \frac{1}{h} \|u_0 - u_{0h}\|_{H^{1/2}(\Gamma)} \right] \quad ; \\ \frac{1}{2} \leq t \leq 2. \end{array} \right.$$

Pour estimer maintenant l'erreur dans l'espace $H^{-3/2}(\Gamma)$ sur la solution q nous utilisons un argument classique de dualité.

$$\|q - q_h\|_{H^{-3/2}(\Gamma)} = \sup_{\varphi \in H^{3/2}(\Gamma)} \frac{\langle q - q_h, \varphi \rangle}{\|\varphi\|_{H^{3/2}(\Gamma)}}$$

Soit la solution Ψ de

$$\varphi(x) = \frac{1}{4\pi} \int_{\Gamma} \frac{\Psi(y)}{|x - y|} d\gamma(y) \quad ; \quad \forall x \in \Gamma.$$

Alors d'après le théorème 1.2, l'application $\varphi \rightarrow \Psi$ de l'espace $H^{3/2}(\Gamma)$ dans l'espace $H^{1/2}(\Gamma)$ est continue. D'où l'on déduit :

$$\|q - q_h\|_{H^{-3/2}(\Gamma)} \leq C \sup_{\Psi \in H^{1/2}(\Gamma)} \frac{a(q - q_h, \Psi)}{\|\Psi\|_{H^{1/2}(\Gamma)}} \quad ;$$

$$a(\varphi, \Psi) = \frac{1}{4\pi} \int_{\Gamma} \int_{\Gamma} \frac{\varphi(x)\Psi(y)}{|x - y|} d\gamma(x) d\gamma(y)$$

D'où

$$\|q - q_h\|_{H^{-3/2}(\Gamma)} \leq C \sup_{\Psi \in H^{1/2}(\Gamma)} \frac{a(q - q_h, \Psi - s_h\Psi) + a(q - q_h, s_h\Psi)}{\|\Psi\|_{H^{1/2}(\Gamma)}}$$

$$\leq C[h \|q - q_h\|_{H^{-1/2}(\Gamma)} + \|u_o - u_{oh}\|_{H^{-1/2}(\Gamma)}]$$

On en déduit le résultat cherché en utilisant alors le théorème 3.2.

3.2. Étude d'erreur dans le cas 2

L'étude d'erreur de ce cas est assez analogue à celle du cas précédent. Aussi nous ne reproduirons en détail que les démonstrations nouvelles.

Lemme 3.3. *Sous l'hypothèse (3.3) nous avons les inégalités :*

$$(3.16) \quad \|w_h\|_{H^s(\Gamma)} \leq \frac{C}{h^{s-t}} \|w_h\|_{H^t(\Gamma)} \quad ; \quad \forall w_h \in V_h \quad ; \quad -1 \leq t \leq s \leq 0.$$

Démonstration. Sur chaque triangle ABC, dont O est le cercle inscrit, de la triangulation \mathcal{T}_h , considérons la fonction φ_T définie par :

$$\varphi_T(O) = 1, \quad \varphi_T(A) = \varphi_T(B) = \varphi_T(C) = 0,$$

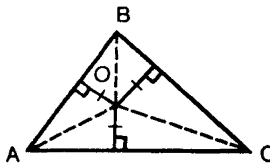


Figure 2

la fonction φ_T étant de plus linéaire affine sur chacun des triangles OAB , OAC , OBC . La fonction φ_T ainsi définie est dans l'espace $H_0^1(T)$ et on vérifie facilement que

$$\int_{OAB} \varphi_T \, d\omega = \frac{1}{3} \text{mes}(OAB)$$

$$\int_T \varphi_T \, d\omega = \frac{1}{3} \text{mes}(T).$$

Soit une fonction w_h de l'espace V_h et soit w_{hT} sa valeur sur le triangle T . Alors nous avons

$$\begin{aligned} \|w_h\|_{L^2(\Gamma)}^2 &= \sum_T \text{mes}(T) w_{hT}^2 = 3 \sum_{T \in \mathcal{T}_h} \int_T w_{hT} w_{hT} \varphi_T \, d\omega, \\ &= 3 \int_{\Gamma} w_h \left(\sum_{T \in \mathcal{T}_h} w_{hT} \varphi_T \right) \, d\omega. \end{aligned}$$

D'où les inégalités :

$$\|w_h\|_{L^2(\Gamma)}^2 \leq 3 \|w_h\|_{H^t(\Gamma)} \left\| \sum_{T \in \mathcal{T}_h} w_{hT} \varphi_T \right\|_{H^{-t}(\Gamma)} \quad ; \quad -1 \leq t \leq 0.$$

Nous avons d'autre part :

$$\begin{aligned} \left\| \sum_{T \in \mathcal{T}_h} w_{hT} \varphi_T \right\|_{L^2(\Gamma)}^2 &= \sum_{T \in \mathcal{T}_h} \int_T w_{hT}^2 \varphi_T^2 \, d\omega \\ &\leq \sum_{T \in \mathcal{T}_h} \int_{\Gamma} w_{hT}^2 \varphi_T \, d\omega = \frac{1}{3} \|w_h\|_{L^2(\Gamma)}^2. \end{aligned}$$

Et nous avons aussi, si ρ_T désigne le rayon du cercle inscrit dans le triangle T :

$$\sum_{i=1}^2 \left| \frac{\partial \varphi_T}{\partial x_i} \right|^2 = \frac{1}{\rho_T^2} \quad ;$$

$$\frac{1}{\rho_T} \leq \frac{C}{h}.$$

Nous pouvons alors majorer la norme $H^1(\Gamma)$:

$$\begin{aligned} \left\| \sum_{T \in \mathcal{T}_h} w_{hT} \varphi_T \right\|_{H^1(\Gamma)}^2 &\leq \frac{1}{3} \|w_h\|_{L^2(\Gamma)}^2 + \sum_{T \in \mathcal{T}_h} \int_T w_{hT}^2 \sum_{i=1}^2 \left| \frac{\partial \varphi_T}{\partial x_i} \right|^2 \, d\omega \\ &\leq \left(\frac{1}{3} + \frac{C}{h^2} \right) \|w_h\|_{L^2(\Gamma)}^2. \end{aligned}$$

Alors pour h assez petit, nous déduisons des inégalités ci-dessus et en utilisant l'inégalité d'interpolation (3.4); l'inégalité :

$$\|w_h\|_{L^2(\Gamma)} \leq \frac{C}{h^{-t}} \|w_h\|_{H^t(\Gamma)} \quad ; \quad -1 \leq t \leq 0.$$

Le résultat général (pour $s \neq 0$) s'en déduit en réutilisant l'inégalité d'interpolation (3.4).

Lemme 3.4. *Sous l'hypothèse (3.3) nous avons les majorations :*

$$(3.18) \quad \|q - s_h q\|_{H^t(\Gamma)} \leq Ch^{s-t} \|q\|_{H^s(\Gamma)} \quad ; \quad \forall q \in H^s(\Gamma) \quad ; \\ -1 \leq t \leq 0 \leq s \leq 1.$$

L'opérateur s_h est le projecteur dans l'espace $L^2(\Gamma)$ sur le sous-espace V_h .

Démonstration. L'opérateur s_h est défini pour toute fonction q de l'espace $L^2(\Gamma)$ par

$$(s_h q)_T = \frac{1}{\text{mes}(T)} \int_T q(x) dx.$$

Il est clair que l'opérateur s_h est défini sur chaque triangle et laisse invariant les constantes sur chaque triangle. Donc nous avons :

$$\|q - s_h q\|_{L^2(\Gamma)} \leq Ch^r \|q\|_{H^1(\Gamma)} \quad ; \quad \forall q \in H^1(\Gamma). \\ \|q - s_h q\|_{H^{-1}(\Gamma)} = \sup_{\varphi \in H^1(\Gamma)} \frac{\langle q - s_h q, \varphi \rangle}{\|\varphi\|_{H^1(\Gamma)}} = \sup_{\varphi \in H^1(\Gamma)} \frac{\langle q - s_h q, \varphi - s_h \varphi \rangle}{\|\varphi\|_{H^1(\Gamma)}}, \\ \leq Ch^2 \|q\|_{H^1(\Gamma)}.$$

Le résultat général s'en déduit en utilisant la proposition 3.1.

Théorème 3.4. *Soit la solution q du problème (1.16) et la solution q_h du problème (3.1) pour le choix de V_h du cas 2. Sous l'hypothèse 3.3 nous avons les estimations d'erreurs suivantes, si la solution q est dans l'espace $H^t(\Gamma)$;*

$$\|q - q_h\|_{H^t(\Gamma)} \leq C[h^{t-s} \|q\|_{H^t(\Gamma)} + h^{-s-1/2} \|u_0 - u_{0h}\|_{H^{1/2}(\Gamma)}] \quad ; \\ -\frac{1}{2} \leq s \leq t \leq 1 \quad , \quad s \leq 0.$$

Soit d'autre part la fonction u donnée par l'expression (1.3) et la fonction u_h donnée par

$$u_h(x) = \frac{1}{4\pi} \int_{\Gamma} \frac{q_h(y)}{|x-y|} d\gamma(y) \quad ; \quad \forall x \in \mathbb{R}^3.$$

Alors nous avons :

$$\|u - u_h\|_{W_0^1(\mathbb{R}^3)} \leq C(h^{t+1/2} \|q\|_{H^t(\Gamma)} + \|u_0 - u_{0h}\|_{H^{1/2}(\Gamma)}) \quad ; \\ -\frac{1}{2} \leq t \leq 1.$$

Démonstration. Elle est analogue à celle du théorème 3.2, en utilisant au lieu des lemmes 3.1 et 3.2, les lemmes 3.3 et 3.4.

Nous ne pouvons pas, dans ce cas, obtenir l'équivalent du théorème 3.3.

Conclusion. La méthode numérique qui est décrite ici nécessite l'évaluation d'intégrales quadruples avec des coefficients singuliers. Il serait intéressant de remplacer ces évaluations par l'utilisation d'une méthode d'intégration numérique adéquate.

D'autre part la méthode nécessite d'approcher la surface Γ par des triangulations polyédriques. Ceci introduit une erreur qu'il serait utile d'évaluer. Nous renvoyons à J. L. Hess [8] pour une étude de ces deux problèmes dans le cas d'un problème en dimension deux pour une intégrale singulière et à R. J. James [6] pour une étude numérique de la transformation de Hilbert.

Nous renvoyons d'autre part, à G. T. Symm [16] pour l'étude du problème de potentiel électrique dans l'espace à deux dimensions (c'est le cas du potentiel en $\text{Log } r$).

Nous tenons à remercier ici MM. P. Bolley et J. Camus qui nous ont communiqué une partie essentielle de la démonstration du théorème 1.2.

BIBLIOGRAPHIE

- [1] J. BARROS NETO, *Inhomogeneous boundary value problems in a half space*. Ann. Sc. Norm. Sup. Pisa, 19 (1965), 331-365.
- [2] J. BOUTET DE MONVEL, Cours au CIME, Stresa, sept. 1968, Cremonese, Roma (1969).
- [3] P. L. BUTZER et H. BERENS, *Semi-groups of operators and approximations*. Springer-Verlag, Berlin (1967).
- [4] P. G. CIARLET et P. A. RAVIART, *General Lagrange and Hermite interpolation in R^n with applications to finite element methods*. Arch. Rat. Mech. Anal., 46 (1972), 177-199.
- [5] J. DENY et J. L. LIONS, *Les espaces du type Beppo-Levi*, Ann. Inst. Fourier, 5 (1953-54), 305-370.
- [6] R. M. JAMES, *On the remarkable accuracy of the vortex lattice method*. Computer Methods in Appl. Mec. and eng., 1 (1972), 59-79.
- [7] B. HANOUZET, *Espaces de Sobolev avec poids. Application au problème de Dirichlet dans un demi-espace*. Rend. del Sem. Math. della Univ. di Padova, XLVI (1971), 277-272.
- [8] J. L. HESS, *Higher order numerical solution of the integral equation for the two-dimensional neumann problem*. Computer Methods in Appl. Mec. and eng., 2 (1973), 1-15.
- [9] HORMANDER, *Linear partial differential operators*. Springer Verlag, Berlin (1963).
- [10] J. L. LIONS et E. MAGENES, *Problèmes aux limites non homogènes*, tome I, Dunod, Paris (1968).
- [11] S. G. MIKHLIN, *Linear integral equations*. Vol. II, Gordon and Breach. Science publishers inc. New-York (1960).

- [12] N. I. MUSKHELISHVILI, *Some basic problems of the mathematical theory of elasticity*. Noordhoff L^{td}-Groningen Holland (1953).
- [13] J. NECAS, *Les méthodes directes en théorie des équations elliptiques*. Masson, Paris (1967).
- [14] H. A. SCHENCK, *Improved integral formulation for acoustic problems*. Journal of Acoust. Soc. of America, 44 (1968), 41-58.
- [15] R. SEELEY, Cours CIME, Stresa, sept. 1968, Cremonese, Roma (1969).
- [16] G. T. SYMM, *Integral equation methods in potential theory*. II. Proc. Roy. Soc. London A, 275 (1963), 33-46.
- [17] O. C. ZIENKIEWICZ, *The Finite Element Method in Engineering Science*. Mc Graw-Hill, London (1971).