Revue française d'automatique informatique recherche opérationnelle. Mathématique

Yves Gerbier

Brève communication. Sur la commande en temps minimum du système

Revue française d'automatique informatique recherche opérationnelle. Mathématique, tome 7, nº R2 (1973), p. 83-89

<http://www.numdam.org/item?id=M2AN_1973__7_2_83_0>

R.A.I.R.O.
(7e année, R-2, 1973, p. 83-89)

SUR LA COMMANDE EN TEMPS MINIMUM DU SYSTEME $\dot{x}(t) = A(t)\,x(t) + g(t, u)$

par Yves GERBIER (1)

Résumé. — *Considérant le problème du contrôle en temps minimum pour le systéme non linéaire* $\dot{x}(t) = A(t)x(t) + g(t, u)$, *on montre qu'une unique condition générique, explicitable à partir de* $A(t)$ *et* $g(t, u)$, *permet de dire si le système est localement contrôlable et possède des commandes optimales. Cette condition ne permet cependant pas de parler d'unicité et de commande bang-bang sans hypothèses supplémentaires sur la fonction* $g(t, u)$.

INTRODUCTION

Un problème de contrôle en temps minimum étant posé, on peut chercher des conditions sur le système, permettant de répondre aux questions suivantes :

1. Le système est-il localement contrôlable ?
2. Existe-t-il des commandes optimales ?
3. Peut-on caractériser les commandes optimales ?
4. La commande optimale est-elle unique ?
5. La commande optimale est-elle bang-bang ?

La terminologie ci-dessus est classique, on pourra se reporter par exemple à [3], [5].

Dans le cas des systèmes de la forme :

$$\dot{x}(t) = A(t)x(t) + V(t)u \quad x \in \mathbf{R}^n,\ u \in [-1, +1]. \tag{1}$$

J. P. Dauer [1] a montré que si A et V appartiennent à L^1, l'ensemble des V pour lesquels le système (1) est contrôlable est un ouvert dense. Toujours dans le cas des systèmes (1), on peut montrer [6] que les réponses aux questions 1, 2,

(1) Université de Pau.

3, 4, 5 sont positives pourvu qu'une unique condition, explicitable à partir de $A(t)$, $V(t)$ et de leurs n premières dérivées, soit satisfaite; de plus, cette condition est générique.

Il est classique en théorie de la commande que certains résultats valables pour les systèmes linéaires s'étendent aux systèmes de la forme :

$$\dot{x}(t) = A(t)x(t) + g(t, u) \; x \in \mathbf{R}^n, u \in [-1, +1]. \tag{2}$$

En conséquence, le but de ce papier est de voir dans quelle mesure on peut étendre l'étude faite dans [6] aux systèmes du type (2). On verra que pour les questions 1, 2, 3 les résultats s'étendent aisément (en particulier, 2 est une conséquence d'un théorème classique); par contre, les questions 4 et 5 ne seront pas résolues, en fait, on verra que sous cette forme, elles ne peuvent pas l'être. Au § 5, nous essayons d'envisager sous quelle forme ces questions pourraient être reposées. Dans la suite, nous supposerons toujours que les applications :

$$t \longmapsto A(t)$$

$$(t, u) \longmapsto g(t, u)$$

sont $n + 1$ fois différentiables et de plus, nous noterons :

$$\left.\frac{\partial g(t, u)}{\partial u}\right|_{u=0} = V(t).$$

Enfin, une commande admissible est une application mesurable d'un intervalle $[t_0, t_1]$ dans $[-1, +1]$; la réponse à une telle commande notée $x(t, \mathcal{U}, x_0, t_0)$ est, par définition, la valeur en t de la solution absolument continue du problème de Cauchy :

$$\begin{cases} \dot{x}(t) = A(t)x(t) + g(t, \mathcal{U}(t)) \\ x(t_0) = x_0. \end{cases}$$

1. THEOREME DE CONTROLABILITE

Notons $\mathcal{R}(t_0, t_1)$ l'ensemble des recalables à l'origine en le temps t_1, c'est-à-dire, par définition, l'ensemble des conditions initiales x_0 pour lesquelles il existe une commande $\mathcal{U}$ définie sur $[t_0, t_1]$ dont la réponse est 0 à l'instant t_1.

Notons $\Phi(t, t_0)$ la matrice fondamentale (résolvante) du système :

$$\dot{x}(t) = A(t)x(t).$$

Proposition 1 (trivial). — *On a l'égalité :*

$$\mathcal{R}(t_0, t_1) = \left\{ -\int_{t_0}^{t_1} \Phi^{-1}(\theta, t_0) g(\theta, \mathcal{U}(\theta))d\theta \,;\, \mathcal{U} \in L^1([t_0, t_1], [-1, +1])\right\}$$

Proposition 2. — *Le système :*

$$\dot{x}(t) = A(t)x(t) + g(t, u)\; x \in \mathbf{R}^n, u \in [-1, +1] \tag{2}$$

est localement contrôlable à l'instant t_1 (i.e. $\mathcal{R}(t_0, t_1)$ *est un voisinage de* 0) *si le système linéaire :*

$$\dot{x}(t) = A(t)x(t) + V(t)u\; x \in \mathbf{R}^n, u \in [-1, +1], V(t) = \left.\frac{\partial g(t, u)}{\partial u}\right|_{u=0}$$

est localement contrôlable.

Preuve : Il suffit de reprendre avec les modifications nécessaires la démonstration faite dans [5] dans le cas autonome.

Nous allons maintenant énoncer une condition pour que (2) soit localement contrôlable, s'exprimant directement à partir des applications $t \mapsto A(t)$ et $t \mapsto V(t)$.

Définition 1. — *On dit que le système* (2) *satisfait la condition H. W. (Hermann-Weiss) si, quel que soit t le rang du système* :

$$(V(t), D_A V(t), \ldots, D_A^n V(t))$$

est égal à n où D_A *est l'opérateur défini par* :

$$D_A\varphi(t) = -A(t)\varphi(t) + \dot{\varphi}(t)\,;\, \varphi \in C^1(\mathbf{R}, \mathbf{R}^n).$$

L'application $t \mapsto A(t)$ est supposée fixée. On sait [6] que l'ensemble des applications $t \mapsto \varphi(t)$ de $C^n([t_0, t_1], \mathbf{R}^n)$ pour lesquelles le rang de $(\varphi(t), D_A\varphi(t), \ldots, D_A^n\varphi(t))$ est n quel que soit t, est un ouvert dense pour la topologie de la convergence uniforme à l'ordre n. On en déduit que l'ensemble des applications $(t, u) \mapsto g(t, u)$, telles que le système (2) satisfasse H. W. est un ouvert dense de $C^{n+1}([t_0, t_1] \times [-1, +1], \mathbf{R}^n)$ puisque $V(t) = \left.\frac{\partial g(t, u)}{\partial u}\right|_{u=0}$
Ceci montre donc que la condition H. W. n'est pas trop restrictive.

Théorème 1. — *Si le système* (2) *satisfait la condition H. W. alors quel que soit* t_1 *l'ensemble* $\mathcal{R}(t_0, t_1)$ est un voisinage de 0.

Cette proposition prouve donc que le système est localement contrôlable quel que soit t_1 et montre, de plus, que le système est en *expansion* c'est-à-dire que, si $t_0 \leqslant t_1 < t_2$ alors :

$$\mathcal{R}(t_0, t_1) \subset \operatorname{Int} \mathcal{R}(t_0, t_2).$$

2. EXISTENCE D'UNE COMMANDE OPTIMALE

Théorème 2. — *Si x_0 est un recalable à l'origine, c'est-à-dire si :*

$$x_0 \in \bigcup_{t \leqslant t_0} \mathcal{R}(t_0, t)$$

alors il existe une commande en temps minimum, c'est-à-dire :

$$x_0 \in \mathcal{R}(t_0, t^*)$$

ou t^* est la borne inférieure des t tels que :

$$x_0 \in \mathcal{R}(t_0, t).$$

Preuve : Ce théorème est démontré dans [7]. Il est dû à ce que, avec l'hypothèse de continuité de $(t, u) \longmapsto g(t, u)$ l'ensemble :

$$\left\{ \int_{t_0}^{t_1} \Phi^{-1}(t, t_0) g(t, \mathcal{U}(t)) \mathrm{d}t \,;\, \mathcal{U} \in L^1([t_0, t_1], [-1, +1]) \right\}$$

est un convexe compact.

3. CONDITIONS NECESSAIRES ET SUFFISANTES D'OPTIMALITE

En reprenant dans le cas des systèmes (2), les arguments de [3] développés pour les systèmes linéaires, on montre que si $x \in \operatorname{Int} \mathcal{R}(t_0, t_1)$ et si t est assez voisin de t_1 on a encore $x \in \operatorname{Int} \mathcal{R}(t_0, t)$.

Théorème 3. — *Si le système* (2) *satisfait à la condition H. W. et si x_0 est donné : une condition nécessaire et suffisante pour que t^* soit le temps minimum à partir de x_0 de retour à l'origine est que :*

$$x_0 \in \partial(\mathcal{R}(t_0, t^*)).$$

Preuve : D'une part, si $x_0 \in \operatorname{Int} \mathcal{R}(t_0, t^*)$ alors il existe $t_1 < t^*$ tel que : $x_0 \in \operatorname{Int} \mathcal{R}(t_0, t_1)$ c'est-à-dire t^* n'est pas le temps minimum.

D'autre part, si $x_0 \in \partial(\mathcal{R}(t_0, t^*))$ alors t^* est le temps minimum; en effet, si t^* n'était pas le temps minimum, il existerait $t_1 < t^*$ tel que $x_0 \in \mathcal{R}(t_0, t_1)$. Or, le système satisfaisant H. W. est en expansion, c'est-à-dire $x_0 \in \mathcal{R}(t_0, t_1) \subset \operatorname{Int} \mathcal{R}(t_0, t^*)$ donc $x_0 \notin \partial(\mathcal{R}(t_0, t^*))$.

Théorème 4. — *Si le système* (2) *satisfait à la condition H. W. et si x_0 est donné : une condition nécessaire et suffisante pour que $\mathcal{U}^*$. ramenant x_0 à l'origine en le temps t^* soit optimale est que pour toute normale Ψ_0, rentrante à $\mathcal{R}(t_0, t^*)$ on ait presque partout sur $[t_0, t^*]$:*

$$< \Psi(t), g(t, \mathcal{U}^*(t)) > = \operatorname*{Max}_{u \in [-1, +1]} < \Psi(t), g(t, u) >,$$

où $\Psi(t)$ est solution du problème de Cauchy :

$$\begin{cases} \dfrac{\mathrm{d}\Psi(t)}{\mathrm{d}t} = - {}^{T}A(t)\Psi(t) \\ \Psi(t_0) = \Psi_0 \end{cases}$$

et où ${}^{T}A$ note la transposée de A.

Preuve : L'ensemble $\mathcal{R}(t_0, t^*)$ est un convexe borné et d'après le théorème 3, $x_0 \in \partial\mathcal{R}(t_0, t^*)$. Donc, pour toute normale entrante Ψ_0, on a :

$$\langle \Psi_0, x - x_0 \rangle \geqslant 0 \quad \forall x \in \mathcal{R}(t_0, t^*).$$

Par des arguments classiques, on démontre par dérivation la nécessité et par intégration la suffisance.

4. UNICITE ET COMMANDE OPTIMALE BANG-BANG

Dans le cas des systèmes linéaires, on sait que si le système satisfait la condition H. W. alors la commande est unique au sens L^1 et peut être prise bang-bang. Ici, nous ne pouvons espérer rien de semblable, en effet, la condition H. W. porte sur $\left.\dfrac{\partial g(t, u)}{\partial u}\right|_{u=0} = V(t)$ et ses dérivées successives, c'est donc une condition au voisinage de $u = 0$ c'est-à-dire locale. Tandis que la relation :

$$< \Psi(t_1), g(t, \mathcal{U}^*(t)) > = \underset{u \in [-1, +1]}{\mathrm{Max}} < \Psi(t), g(t, u) >$$

est globale. Si donc, par exemple, l'ensemble des t de $[t_0, t^*]$ tels que $g(t, u)$ soit non injective en u, est de mesure non nulle, on ne peut avoir l'unicité de commande optimale. De même, pour que l'on ait des commandes bang-bang, il faudrait que $\underset{u \in [-1,+1]}{\mathrm{Max}} < \Psi(t), g(t, u) >$ soit atteint presque partout sur $[t_0, t^*]$ pour $|u| = 1$.

Or, on peut construire aisément une fonction $g_0(t, u)$ vérifiant H. W. et telle que, pour toute fonction $g(t, u)$ appartenant à un voisinage de $g_0(t, u)$ dans $C^{n+1}([t_0, t^*] \times [-1, \times 1], \mathbf{R}^n)$, le maximum de $\langle \Psi(t), g(t, u) \rangle$ ne soit pas atteint pour $|u| = 1$.

CONCLUSION

Sans hypothèse globale sur l'application $(t, u) \longmapsto g(t, u)$ il n'est pas possible d'obtenir des résultats dans le sens de l'unicité de la commande optimale, ni dans le sens des commandes bang-bang.

En fait, ces deux questions tiennent à la nature de l'ensemble

$$\{ g(t, u) ; u \in [-1, +1] \}$$

plus qu'à sa représentation par l'application g; en effet, soit φ une application continue de $[-1, +1]$ dans $[-1, +1]$ si le système :

$$\dot{x}(t) = A(t)x(t) + g(t, u) \tag{2}$$

est localement contrôlable, il est évidemment de même du système :

$$\dot{x}(t) = A(t)x(t) + g(t, \varphi(u)). \tag{2'}$$

Par contre, si (2) admet des commandes optimales uniques, il suffit que φ soit non injective pour que (2') admette plusieurs commandes optimales.

Ceci conduit à poser le problème de la manière suivante : soit $t \longmapsto Q(t)$ une application de $\mathbf{R}$ dans $\mathcal{R}(\mathbf{R}^n)$, on considère le système :

$$\dot{x}(t) \in A(t)x(t) + Q(t). \tag{3}$$

i) A quelles conditions sur $t \longmapsto Q(t)$ le système (3) est-il tel que les réponses à 1, 2, 3, 4, 5 soient positives ? De ce point de vue, la question de l'existence des commandes optimales a été abordée par de nombreux auteurs (cf. [2] et sa bibliographie).

ii) A quelles conditions peut-on « représenter » la multiapplication $t \longmapsto Q(t)$ sous la forme :

$$Q(t) = \{ g(t, u) ; u \in U \}$$

où $(t, u) \longmapsto g(t, u)$ serait la « plus simple possible », linéaire en u par exemple ? Ce point de vue est envisagé dans [4].

En particulier, dans le cas des systèmes (2) en dimension 1 (c'est-à-dire $x \in \mathbf{R}$) on voit très facilement que, du point de vue de la théorie de la commande, génériquement, tout système est équivalent à un système de la forme :

$$\dot{x}(t) = A(t)x(t) + u(t)a(t) + (1 - u(t))b(t) \quad u \in [0, 1] \tag{4}$$

où $t \longmapsto a(t)$ et $t \longmapsto b(t)$ sont respectivement négative et strictement positive.

BIBLIOGRAPHIE

[1] DAUER (J. P.), *Perturbations of linear control systems.* S.I.A.M. J. Control, vol. 9, n° 3, August 1971, p. 393-400.

[2] HERMES (H.), *The generalized differential equation $\dot{x} \in R(t, x)$*, Advances in Mathematic, 4, 149-169 (1970), p. 149-169.

[3] HERMES (H.) et LASALLE (J.), *Functionnal analysis and time-optimal control*, Academic Press (1969).

[4] KRENER (A.), *On the equivalence of control systems and the linearization of non linear systems* (To appear).

[5] E. B. LEE et L. MARKUS, *Fondations of optimal control theory*, J. Wiley and Sons, N.Y. (1967).

[6] LOBRY (C.), Thèse, Université de Grenoble (1972).

[7] NEUSTADT (L.), *The existence of optimal controls in the absence of convexity conditions*, J. Math. Anal. Appl., 7 (1963), p. 110-117.