

MICHEL GONDRAN

**Brève communication. Programme en nombres entiers sans contraintes : génération des optimums locaux dans le cas quadratique**

*Revue française d'automatique informatique recherche opérationnelle. Mathématiques*, tome 6, n° R2 (1972), p. 80-83

[http://www.numdam.org/item?id=M2AN\\_1972\\_\\_6\\_2\\_80\\_0](http://www.numdam.org/item?id=M2AN_1972__6_2_80_0)

© AFCET, 1972, tous droits réservés.

L'accès aux archives de la revue « Revue française d'automatique informatique recherche opérationnelle. Mathématiques » implique l'accord avec les conditions générales d'utilisation (<http://www.numdam.org/conditions>). Toute utilisation commerciale ou impression systématique est constitutive d'une infraction pénale. Toute copie ou impression de ce fichier doit contenir la présente mention de copyright.

NUMDAM

Article numérisé dans le cadre du programme  
Numérisation de documents anciens mathématiques  
<http://www.numdam.org/>

## PROGRAMME EN NOMBRES ENTIERS SANS CONTRAINTES : GENERATION DES OPTIMUMS LOCAUX DANS LE CAS QUADRATIQUE

par Michel GONDRAN (1)

---

Résumé. — On donne ici une génération des optimums locaux d'un programme quadratique entier en utilisant une transformation non unimodulaire.

La discontinuité des fonctions à variables entières permet d'utiliser efficacement la pénalisation (cf. Hammer et Rudéanu [6] et Gondran [5]).

On obtient alors un programme en nombres entiers sans contraintes. La définition et la caractérisation d'optimums locaux se font alors naturellement (cf. Coquet [1]). Dans le cas quadratique ces optimums locaux seront les points entiers intérieurs à un paralléloépe. A l'aide d'une transformation non unimodulaire nous donnons ici une génération de ces points plus légère que celle donnée par Fiorot dans [2].

Considérons le programme entier sans contraintes

$$(P) \begin{cases} \text{Minimiser } f(x) \\ \text{pour } x \in Z^n \end{cases}$$

### 1. MINIMUMS LOCAUX

On appellera *voisinage* d'un point entier  $\bar{x}$  les  $2n$  points entiers dont la distance (dans  $L^p(Z^n)$  avec  $0 < p < +\infty$ ) à  $\bar{x}$  est égale à 1.

On dira alors qu'un point  $\bar{x}$  est un *minimum local* si  $f(\bar{x})$  est le minimum de  $f$  dans le voisinage de  $\bar{x}$ .

---

(1) E.D.F., Direction des Études et Recherches, Service I.M.A.

En posant :

$$\Delta_i^+ f(x) = f(x_1, \dots, x_{i-1}, x_i + 1, x_{i+1}, \dots, x_n) - f(x_1, \dots, x_i, \dots, x_n)$$

$$\Delta_i^- f(x) = f(x_1, \dots, x_{i-1}, x_i - 1, x_{i+1}, \dots, x_n) - f(x_1, \dots, x_i, \dots, x_n)$$

pour  $i$  de 1 à  $n$

et  $\Delta f = (\Delta^+ f, \Delta^- f)$

une CNS pour que  $\bar{x}$  soit un minimum local est que :

$$(1) \quad \Delta f \geq 0.$$

REMARQUE 1 : L'inéquation (1) est un CN d'optimalité pour le programme (P).

## 2. GENERATION DES MINIMUMS LOCAUX POUR UNE FONCTION QUADRATIQUE

Considérons maintenant la fonction quadratique

$$f(x) = x^t Q x + 2p^t x$$

où  $Q$  est une  $n \times n$  matrice définie positive à coefficients entiers et  $p$  un  $n$ -vecteur à coefficients entiers.

La condition d'optimalité s'écrit ici :

$$(2) \quad 2|Q_i x + p_i| \leq q_{ii}$$

Effectuons le changement de variables :

$$(3) \quad y_i = Q_i x + p_i$$

Dans la transformation inverse les  $x_i$  seront entiers si et seulement si les  $y_i$  vérifient une équation linéaire dans un groupe fini  $G$  d'ordre  $\Delta = |\det Q|$  (cf. [3] et [4]).

**Théorème :** Les minimums locaux de (P) sont obtenus par (3) à partir des solutions du système.

$$(Q) \begin{cases} \sum_{i=1}^n g^i y_i \equiv g^0 \pmod{G} \\ y \in \mathbb{Z}^n, \quad |y_i| \leq \left\lfloor \frac{q_{ii}}{2} \right\rfloor. \end{cases}$$

REMARQUE 2 : Le nombre approximatif des solutions est  $\frac{\prod_{i=1}^n q_{ii}}{\Delta}$ .

REMARQUE 3 : Le minimum de  $(P)$  est le minimum local minimisant  $y^t Q^{-1} y$ , cad la norme  $Q^{-1}$  du gradient.

La résolution du système  $(Q)$  peut alors se faire par une exploration exhaustive de deux façons différentes :

a) Faire varier les  $y_i$  de  $-\left[\frac{q_{ii}}{2}\right]$  à  $+\left[\frac{q_{ii}}{2}\right]$ ,  $i$  de 1 à  $n$ .

— Calculer chaque fois  $R \equiv \sum_{i=1}^n g^i y_i - g^0$  en remarquant que

$$R(y_1, \dots, y_i + 1, \dots, y_n) \equiv R(y_1, \dots, y_i, \dots, y_n) + g^i.$$

— Chaque fois que  $R \equiv 0$ , on a un minimum local et on calcule  $y^t Q^{-1} y$ .

b) Si l'équation linéaire dans le groupe fini  $G$  peut s'écrire :

$$(4) \quad y_1 \equiv \sum_{i=2}^n h^i y_i + h^0$$

— On fait varier les  $y_i$  de  $-\left[\frac{q_{ii}}{2}\right]$  à  $+\left[\frac{q_{ii}}{2}\right]$ ,  $i$  de 2 à  $n$ .

— On calcule chaque fois  $y_1$  par (4) en remarquant que

$$y_1(y_2, \dots, y_i + 1, \dots, y_n) \equiv y_1(y_2, \dots, y_i, \dots, y_n) + h^i$$

— Chaque fois qu'un représentant de  $y_1$  est plus petit que  $\left[\frac{q_{11}}{2}\right]$ , on a un minimum local et on calcule  $y^t Q^{-1} y$ .

EXEMPLE

$$(P) \begin{cases} \text{Min } f(x) = 13x_1^2 - 8x_1x_2 + 5x_2^2 - 18x_1 + 12x_2 \\ x \in Z^2 \end{cases}$$

Le changement de variable sera :

$$y_1 = \frac{1}{2} \frac{\partial f}{\partial x_1} = 13x_1 - 4x_2 - 9$$

$$y_2 = \frac{1}{2} \frac{\partial f}{\partial x_2} = -4x_1 + 5x_2 + 6$$

Les minimums locaux vérifient alors le système :

$$(Q) \begin{cases} y_1 + 40y_2 \equiv 35 \pmod{49} \\ y \in Z^2, \quad |y_1| \leq 6, \quad |y_2| \leq 2 \end{cases}$$

Pour résoudre ( $Q$ ) utilisons l'exploration  $b$ ) : faisons donc varier  $y_2$  de  $-2$  à  $+2$ ,

$$\begin{array}{c|c|c|c|c|c} y_2 & -2 & -1 & 0 & 1 & 2 \\ \hline y_1 & 17 & -23 & -14 & -5 & 4 \end{array}$$

D'où 2 minimums locaux :

$$y = (-5, 1) \quad \text{avec} \quad y^t Q^{-1} y = 2$$

$$y = (4, 2) \quad \text{avec} \quad y^t Q^{-1} y = 4$$

Le minimum du programme ( $P$ ) correspond donc à  $y = (-5, 1)$ , d'où la solution optimale  $x = (0, -1)$ .

#### BIBLIOGRAPHIE

- [1] G. COQUET, Communication privée, mars 1967.
- [2] J. Ch. FIOROT, « Génération des points entiers d'un paralléloétope de  $R^n$  », *CRAS*, Paris, série A, t. 270, 9 févr. 1970, p. 395-398.
- [3] R. E. GOMORY, *On the relation between integer and non integer solutions to linear programs*, Proceeding of the National Academy of sciences, vol. 53 (1965).
- [4] M. GONDRAN, « Programmation entière non linéaire », *RIRO*, 4<sup>e</sup> année, R-3, 1970, p. 107-110 et *C.R.A.S.*, Paris, t. 272, p. 1593-5, 14 juin 1971, série A.
- [5] M. GONDRAN, « Programme quadratique en variables bivalentes avec contraintes d'égalités ». Note EDF HI 655/02 du 4 octobre 1971.
- [6] P. HAMMER et S. RUDEANU, *Boolean Methods in Operations research and related areas*, Springer-Verlag, Berlin-Heidelberg-New York, 1968, Dunod, Paris, 1970.