CHRISTIANE ODIARD

Brèves communications. Un corollaire du théorème de Perron-Frobenius

Revue française d'informatique et de recherche opérationnelle. Série rouge, tome 5, n° R2 (1971), p. 124-129

<http://www.numdam.org/item?id=M2AN_1971__5_2_124_0>

R.I.R.O.
(5e année, R-2, 1971, p. 124-129)

UN COROLLAIRE DU THEOREME DE PERRON-FROBENIUS

par Christiane ODIARD (1)

Sommaire. — *On montre que pour* toute *matrice carrée A à éléments $\geqslant 0$, le rayon spectral* $\rho(A)$ *est la borne inférieure de* $S_{\infty\infty}(Z^{-1}AZ)$ *lorsque Z décrit l'ensemble des matrices diagonales à éléments* > 0, $S_{\infty\infty}$ *désignant la norme de matrices issue de la norme du max sur* $\mathbf{R}^n$.

On caractérise de deux manières (dont l'une s'énonce ainsi : il existe $z > 0$ tel que $Az \leqslant \rho(A)z$) le fait que cette borne inférieure soit atteinte, le résultat classique ([1], [2]) assurant que cet inf est atteint lorsque A est *irréductible* apparaît comme un cas particulier.

Dans tout ce qui suit, A désigne une matrice réelle, de type (n, n), à éléments a_{ij} positifs ou nuls et de rayon spectral $\rho(A)$.

Un vecteur $x = (x_1, x_2, \dots x_n)$ est positif (> 0), si pour tout i, $1 \leqslant i \leqslant n$, on a $x_i > 0$ dans $\mathbf{R}$.

On notera $Z = \text{diag } \{ z_1, z_2 \dots z_n \}$, la matrice diagonale Z, ayant z_i ($i = 1, 2, \dots n$) pour éléments diagonaux.

φ_∞ désigne la norme du max sur $\mathbf{R}^n(\varphi_\infty(x) = \underset{i}{\text{Max}} \, |x_i|)$ et $S_{\infty\infty}$ la norme de matrice engendrée par φ_∞ ; de sorte que :

$$S_{\infty\infty}(A) = \underset{i}{\text{Max}} \sum_j a_{ij} \qquad (a_{ij} \geqslant 0)$$

Alors, il est bien connu que, pour tout vecteur $z > 0$,

$$(1) \qquad \rho(A) = \rho(Z^{-1}AZ) \leqslant S_{\infty\infty}(Z^{-1}AZ) = \underset{i=1}{\overset{n}{\text{Max}}} \sum_{j=1}^{n} \frac{a_{ij}z_j}{z_i}$$

---

(1) Département de Mathématiques, Faculté des Sciences d'Alger et Section d'Analyse Numérique du Département de Mathématiques, Université de Lyon 1.

1. PROPOSITION 1

Si A est une matrice (n, n), à éléments positifs ou nuls, alors :

$$\rho(A) = \operatorname{Inf} S_{\infty\infty}(Z^{-1}AZ),$$

où la borne inférieure est prise sur les matrices diagonales Z, positives.

1° Remarquons d'abord qu'il résulte du théorème 3.8 de ([1]) que pour $\alpha > \rho(A)$, il existe un vecteur u positif, tel que :

$$(\alpha I - A)u \text{ soit positif.}$$

2° Démontrons la proposition 1 :

Soit ε positif, posons $\alpha = \rho(A) + \varepsilon$; d'après 1°, il existe un vecteur $u = (u_1, u_z, \dots u_n)$, positif, et tel que

$$[\rho(A) + \varepsilon]u > Au.$$

En prenant la matrice $v = \operatorname{diag}\{u_1, u_2, \dots u_n\}$, nous obtenons la relation :

$$S(_{\infty\infty}v^{-1}Av) < \rho(A) + \varepsilon. \tag{2}$$

Ceci, joint à la relation (1), achève la preuve.

2. CONDITION NECESSAIRE ET SUFFISANTE POUR QUE LA BORNE INFERIEURE DE LA PROPOSITION 1 SOIT ATTEINTE

2-1. Si A est irréductible

La borne inférieure est atteinte d'après le théorème de Perron-Frobenius ([2] : théorème 2.1).

En effet, il suffit de prendre la matrice $Z = \operatorname{diag}\{z_1, \dots, z_n\}$, où le vecteur $z = (z_1, z_2, \dots z_n)$ est le vecteur propre (> 0) de A correspondant à la valeur propre $\rho(A)$.

Nous avons alors :

$$\rho(A) = S_{\infty\infty}(Z^{-1}AZ).$$

2.2. Si A est réductible

Soit B la forme normale de A ([1], page 74), nous avons $B = P^T AP$, où P est une matrice de permutation et $\rho(A) = \rho(B)$.

B s'écrit alors :

$$B = \begin{pmatrix} A_1 & 0 \ldots & 0 & 0 \ldots & 0 \\ 0 & A_2 \ldots & 0 & 0 \ldots & 0 \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ 0 & 0 \ldots & A_g & 0 \ldots & 0 \\ A_{g+1,1} & A_{g+1,2} \ldots & A_{g+1,g} & A_{g+1} \ldots & 0 \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ A_{s1} & A_{s2} \ldots & A_{sg} & A_{s,g+1} \ldots & A_s \end{pmatrix}$$

où A_1, A_2, ... A_s, sont des matrices carrées irréductibles et où, pour $g+1 \leqslant f \leqslant s$, une au moins des matrices $a_{f,1}$, $A_{f,2}$, ... $A_{f,f1}$, n'est pas nulle.

Nous avons la proposition suivante :

Proposition 2

La borne inférieure de la proposition 1 est atteinte si et seulement si A vérifie i) et ii) :

i) il existe $j_0 \in \{ 1, 2, \ldots g \}$, tel que $\rho(A) = \rho(Aj_0)$,

ii) cela n'est vrai pour aucune matrice A_k, $(k = g+1, \ldots, s)$.

Démontrons d'abord le

Lemme

Soit A matrice réelle, à éléments positifs ou nuls, alors A vérifie i) et ii), si et seulement si il existe un vecteur z, positif, tel que $Az \leqslant \rho(A)z$.

Démonstration

1° *Remarquons d'abord* que la relation : « il existe un vecteur z, positif, tel que $Az \leqslant \rho(A)z$ » est équivalente à la relation : « il existe un vecteur u, positif, tel que $Bu \leqslant \rho(B)u$ ».

En effet, si il existe un vecteur u positif tel que $Bu \leqslant \rho(B)u$, cela s'écrit :

$$P^T APu \leqslant \rho(B)u,$$

ou encore :

$$APu \leqslant \rho(B)Pu,$$

soit enfin, puisque $\rho(A) = \rho(B)$, et en posant $z = Pu$, vecteur positif

$$Az \leqslant \rho(A)z.$$

Nous allons donc démontrer le lemme en prenant la relation sur la matrice B.

— Notons r_j la valeur propre maximale de A_j, pour $1 \leqslant j \leqslant s$, et v^j le vecteur propre correspondant; v^j est positif pour $1 \leqslant j \leqslant s$, d'après le théorème de Perron-Frobenius.

2° *La condition est nécessaire :*

D'après i), nous avons :

$$A_{j_o} v^{j_o} = \rho(A) v^{j_o} \qquad \text{avec} \qquad v^{j_o} > 0$$

et

$$\begin{cases} r_j \leqslant \rho(A) \\ A_j v^j \leqslant \rho(A) v^j \qquad (j = 1, 2, \dots, g \text{ et } j \neq j_o) \end{cases}$$

D'après ii), nous avons :

$$r_k < \rho(A) \qquad (k = g + 1, \dots s). \tag{3}$$

A la forme normale de A, il correspond une décomposition de $\mathbf{R}^n$ en sous-espaces $R_1, R_2, \dots, R_s$, tels que $\mathbf{R}^n = R_1 + R_2 + \dots + R_S$. Pour tout vecteur x de $\mathbf{R}^n$, nous noterons x^i la projection de x dans R_i pour $1 \leqslant i \leqslant s$.

Considérons le vecteur x défini par :

$$\begin{cases} x^j = v^j \qquad (j = 1, 2, \dots, g) \\ x^k = [\rho(A) I_k - A_k]^{-1} \sum_{h=1}^{k-1} A_{kh} v^h \qquad (k = g + 1, \dots, s), \end{cases}$$

où I_k est la matrice unité de même ordre que $A_k (k = g + 1, \dots, s)$.

Nous déduisons de la relation (3) et du théorème 3-9 de ([2]) que x^k est positif pour $g + 1 \leqslant k \leqslant s$. Le vecteur x ainsi défini est donc positif, et il vérifie la relation :

$$Bx \leqslant \rho(A) x$$

soit aussi :

$$Bx \leqslant \rho(B) x.$$

3° *Réciproquement*, supposons qu'il existe un vecteur z, positif, tel que $B_z \leqslant \rho(B) z$.

Nous avons alors les deux inégalités suivantes :

$$A_j z^j \leqslant \rho(B) z^j \qquad (j = 1, 2, \dots, g) \tag{4}$$

$$\sum_{h=1}^{k-1} A_{kh} z^h + A_k z^k \leqslant \rho(B) z^k \qquad (k = g + 1, \dots, s). \tag{5}$$

De (4), nous déduisons :

$$r_j \leqslant \rho(B) \qquad (j = 1, 2, \dots, g)$$

et de (5), nous déduisons :

$$(6)\qquad \begin{cases} A_k z^k \leqslant \rho(B) z^k \\ A_k z^k \neq \rho(B) z^k \end{cases} \qquad (k = g+1, \ldots, s),$$

ce qui entraîne, pour $g + 1 \leqslant k \leqslant s$:

$r_k \leqslant \rho(B)$ soit $r_k \leqslant \rho(A)$ d'après la première inégalité de (6), et
$r_k \neq \rho(B)$ soit $r_k \neq \rho(A)$ d'après (6) et la remarque 5 page 65 de ([1]).

D'où la condition ii) :

$$r_k < \rho(A) \qquad (k = g+1, \ldots, s).$$

Soit $u = (u^1, u^2, \ldots, u^s)$, le vecteur propre de B correspondant à la valeur propre $\rho(B)$; u vérifie les relations :

$$(7)\qquad \begin{cases} u \geqslant 0 \quad \text{et} \quad u \neq 0 \\ A_j u^j = \rho(B) u^j \qquad (j = 1, 2, \ldots, g) \\ \sum_{h=1}^{k-1} A_{kh} u^h + A_k u^k = \rho(B) u^k \qquad (k = g+1, \ldots, s). \end{cases}$$

Si pour tout j, $1 \leqslant j \leqslant g$, nous avons $u^j = 0$, alors (7) entraîne :

$$A_{g+1} u^{g+1} = \rho(B) u^{g+1}$$

et

$$\rho(A) \leqslant r_{g+1}, \text{ d'après la définition de } r_{g+1}.$$

Ce qui contredit :

$$r_{g+1} < \rho(A).$$

Donc il existe un indice j_o, avec $1 \leqslant j_o \leqslant g$, tel que $u^{j_o} \neq 0$. D'après (7), nous avons :

$$A_{j_o} u^{j_o} = \rho(B) u^{j_o},$$

c'est-à-dire que $\rho(B)$ est valeur propre de $A j_o$. Ce qui entraîne la condition i) : $\rho(B) = r_{j_o}$, ou encore $\rho(A) = r_{j_o}$.

La démonstration de la proposition 2 est alors immédiate :

1° Si A vérifie i) et ii) : d'après le lemme, il existe un vecteur z, $z = (z_1, z_2, \ldots z_n)$, positif tel que :

$$Az \leqslant \rho(A) z,$$

et donc

$$\rho(A) = S_{\infty\infty}(Z^{-1}AZ),$$

où $Z = \text{diag}\,\{ z_1, ..., z_n \}$.

2° Si la borne inférieure est atteinte : il existe une matrice diagonale positive $Z = \text{diag}\,\{ z_1, ..., z_n \}$ telle que :

$$\rho(A) = S_{\infty\infty}(Z^{-1}AZ),$$

soit :

$$\rho(A) = \underset{i=1}{\overset{n}{\text{Max}}} \frac{\sum_{j=1}^{n} a_{ij}z_j}{z_i}$$

d'où :

$$\frac{\sum_{j=1}^{n} a_{ij}z_j}{z_i} \leqslant \rho(A) \qquad (i = 1, 2, ..., n).$$

Si z est le vecteur ayant pour composantes $z_1, z_2, ..., z_n$, nous avons :

$$Az \leqslant \rho(A)z,$$

ce qui achève la preuve.

REMARQUE : On trouve dans [1] une caractérisation des matrices non négatives A pour lesquelles existe $z > 0$ avec $Az = \rho(A)Z_o$. L'idée de la proposition 2 consiste à chercher, de façon plus générale, un vecteur $z > 0$ tel que $Az \leqslant \rho(A)z$.

BIBLIOGRAPHIE

[1] S. R. GANTMACHER, *The theory of Matrices*, vol. II, Chelsea Publishing Company New York.

[2] R. S. VARGA, *Matrix iterative Analysis*, Prentice-Hall, Inc. New Jersey. 1962.