

# REVUE FRANÇAISE D'INFORMATIQUE ET DE RECHERCHE OPÉRATIONNELLE. SÉRIE ROUGE

GUY BOULAYE

## Notions d'extension dans les treillis

*Revue française d'informatique et de recherche opérationnelle. Série rouge*, tome 5, n° R1 (1971), p. 105-116

[http://www.numdam.org/item?id=M2AN\\_1971\\_\\_5\\_1\\_105\\_0](http://www.numdam.org/item?id=M2AN_1971__5_1_105_0)

© AFCET, 1971, tous droits réservés.

L'accès aux archives de la revue « Revue française d'informatique et de recherche opérationnelle. Série rouge » implique l'accord avec les conditions générales d'utilisation (<http://www.numdam.org/conditions>). Toute utilisation commerciale ou impression systématique est constitutive d'une infraction pénale. Toute copie ou impression de ce fichier doit contenir la présente mention de copyright.

NUMDAM

Article numérisé dans le cadre du programme  
Numérisation de documents anciens mathématiques  
<http://www.numdam.org/>

## NOTIONS D'EXTENSION DANS LES TREILLIS (1)

par Guy BOULAYE (2)

Résumé. — Nous étudions ici une classe de treillis non modulaires dont les propriétés algébriques sont par conséquent faibles. Nous nous sommes alors plutôt attaché à leur caractère d'ensembles ordonnés. Pour cela nous avons étudié la propriété :

Un treillis possède la propriété  $\alpha$  s'il est à longueur de chaînes et si cette longueur est égale au nombre de ses éléments  $U$ -irréductibles, ceux-ci étant tous atomiques.

Puis nous avons affaibli progressivement cette propriété. Par ailleurs l'immersion de treillis dans des treillis booléens, nous permet d'attacher une fonction booléenne aux treillis. Pour certaines immersions, la fonction obtenue est caractéristique de certaines propriétés du treillis (en particulier, la propriété  $\alpha$ ).

### 1. NOTION D'EXTENSION DANS LES TREILLIS

*Notation* : Les signes  $\cap$  et  $\cup$  désignent les opérations borne supérieure et inférieure des treillis, tandis que  $\underline{\cap}$  et  $\underline{\cup}$  représentent l'intersection et l'union ensemblistes.

#### 1.1. Extension d'un ensemble ordonné. Définition

Nous dirons qu'un ensemble ordonné  $E_{n+1}$  est obtenu par extension à partir de l'ensemble ordonné  $E_n$ , si  $E_{n+1}$  est un sous-ensemble de  $E_n \times \{0,1; 0 < 1\}$ , contenant  $E_n \times \{0\}$  :

$$E_n \times \{0\} \subseteq E_{n+1} \subseteq E_n \times \{0,1\}$$

et  $E_n$  sera dit *ensemble initial* de l'extension.

(par  $\{0,1\}$  et dans toute la suite, nous entendons  $\{0,1; 0 < 1\}$ )

REMARQUE : Duale, si  $E_n \times \{1\} \subseteq E_{n+1} \subseteq E_n \times \{0,1\}$  nous dirons que  $E_{n+1}$  est obtenu par contre-extension.

(1) Ces notions ont été développées alors que l'auteur appartenait à l'équipe du Professeur J. Kuntzmann, Institut de Mathématiques Appliquées et Informatique, Grenoble.

(2) Actuellement Maître de Conférences à l'Université de Paris-Dauphine.

*Support de l'extension. Définition*

Nous appelons *support* la partie :

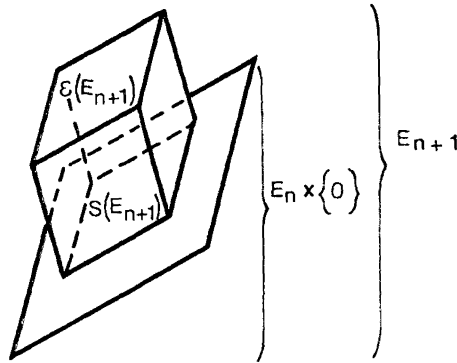
$$S(E_{n+1}) = \{ (x, 0); x \in E_n, \exists(x, 1) \in E_{n+1} \}$$

Nous dirons des éléments de  $S(E_{n+1})$ , qu'ils « participent à l'extension ».

*Partie étendue. Définition*

Nous appelons ainsi la partie :

$$\varepsilon(E_{n+1}) = \{ (x, 1); x \in E_n \} = E_{n+1} - E_n \times \{0\}$$



$$E_n \times \{0\} \subseteq E_{n+1} \subseteq E_n \times \{0,1\}$$

$$S(E_{n+1}) = \{ (x,0); x \in E_n, \exists(x,1) \in E_{n+1} \}$$

$$\varepsilon(E_{n+1}) = E_{n+1} - E_n \times \{0\}$$

Figure 1

*Extension avec minimum*

On dira que l'extension est avec minimum si son support possède un minimum.

*Éléments homologues. Définition*

Deux éléments sont dits « homologues », s'ils sont de la forme : l'un  $(a, 0)$  et l'autre  $(a, 1)$ .

Les éléments de  $\varepsilon(E_{n+1}) \cup S(E_{n+1})$  sont deux à deux homologues, tandis que les éléments de  $(E_{n+1} - [\varepsilon(E_{n+1}) \cup S(E_{n+1})])$  n'ont pas d'homologue.

Soit  $x$  un élément, on notera  $x^*$  son homologue (quand celui-ci existe).

**1.1.1. Extension caténaire. Définition**

Une extension sera dite caténaire si toute chaîne maximale du support est maximale dans l'ensemble initial.

**Théorème**

*Une extension conserve la propriété de Jordan-Dedekind si et seulement si elle est caténaire.*

**1.1.2. Nature de l'ensemble initial pour un treillis obtenu par extension****Théorème**

*Si  $T$  est un treillis, obtenu par extension à partir d'un ensemble initial  $E$ , ce dernier est lui-même un treillis, sous-treillis convexe de  $T$ .*

**Corollaire**

Si  $T$  est distributif ou modulaire ou  $U$ -semi-modulaire ou  $\cap$ -semi-modulaire, le treillis initial l'est également.

**Théorème**

*Un treillis  $T_{n+1}$ , obtenu par extension à partir du treillis  $T_n$ , est complet si et seulement si  $T_n$  est complet.*

**1.2. Extension « latticielle » d'un treillis**

Dans le cas où l'ensemble initial,  $T_n$ , est un treillis, nous appelons « latticielle » une extension qui conserve la structure de treillis; c'est-à-dire que l'ensemble obtenu,  $T_{n+1}$ , est lui aussi un treillis (mais  $T_{n+1}$  n'est pas obligatoirement un sous-treillis de  $T_n \times \{0,1\}$ ). Le théorème suivant caractérise une telle extension. Nous étudierons ensuite les extensions préservant la distributivité, la modularité, l' $\cap$  et l' $U$ -semi-modularité, la complémentarité.

**Théorème**

*Une extension est latticielle si et seulement si,  $T_n$  étant le treillis initial et  $T_{n+1}$  l'ensemble obtenu :*

1)  $\forall \{x, y\} \subseteq S(T_{n+1})$ , alors :

$$[S(T_{n+1}) \sqcap \text{Minor}(\{x, y\}) \neq \emptyset] \Rightarrow x \cap y \in S(T_{n+1})$$

2)  $\forall \{x, y\} \subseteq T_n \times \{0\}$ , alors :

$$S(T_{n+1}) \sqcap \text{Major}(\{x, y\}) \text{ est non vide et possède un minimum.}$$

**REMARQUE : treillis complet**

La seconde partie de la condition, exprimée dans le théorème précédent, est à remplacer par :

$$2') \quad \text{Max}(T_n \times \{0\}) \in S(T_{n+1})$$

### 1.3. Treillis obtenus par extensions successives

Nous nous intéressons ici aux treillis (finis, d'ailleurs) obtenus par des extensions successives, la première portant sur le treillis à un seul élément.

#### **Théorème**

*Les treillis finis obtenus par extensions successives, chaque fois avec minimum à partir du treillis à un seul élément, sont les treillis dont la longueur est égale au nombre de leurs éléments U-irréductibles.*

### 1.4. Conservation de la semi-modularité lors d'une extension

Suivant qu'il s'agit d'U-semi-modularité ou d' $\cap$ -semi-modularité, les conditions requises ne sont pas les mêmes d'où les deux théorèmes suivants :

#### **Théorème**

*Une extension latticielle conserve l' $\cap$ -semi-modularité si et seulement si tout intervalle participant à l'extension est convexe.*

#### **Théorème**

*Une extension conserve l'U-semi-modularité si et seulement si l'ensemble support est un sous- $\cap$ -demi-treillis (du treillis initial), dont toute chaîne est maximale.*

### 1.5. Extension latticielle, distributivité et modularité

Nous nous proposons de caractériser les extensions qui conservent la distributivité ou la modularité. Puis nous établirons quelques résultats concernant les treillis distributifs. Préliminairement, présentons le lemme :

#### **Lemme**

Soit un treillis  $T_{n+1}$  obtenu par extension à partir du treillis  $T_n$ . Alors,  $T_{n+1}$  est sous-treillis de  $T_n \times \{0, 1\}$  si et seulement si le support de l'extension est un sous-treillis convexe du treillis initial.

#### **Théorème**

*Une extension latticielle conserve la modularité ou la distributivité si et seulement si le support de l'extension est un sous-treillis convexe du treillis initial.*

#### **Théorème**

*Les treillis distributifs finis sont les treillis obtenus par extensions successives à partir du treillis élémentaire à un seul élément, chaque extension ayant pour support un sous-treillis convexe.*

**Corollaire**

Un treillis distributif de longueur  $n$  est sous-treillis du  $n$ -cube.

**1.6. Relation entre co-atomes, U-générateurs maximaux et extension, dans un treillis fini distributif**

**Théorème**

Dans un treillis distributif fini, on peut mettre co-atomes et U-irréductibles maximaux en correspondance bi-univoque, de telle sorte qu'à chaque couple  $(a_p, g_p)$  ainsi formé corresponde une possibilité d'obtenir le treillis donné par extension : le co-atome  $a_p$  est le maximum du treillis initial et l'élément U-générateur  $g_p$  associé à  $a_p$  est l'homologue du minimum du support de l'extension.

**1.7. Treillis complémentés obtenus par extension (fig. 2)**

Soit  $T_{n+1}$  un treillis obtenu par extension à partir du treillis  $T_n$ . Si  $T_{n+1}$  est un treillis complémenté, cela signifie qu'il possède un maximum  $I_n$  et un minimum  $0$ . Le maximum  $I_{n+1}$  est l'homologue d'un élément de  $T_n \times \{0\}$  maximum dans  $T_n \times \{0\}$ . Quant au minimum de  $T_{n+1}$ , c'est aussi un minimum pour  $T_n \times \{0\}$ . Ainsi, parler de  $T_{n+1}$  comme d'un treillis complémenté revient à supposer implicitement que  $T_n$  possède un maximum et un minimum. Par contre  $T_n$  n'est pas forcément complémenté. C'est le cas dans l'exemple ci-contre où  $T_{n+1}$  est complémenté alors que  $T_n$  ne l'est pas.

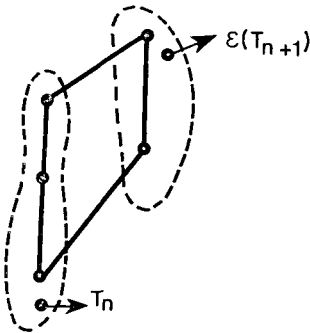


Figure 2

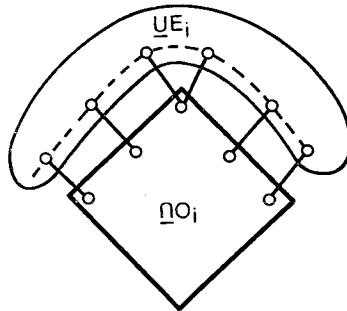


Figure 3

**Théorème**

Un treillis  $T_{n+1}$  obtenu par extension à partir du treillis  $T_n$  est complémenté si et seulement si :

- $T_n$  possède un maximum et un minimum
- $\forall x, x \in T_n \times \{0\}, \exists y, y \in S(T_{n+1}),$   
 $x \cap y = 0, (Major(x, y)) \underline{\cap} S(T_{n+1}) = Max(T_n \times \{0\})$

(et alors  $x$  et  $y^*$  sont complémentaires).

**1.8. Lorsqu'un treillis peut être obtenu, par extension, de différentes façons possibles (en nombre fini)**

Notons  $T = (E_i \uparrow O_i)$  pour indiquer que  $T$  peut être considéré comme obtenu par extension à partir de  $O_i$  (sous-treillis convexe de  $T$ ), avec pour partie étendue  $E_i$ . S'il y a  $p$  façons différentes d'obtenir  $T$  par extension, on écrira :

$$T = (E_1 \uparrow O_1) = (E_2 \uparrow O_2) = \dots = (E_p \uparrow O_p)$$

Il est intéressant d'étudier l'intersection ensembliste des ensembles initiaux et l'union ensembliste des parties étendues.

$\bigcup_{i=1}^p E_i$  est l'ensemble des éléments de  $T$  qui font partie d'au moins une partie étendue.

$\bigcap_{i=1}^p O_i$  est l'ensemble des éléments qui ne font partie d'aucune partie étendue ou, si l'on préfère, qui appartiennent à tous les treillis initiaux. Cet ensemble a souvent une signification : dans le treillis des sous-arbres d'un arbre, c'est l'ensemble des sous-arbres de l'arbre obtenu en supprimant toutes les feuilles; dans un treillis distributif, c'est le sous-treillis construit sur les  $\cup$ -générateurs non maximaux.

**Théorème**

$\bigcap O_i$  contient, avec tout élément, tous ceux qui lui sont inférieurs et est fermée pour  $\cup$ . De plus, si  $T$  est complet :

$$\text{Max} \left( \bigcap_{i \in [1, p]} O_i \right) = \text{Inf} ( \{ \text{Max} (O_i), i \in [1, p] \} )$$

**Théorème**

$\bigcup E_i$  contient avec tout élément, tous ceux qui lui sont supérieurs. Par ailleurs, un élément de  $\bigcup E_i$ , est  $\cup$ -irréductible dans  $T$  si et seulement si il est minimal dans  $\bigcup E_i$ ; un tel élément est, de plus, maximal parmi les éléments  $\cup$ -irréductibles de  $T$ .

*Commentaire*

Le dessin de la figure 3 illustre comment se présente  $\bigcup E_i$  et  $\bigcap O_i$ . On retrouve d'une certaine façon la notion « couche » dont nous parlerons plus loin.

**2. IMMERSION D'UN TREILLIS DANS UN AUTRE.  
CODAGE BOOLEEN D'UN TREILLIS**

**2.1. Codage d'un treillis. Codage booléen. Définition**

Nous appelons codage une application injective d'un treillis donné  $T$  (treillis « codé ») dans un autre,  $S$  (treillis de codage) :

$$T \xrightarrow{h} S$$

Si le treillis de codage est un treillis de Boole, nous parlerons de codage booléen. D'une façon générale, nous désignerons un codage par  $h$ .

*U-codage. Définition*

Nous appelons ainsi un codage  $h : T \xrightarrow{h} S$  tel que :

$$\forall \{ x, y \} \subseteq T \Rightarrow h(x \cup y) = h(x) \cup h(y)$$

*∩-codage. Définition*

Nous appelons ainsi un codage  $h : T \xrightarrow{h} S$  tel que :

$$\forall \{ x, y \} \subseteq T \Rightarrow h(x \cap y) = h(x) \cap h(y).$$

*∩-codage booléen canonique*

Soit un treillis  $T$  fini et :

$$G = \{ g_1, g_2, \dots, g_n \}$$

l'ensemble des U-irréductibles ( $\neq \min(T)$ ) de  $T$ .

Définissons le codage suivant : à tout élément  $x$  de  $T$ , associons

$$G_x = \{ g_i, g_i \in G, g_i \leq x \},$$

l'application

$$T \xrightarrow{h} P(G) \text{ (1)}$$

ainsi définie, immerge  $T$  dans  $P(G)$ , treillis de Boole de dimension  $n$ . Dans  $T$ ,  $x = \text{Sup } G_x$ ,  $G_x$  est maximal et  $h$  est croissante. Constatons que :

1)  $h$  est injective :

$$(x = y) \Leftrightarrow (G_x = G_y) \Leftrightarrow (\text{Sup } G_x = \text{Sup } G_y) \\ \text{dans } T \quad \text{dans } T$$

2)  $h$  est un ∩-homomorphisme, en effet :

$$G_{x \cap y} \subseteq G_x \cap G_y \text{ car } G_{x \cup y} \subseteq \begin{matrix} G_x \\ G_y \end{matrix} \text{ et } h \text{ est croissante.}$$

Donc  $h$  est un ∩-codage booléen.

---

(1)  $P(G)$  : ensemble des parties de  $G$ .



Dans la pratique, on peut définir les lettres  $g_1, g_2, \dots, g_n$  associées aux U-irréductibles, considérer l'algèbre de Boole libre engendrée par ces lettres (c'est-à-dire l'ensemble des polynômes booléens en  $g_i$ ) et, pour chaque  $G_x$ , définir le monôme canonique :

$$h(x) = \pi g_i \pi \bar{g}_j$$

$$g_i \in G_x, \quad g_j \notin G_x$$

enfin, attacher au treillis lui-même la fonction :

$$f(T) = \sum_{x \in T} h(x)$$

Notons que cette fonction possède les monômes :

$$\bar{g}_1 \cdot \bar{g}_2 \cdot \dots \cdot \bar{g}_n \quad \text{et} \quad g_1 \cdot g_2 \cdot \dots \cdot g_n$$

De manière analogue, on définit l'*U-codage booléen canonique*.

## 2.2. Théorème d'isomorphisme

*Un U- ou  $\cap$ -codage conduit à un isomorphisme d'ordre entre le treillis  $T$  codé et son image dans le treillis  $S$  de codage.*

## 2.3. Fonction booléenne caractéristique d'un treillis fini

### Théorème

*La fonction booléenne attachée par  $\cap$ -codage booléen canonique (ou U- ...) à un treillis fini est caractéristique de ce treillis.*

REMARQUE 1 :

Il est nécessaire de préciser les variables; par exemple :

$$f(A, B, \bar{C}, D) = \bar{C} + D = (A + \bar{A})(B + \bar{B})(\bar{C} + D)$$

REMARQUE 2 :

Étant donnée une fonction, nous ne connaissons pas de condition suffisante pour qu'elle soit la fonction attachée à un treillis.

### Applications

Représentation de treillis et contrôle, au passage, de la structure de treillis; si on n'a pas un treillis, un conflit naîtra, en ce sens que l'on tentera d'attribuer

à un élément, un monôme booléen déjà attribué. Naturellement, il ne peut s'agir que d'un ensemble fini et on commencera par s'assurer qu'il possède un minimum et un maximum.

— Représentation aussi de Sup — ou Inf — demi treillis (arborescences, etc... très répandus en documentation, enquête d'opinion par exemple...)

— Recherches concernant les treillis par l'intermédiaire de la fonction caractéristique attachée. En particulier, il est facile de rechercher sur la fonction, plutôt que sur le treillis lui-même, si celui-ci est un produit de treillis.

#### 2.4. Dimension minimale et conservation des opérateurs $\cup$ ou $\cap$

##### **Théorème**

*Un  $\cap$ -codage booléen est de dimension au moins  $n$  ( $n$  : nombre des  $\cup$ -irréductibles du treillis à coder), et, pour cette dimension, le seul codage possible est le codage canonique.*

#### 2.5. Fonctions attachées aux treillis obtenus par extension

Le théorème le plus simple, et de preuve immédiate est le suivant :

##### **Théorème**

*Un treillis fini est obtenu par extension avec élément minimum si et seulement si sa fonction booléenne caractéristique obtenue par  $\cap$ -codage canonique est décroissante pour au moins une variable.*

Plus généralement :

##### **Théorème**

*Un treillis fini est obtenu par extension si et seulement si la fonction booléenne obtenue par  $\cap$ -codage canonique, attachée au treillis dual est croissante pour au moins une variable.*

### 3. QUESTIONS RELATIVES A LA MODULARITE OU LA SEMI-MODULARITE

*Indice d'un élément d'un treillis. Définition.*

L'indice d'un élément  $a$  d'un treillis, noté  $i(a)$  est la longueur de la plus longue suite d' $\cup$ -irréductibles inférieurs ou égaux à  $a$ .

Ainsi, cette notion n'est pas toujours définie.

Dans les treillis atomiques, les atomes ont l'indice 1.

S'il existe, le minimum du treillis est d'indice nul.

##### **Lemme**

Dans un treillis modulaire atomique, les éléments d'indice  $\leq 1$  forment un sous-treillis convexe.

**Théorème**

Dans un treillis modulaire atomique  $T$ , les éléments d'indice  $\leq i$ , forment un sous-treillis convexe  $T_i$  pour tout  $i$ . De plus, un élément ayant une représentation d'indice  $i + 1$  ne comportant qu'un U-irréductible d'indice  $i + 1$ , couvre un et un seul élément de  $T_i$ .

*Commentaire*

On aboutit à une sorte de stratification du treillis suivant l'indice : l'élément nul est d'indice 0. Puis les éléments d'indice 1 forment une strate  $S_1$ . Puis, les éléments d'indice 2 forment une strate  $S_2$  etc...

Chaque strate est fermée pour l'union (fig. 4).

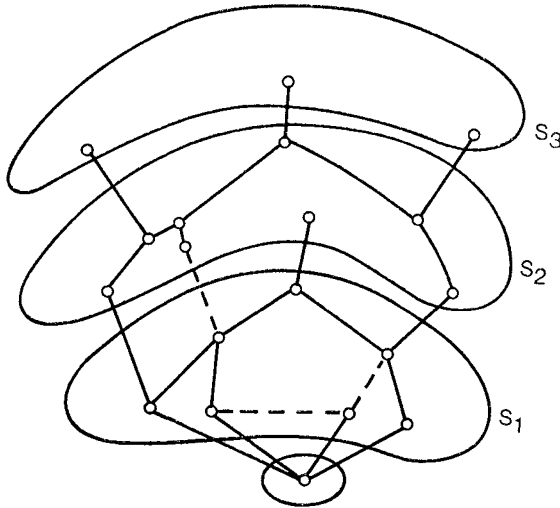


Figure 4

**Corollaire 1**

Dans un treillis modulaire  $i(a \cup b) = \text{Max}(i(a), i(b))$ .

**4. TRELLIS  $(\alpha)$  ET  $\alpha$ -AFFAIBLIS**

Nous étudions ici une classe de treillis dont le premier exemple fut le treillis des sous-arbres d'un arbre. Ces treillis sont très liés à la notion d'extension que nous avons développée; ils sont difficilement caractérisables algébriquement, ce qui s'explique par ce qu'un sous-treillis d'un treillis  $(\alpha)$  ou  $\alpha$ -affaibli n'est pas forcément  $(\alpha)$  ou  $\alpha$ -affaibli.

**4.1. Condition  $(\alpha)$  pour un treillis fini**

Un treillis  $T_n$  fini est dit satisfaire la condition  $(\alpha)$  d'ordre  $n$  ou, plus simplement,  $T_n$  est dit  $(\alpha)$  d'ordre  $n$  si :

$\alpha-1$  :  $T_n$  possède exactement  $n$  U-irréductibles.

$\alpha$ -2 : Toute chaîne maximale joignant  $\text{Min}(T_n)$  à  $\text{Max}(T_n)$  est de longueur  $n$  (c'est-à-dire  $T_n$  est  $J$ - $D$  de longueur  $n$ ).

$\alpha$ -3 : Les atomes sont les seuls éléments  $U$ -irréductibles de  $T_n$ .

REMARQUE : pour un treillis  $T$  infini, la condition  $(\alpha)$  peut s'exprimer :

- $T$  est atomique,
- les atomes sont les seuls  $U$ -irréductibles,
- le treillis  $T$  est  $J$ - $D$  de longueur égale au nombre de ses  $U$ -irréductibles.

#### 4.2. Condition $(\alpha)$ affaiblie pour un treillis fini

Un treillis fini  $T_n$  est dit satisfaire la condition  $(\alpha)$  affaiblie d'ordre  $n$  ou, plus simplement,  $T_n$  est dit  $\alpha$ -affaibli d'ordre  $n$  s'il ne satisfait que les deux premiers points de la définition précédente.

L'intérêt de ces deux définitions provient de ce que de nombreux treillis que nous avons étudiés satisfont l'une ou l'autre de ces deux conditions dont nous verrons qu'elles sont caractéristiques d'une classe assez nombreuse de treillis.

##### **Théorème**

*Tout treillis  $\alpha$ -affaibli d'ordre  $n$  est :*

- sous-treillis d'un treillis  $S$ ,  $(\alpha)$  d'ordre  $n$ ,
- formé de chaînes maximales de  $S$ .

*Réciproquement :*

*Si  $T$  est un treillis  $\alpha$ -affaibli d'ordre  $n$  et si  $a < b$  sont deux éléments dans  $T$ , de hauteur relative  $p$ , tout sous-treillis  $T_p$  de  $T$ , formé de chaînes maximales (dans  $T$ ) de  $[a, b]$  vérifie la condition  $\alpha$ -affaiblie d'ordre  $p$ .*

#### 4.3. Treillis $\alpha$ -affaiblis et extension

##### **Théorème**

*Les treillis  $\alpha$ -affaiblis sont les treillis générables par extensions (latticielles) successives à partir du treillis à un seul élément ; chaque extension étant caténaire et avec minimum.*

##### 4.3.1. Préordre associé à l'extension

Soit  $T_n$  un treillis  $\alpha$ -affaibli. Il peut s'obtenir de différentes façons par extension à partir d'un treillis de longueur  $n - 1$ . Considérons l'union des parties étendues possibles,  $\bigcup E_i$  pour reprendre les mêmes notations que dans le paragraphe 1-8 ci-dessus. Considérons  $T_n - \bigcup E_i$ .

Pour un treillis  $\alpha$ -affaibli,  $T_n = \bigcup E_i$  est facile à déterminer: c'est le sous-treillis convexe dont le maximum est la borne inférieure des co-atomes. A son tour, ce treillis est  $\alpha$ -affaibli puisque sous-treillis à chaînes maximales, d'où pour lui aussi une dernière couche etc... Finalement, c'est tout le treillis  $T_n$  qui se trouve stratifié en diverses « couches ».

EXEMPLE :

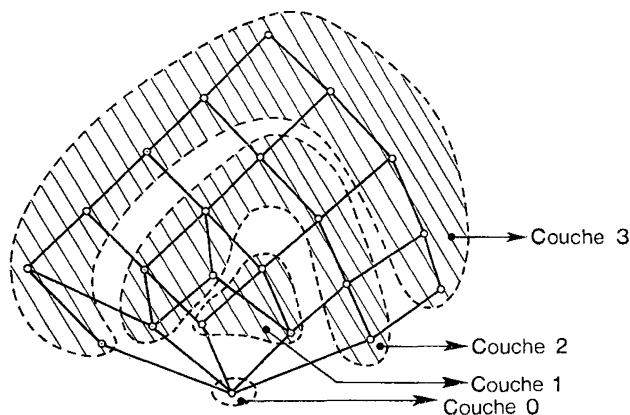


Figure 5

#### 4.3.2. Couche dans un treillis $\alpha$ -affaibli $T$

##### Propriété 1

Chaque couche ne comporte que des  $U$ -irréductibles incomparables deux à deux et contient, avec tout couple d'éléments, leur borne supérieure.

##### Propriété 2

Chaque élément d'une couche ne couvre qu'un élément au plus de la couche inférieure.

##### Propriété 3

Pour chaque couche  $C_i$  ( $i \neq 0$ ).

$[\text{Max}(C_{i-1}), \text{Max}(C_i)]$  est un treillis de Boole

(il y a ainsi entre  $\text{Min}(T)$  et  $\text{Max}(T)$ , une suite de treillis de Boole).

##### Propriété 4

Dans une couche  $C_i$ , il y a autant de co-atomes relativement à  $\text{Max}(C_i)$  qu'il y a d' $U$ -irréductibles dans la couche.

Démonstrations et compléments se trouvent dans :

G. BOULAYE, *Contribution à la théorie des treillis*, Thèse, Grenoble, 1970 (Institut de Mathématiques Appliquées CEDEX 53, 38-Grenoble-Gare), France.