REVUE FRANÇAISE D'INFORMATIQUE ET DE RECHERCHE OPÉRATIONNELLE. SÉRIE ROUGE

MICHEL SAINT-ANDRÉ

Brève communication. Calcul de la moyenne d'une fonction presque-périodique. Application au calcul d'intégrales

Revue française d'informatique et de recherche opérationnelle. Série rouge, tome 4, nº R3 (1970), p. 141-146

<http://www.numdam.org/item?id=M2AN_1970__4_3_141_0>

R.I.R.O.
(4e année, R-3, 1970, p. 141-146)

CALCUL DE LA MOYENNE D'UNE FONCTION PRESQUE-PERIODIQUE APPLICATION AU CALCUL D'INTEGRALES

par Michel SAINT-ANDRÉ

Résumé. — *Pour calculer la moyenne d'une fonction presque-périodique sur* $\mathbf{R}^n$ *au sens de Bohr dont le développement en série de Fourier est normalement convergent, on propose, soit d'utiliser un quadrillage de l'hypercube de* $\mathbf{R}^n$, *soit de calculer la moyenne arithmétique des valeurs de la fonction considérée suivant une direction bien déterminée. Pour cette dernière méthode et dans le cas d'une fonction périodique sur* $\mathbf{R}^n$, *on effectue ainsi un balayage de l'hypercube de* $\mathbf{R}^n$ *suivant des segments de droites parallèles. On applique ensuite ces méthodes au calcul d'intégrales (simples ou multiples) et on donne une majoration de l'erreur.*

Considérons un phénomène physique dépendant d'un ou de plusieurs paramètres $x_1, x_2, \ldots, x_n$ auquel est attachée une fonction h. Supposons que ce phénomène soit « permanent en moyenne » et proposons-nous de calculer la valeur moyenne de la fonction h. En effectuant un changement de variable, on peut toujours transformer la fonction h en une certaine fonction f de même moyenne et définir $M(f)$ par :

$$M(f) = \lim_{T \to +\infty} \frac{1}{(2T)^n} \int_c f(\bar{x})\, d\bar{x} \qquad \text{avec} \qquad c = [-T, T]^n$$

Dans certains cas les procédés expérimentaux permettent de mesurer directement $M(f)$ avec une approximation suffisante, mais on peut aussi procéder de la manière suivante :

On calcule : $S_N = \dfrac{1}{N^n} \displaystyle\sum_{k_1=0}^{N-1} \cdots \sum_{k_n=0}^{N-1} f(k_1\alpha_1, \ldots, k_n\alpha_n)$ pour un certain : $(\alpha_1, \ldots, \bar{\alpha}_n) = \alpha$ appartenant à R^n puis la limite :

$$M_1(f) = \lim_{N \to \infty} S_N \qquad \text{(première méthode)}$$

(1) Département de Mathématiques Appliquées, Clermont-Ferrand, appartient à l'équipe de recherche associée n° 3.

ou encore (deuxième méthode) on calcule : $S'_N = \frac{1}{N} \sum_{k=0}^{N-1} f(k\bar{\alpha})$ pour un certain $\bar{\alpha}$ appartenant à $\mathbf{R}^n$, puis la limite : $M_2(f) = \lim_{N \to \infty} S'_N$.

Le problème se pose donc de savoir si les moyennes $M_1(f)$ et $M_2(f)$ sont égales à la quantité $M(f)$ cherchée et si oui, dans quels cas? C'est-à-dire, pour quels $\bar{\alpha}$ appartenant à $\mathbf{R}^n$ a-t-on l'égalité entre ces moyennes discrètes et la moyenne continue $M(f)$? Nous avons répondu à ces questions dans le cas où f est une fonction presque-périodique au sens de Bohr ayant une série de Fourier normalement convergente dans [4], c'est-à-dire où :

$$f(x_1, ..., x_n) = f(\bar{x}) = c_{\bar{0}} + \sum_{\bar{p} \in S} c_{\bar{p}}\, e^{2i\pi\langle \lambda_{\bar{p}}, \bar{x} \rangle}$$

avec : $\Sigma = \sum_{\bar{p} \in S} |c_{\bar{p}}| < +\infty$.

(M. Mendès-France a envisagé dans [3] le cas monodimensionnel où f est, soit une fonction aléatoire stationnaire du second ordre, soit une fonction presque-périodique, soit une fonction pseudo-aléatoire.)

Cette classe de fonctions comprenant l'importante classe des fonctions continues périodiques sur $\mathbf{R}^n$, il est facile d'appliquer ces méthodes au calcul d'intégrales définies (voir § B).

Nous allons voir que l'erreur I_N d'ordre N commise en appliquant ces méthodes de calcul est dans tous les cas majorée par une quantité de la forme : $\frac{K}{N} + \rho$ où ρ est le reste d'ordre R de la série des modules des coefficients de Fourier de la fonction f (dans le paragraphe C nous donnons une majoration évitant le calcul des coefficients de Fourier).

Ces méthodes donnent donc une meilleure précision que les méthodes de Monte-Carlo utilisant des suites de nombres aléatoires puisque nous savons que dans ce cas l'erreur d'ordre N est en $\frac{1}{\sqrt{N}}$ et que d'autre part le résultat obtenu n'a pas de grande valeur en soi puisqu'il dépend d'un seuil de probabilité accepté à l'avance.

J. Bass et J. P. Bertrandias ont montré dans [1] et [2] qu'il valait mieux utiliser des suites arithmétiques équiréparties que des nombres aléatoires « véritables » et que dans le cas monodimensionnel la suite qui semble donner les meilleurs résultats est la suite : $x_n = \underbrace{An}$ constituée des parties fractionnaires des multiples d'un même nombre réel A (cette suite est équirépartie si A est irrationnel et les meilleurs résultats sont obtenus lorsque A est quadratique).

A. RESULTATS RELATIFS AU CALCUL DE LA MOYENNE D'UNE FONCTION PRESQUE-PERIODIQUE

Soit : $f(\bar{x}) = c_{\bar{0}} + \sum_{\bar{p} \in S} c_{\bar{p}} \, e^{2i\pi\langle \lambda_{\bar{p}}, x \rangle}$ où les vecteurs pseudo-périodes : $\lambda_{\bar{p}} = (\lambda_{p_1}, ..., \lambda_{p_n})$ seront supposés tous différents deux à deux et différents du vecteur nul $\bar{o}$ de $\mathbf{R}^n$.

Théorème 1

- Si f est une fonction presque périodique sur $\mathbf{R}^n$ ayant une série de Fourier normalement convergente.
- Si : $\eta > 0$ avec : $\eta = \underset{r=1,2,...,n}{\operatorname{Min}} (\eta_r)$ et $\eta_r = \underset{\bar{p} \in S;\, \lambda_{p_r} \neq 0}{\operatorname{Inf}} |1 - e^{2i\pi\lambda_{p_r}\alpha_r}|$

Alors : $M_1(f) = c_{\bar{0}} = M(f)$

d'où la technique de calcul :

Pour calculer $M(f)$ il suffit de déterminer $\bar{\alpha}$ appartenant à $\mathbf{R}^n$ tel que η soit strictement positif et de calculer les sommes partielles S_N, puis la limite lorsque N tend vers l'infini.

REMARQUES

1) Si la fonction f considérée est un polynôme trigonométrique généralisé (S fini) il suffit que : $\lambda_{p_r}\alpha_r$ ne soit jamais entier relatif pour tout $\bar{p}$ appartenant à S et pour tout : $r = 1, 2, ..., n$; pour assurer que : $\eta > 0$ et dans ce cas :

$$|I_N| = |M(f) - S_N| \leqslant \frac{K}{N} \qquad \text{avec} \qquad K = \frac{2 \sum_{\bar{r} \in S} |c_{\bar{p}}|}{\eta}$$

Dans le cas général, il suffit de tronquer la série de Fourier de f pour se ramener au cas précédent, pour cela on considère :

$$\mathcal{S} = \{ \bar{p} \in S; \, | \, |\bar{p}| \, | \leqslant R \} \qquad \text{avec} \qquad | \, |\bar{p}| \, | = \underset{j=1,2,...,n}{\operatorname{Max}} (|p_j|)$$

$$\mathfrak{R} = \{ \bar{p} \in S; \, | \, |\bar{p}| \, | \geqslant R + 1 \}$$

et on obtient :

$$|I_N| \leqslant \frac{K}{N} + \rho \qquad \text{où} \qquad \rho = \sum_{p \in \mathcal{S}} |c_{\bar{p}}|$$

et $K = \dfrac{2 \sum_{\bar{p} \in \mathcal{S}} |c_{\bar{p}}|}{\eta}$ avec : $\eta = \underset{r=1,2,...,n}{\operatorname{Min}} (\eta_r)$ et $\eta_r = \underset{\bar{p} \in \mathcal{S};\, \lambda_{p_r} \neq 0}{\operatorname{Min}} |1 - e^{2i\pi\lambda_{p_r}\alpha_r}|$

2) Si tous les $\lambda_{\bar{p}}$ ont au moins q composantes non nulles pour tout $\bar{p}$ appartenant à $\mathcal{S}$, alors :

$$|I_N| \leqslant \frac{K_q}{N^q} + \rho \qquad \text{avec} \qquad K_q = \left(\frac{2}{\eta}\right)^q \sum_{\bar{p}\in\mathcal{S}} |c_{\bar{p}}|$$

Théorème 2

- Si f est une fonction presque-périodique sur $\mathbf{R}^n$ ayant une série de Fourier normalement convergente.
- Si : $\eta' > 0$ avec : $\eta' = \operatorname*{Inf}_{\bar{p}\in S} |1 - e^{2i\pi\langle\lambda_{\bar{p}},\bar{\alpha}\rangle}|$ Alors : $M_2(f) = c_{\bar{0}} = M(f)$

$$\text{et } |I_N| = |M(f) - S'_N| \leqslant \frac{K'}{N} + \rho \qquad \text{avec} \qquad K' = \frac{2\sum_{\bar{p}\in\mathcal{S}} |c_{\bar{p}}|}{\eta'_{\mathcal{S}}}$$

$$\text{et } \eta'_{\mathcal{S}} = \operatorname*{Min}_{\bar{p}\in\mathcal{S}} |1 - e^{2i\pi\langle\lambda_{\bar{p}},\bar{\alpha}\rangle}|$$

B. APPLICATION AU CALCUL D'INTEGRALES DEFINIES

Soit à calculer : $\mathcal{J} = \int_{I^n} f(\bar{x})\, d\bar{x}$ où f est une fonction continue sur $I^n = [0, 1]^n$.

Pour que la fonction F, engendrée par f par périodicité, soit représentable par sa série de Fourier, il est nécessaire que f vérifie le système $(\mathcal{C})$ de conditions :

$$(\mathcal{C}) \begin{cases} f(x_1, \ldots, x_{j-1}, 0, x_{j+1}, \ldots, x_n) = f(x_1, \ldots, x_{j-1}, 1, x_{j+1}, \ldots, x_n) \\ \forall\ (x_1, \ldots, x_{j-1}, x_{j+1}, \ldots, x_n) \in I^{n-1} \qquad \text{pour tout : } j = 1, 2, \ldots, n \end{cases}$$

Ces conditions ne sont pas toujours vérifiées, mais cette hypothèse n'est pas restrictive; en effet, il suffit de transformer la fonction f en une fonction f^* (par symétries) définie par :

$$f^*(x_1, \ldots, x_n) = f(g(x_1), \ldots, g(x_n)) \text{ avec : } g(x) = \begin{cases} 2x \text{ si : } x \in [0, \frac{1}{2}] \\ 2 - 2x \text{ si : } x \in [\frac{1}{2}, 1] \end{cases}$$

et

$$\mathcal{J} = \mathcal{J}^* = \int_{I^n} f^*(\bar{x})\, d\bar{x}.$$

C. MAJORATION DE $\rho = \sum_{\bar{p}\in\mathcal{R}} |c_{\bar{p}}|$ ET DE $\Sigma = \sum_{\bar{p}\in S} |c_{\bar{p}}|$

Si f est une fonction périodique, de période 1 par rapport à chaque variable, admettant une dérivée partielle $n^{\text{ième}}$ mixte $\dfrac{\partial^n f}{\partial x_1 \ldots \partial x_n}$ continue sur I^n, alors la série de Fourier de f est normalement sommable et de somme $f(\bar{x})$. En utilisant les inégalités de Cauchy-Schwartz et de Bessel-Parseval on a :

$$\Sigma \leqslant \sum_{q=1}^{n} 12^{-\frac{1}{2}}\left(\sum_{1 \leqslant j_1 < \ldots < j_q \leqslant n} (C_{j_1,\ldots,j_q})\right)$$

avec :

$$C_{j_1,\ldots,j_q} = \int_{I^n} \left| \frac{\partial^q f(\bar{x})}{\partial x_{j_1} \ldots \partial x_{j_q}} \right|^2 d\bar{x}$$

et $\rho \leqslant \dfrac{K(f)}{\sqrt{R}}$ avec : $K(f) = \dfrac{\sqrt{6}}{\pi} \displaystyle\sum_{q=1}^{n} \left(\frac{q}{12^q}\right)^{1/2} \sum_{1 \leqslant j_1 < \ldots < j_q \leqslant n} (C_{j_1,\ldots,j_q})^{1/2}$

Ces majorations peuvent être considérablement améliorées si la fonction f présente en outre d'autres propriétés de régularité (voir [4], pages 61-63).

D. EXEMPLE : $\mathfrak{J} = \displaystyle\int_0^1 \int_0^1 \int_0^1 \frac{dx\, dy\, dz}{4 + \cos \pi x + \cos \pi y + \cos \pi z}$.

La fonction f ne vérifie pas le système $(\mathfrak{C})$ de conditions du paragraphe B et la fonction f^* est ici définie par :

$$f^*(x, y, z) = \frac{1}{4 + \cos 2\pi x + \cos 2\pi y + \cos 2\pi z} \text{ pour tout } (x, y, z) \in I^3$$

Pour la première méthode de calcul nous prendrons :

$$\bar{\alpha} = \left(\frac{1}{R+1}, \frac{1}{R+1}, \frac{1}{R+1}\right)$$

et ainsi : $\eta > \sin \dfrac{2\pi}{R+1}$ et le calcul de S_N se réduit au calcul de :

$$S_1 = \frac{1}{(R+1)^3} \sum_{k_1=0}^{R} \sum_{k_2=0}^{R} \sum_{k_3=0}^{R} f^*\left(\frac{k_1}{R+1}, \frac{k_2}{R+1}, \frac{k_3}{R+1}\right).$$

Par ailleurs, en utilisant les symétries de la fonction f^* le calcul de S_1 peut être réduit.

Pour la deuxième méthode de calcul, on prendra :

$$\bar{\alpha} = \left(\frac{1}{3R}, \frac{1}{3(R+1)}, \frac{1}{3(R+2)}\right)$$

et *R impair* afin d'assurer la condition : $\eta'_S > \sin \frac{2\pi}{P} > 0$. En prenant pour valeur de N un multiple du p.p.c.m. P de

$$\frac{1}{\alpha_1} = 3R; \frac{1}{\alpha_2} = 3(R+1); \frac{1}{\alpha_3} = 3(R+2); \; (P = 3R(R+1)(R+2)),$$

le calcul de S'_N se réduit au calcul de : $S_2 = \frac{1}{P} \sum_{k=0}^{P-1} f(k\alpha_1, k\alpha_2, k\alpha_3)$ (voir résultats dans [4]).

E. CONCLUSION

Il résulte de l'étude de ces deux méthodes de calcul que les meilleurs résultats sont obtenus par :

— la première méthode si la dimension n est faible ($n = 2, 3, 4$) et si f est une fonction périodique (ou s'il s'agit d'un calcul d'intégrale),

— la deuxième méthode si la dimension n est grande ($n \geqslant 5$) et principalement si f ne présente pas de symétrie.

Dans ce dernier cas, il se pose alors le problème de trouver un algorithme permettant de déterminer le $\bar{\alpha}_0$ optimal (réalisant le maximum de : η'_S).

BIBLIOGRAPHIE

[1] J. Bass, *Nombres aléatoires. Suites arithmétiques. Méthodes de Monte-Carlo* (Publications de l'I.S.U.P., vol. IX, 1960, fasc. 3, p. 289-325).

[2] J. P. Bertrandias, *Calcul d'une intégrale au moyen de la suite : $x_n = \overset{\smile}{An}$. Évaluation de l'erreur* (Publications de l'I.S.U.P., vol. IX, 1960, fasc. 4, p. 335-349).

[3] M. Mendès-France, *Calcul des moyennes des fonctions aléatoires ou pseudo-aléatoires par échantillonnage* (Publications de l'I.S.U.P., vol. XI, 1962, fasc. 3, p. 225-256).

[4] M. Saint-André, « Utilisation de suites équiréparties pour le calcul des intégrales », Thèse de 3e cycle, 10 juillet 1970, département de Mathématiques Appliquées, Clermont-Ferrand.