REVUE FRANÇAISE D'INFORMATIQUE ET DE RECHERCHE OPÉRATIONNELLE. SÉRIE ROUGE

C. BOURRELY
F. DI GUGLIELMO

Traitement sur ordinateur des opérateurs de création et d'annihilation de la théorie quantique des champs

Revue française d'informatique et de recherche opérationnelle. Série rouge, tome 4, n° R1 (1970), p. 81-93

<http://www.numdam.org/item?id=M2AN_1970__4_1_81_0>

R.I.R.O.
(4e année, N° R-1, 1970, p. 81-93)

TRAITEMENT SUR ORDINATEUR DES OPERATEURS DE CREATION ET D'ANNIHILATION DE LA THEORIE QUANTIQUE DES CHAMPS

par C. BOURRELY (1) et F. DI GUGLIELMO (2)

Résumé. — *Le présent travail est consacré à la construction d'algorithmes permettant le traitement sur ordinateur de calculs de commutation pour des polynômes sur un produit tensoriel d'algèbres non commutatives. Un type important d'applications étant l'algèbre des opérateurs de création et d'annihilation de la Théorie Quantique des Champs, ce dernier cas est traité en détail en donnant des exemples de calculs usuels.*

INTRODUCTION

Soit $\mathcal{A}$ une algèbre non commutative sur le corps C des nombres complexes, nous la munissons de l'opération bilinéaire antisymétrique définie par :

$$a, b \in \mathcal{A} \rightarrow [a, b]_- = ab - ba \in \mathcal{A}$$

que nous appelons commutateur.

Nous pouvons alors nous poser pour les polynômes sur $\mathcal{A}$ à plusieurs variables les deux problèmes suivants :

1) Étant donné deux polynômes P et Q sur $\mathcal{A}$, supposons connus les commutateurs de tous les éléments de $\mathcal{A}$ figurant dans P avec tous les éléments de $\mathcal{A}$ figurant dans Q, calculer le commutateur $[P, Q]_- = PQ - QP$ de ces deux polynômes.

2) Les éléments de $\mathcal{A}$ étant supposés répartis en deux classes K_1 et K_2, écrire le polynôme P sous forme ordonnée, c'est-à-dire le mettre sous une forme telle que dans chaque monôme de P tous les éléments appartenant à la classe K_1 se trouvent à gauche de ceux appartenant à la classe K_2.

(1) Centre de Physique Théorique, C.N.R.S., Marseille.
(2) Faculté des Sciences de Marseille Luminy.

Ces deux problèmes se résolvent facilement en utilisant la définition de l'opération commutateur. D'après la bilinéarité, en effet, le problème 1) se ramène au calcul des commutateurs de chaque monôme M de P avec chaque monôme N de Q : si $M = a_1 \dots a_m$ et $N = b_1 \dots b_n$ on a :

$$[M, N]_- = a_1 \dots a_m b_1 \dots b_n - b_1 \dots b_n a_1 \dots a_m$$

il suffit donc de faire passer par permutations successives dans $a_1 \dots a_m b_1 \dots b_n$ chacun des éléments $b_1 \dots b_n$ à gauche des $a_1 \dots a_m$, le résultat est un polynôme en les a_i, b_j, $c_{ij} = [a_i, b_j]_-$.

Pour le problème 2) on amènera de même par commutations successives dans chaque monôme de P les éléments appartenant à la classe K_1 à se trouver à gauche de ceux appartenant à la classe K_2.

La résolution de ces problèmes ne présente donc aucune difficulté de principe, cependant des difficultés apparaissent lorsque le nombre des éléments de chaque polynôme croît : en effet le nombre des résultats intermédiaires à conserver après chaque commutation augmente, et les risques d'erreurs ainsi que la longueur des opérations rendent le calcul à la main incertain sinon impossible; c'est pourquoi il a paru intéressant de se poser le problème de l'adaptation de ces calculs sur un ordinateur à l'aide de représentations numériques appropriées.

De tels problèmes se présentent en effet fréquemment en mécanique quantique et plus particulièrement en théorie quantique des champs; on sait que cette théorie associe à chaque type de particules élémentaires d'impulsion, de spin, et d'isospin spécifiés, des opérateurs de champ opérant dans un certain espace vectoriel dit espace de Fock [lequel peut d'ailleurs être engendré par application répétée de ces opérateurs sur un certain vecteur cyclique dit vide mathématique (cf. [1])]. Pour chaque type de particules ces opérateurs qui se répartissent en opérateurs de création et d'annihilation forment une algèbre dite algèbre des opérateurs de champ, d'autre part ils vérifient des relations de commutation ou d'anticommutation suivant que les particules correspondantes obéissent à la statistique de Bose ou à celle de Fermi. On est ainsi conduit pour un système de particules élémentaires à un produit tensoriel d'algèbres d'opérateurs sur l'espace de Fock, chaque algèbre étant divisée en deux classes, les créateurs et les annihilateurs.

1. METHODES UTILISEES ET PROBLEMES TRAITES

1.1. Principe des représentations numériques utilisées pour les polynômes sur un produit tensoriel d'algèbres

Nous considérons p algèbres $\mathcal{A}_1^-, \dots \mathcal{A}_p^-$ munies chacune d'une opération commutateur définie par :

$$a_i, b_i \in \mathcal{A}_i^- \rightarrow [a_i, b_i]_- = a_i b_i - b_i a_i \in \mathcal{A}_i^- \qquad i = 1, 2, \dots p$$

et q algèbres $\mathcal{A}^+_{p+1}, \dots \mathcal{A}^+_{p+q}$ munies chacune d'une opération anticommutateur définie par :

$$a_{p+j}, b_{p+j} \in \mathcal{A}^+_{p+j} \to [a_{p+j}, b_{p+j}]_+ = a_{p+j}b_{p+j} + b_{p+j}a_{p+j} \in \mathcal{A}^+_{p+j} \qquad j = 1, 2, \dots q$$

on peut alors étendre au produit tensoriel

$$\mathcal{A} = \mathcal{A}^-_1 \otimes \dots \otimes \mathcal{A}^-_p \otimes \mathcal{A}^+_{p+1} \otimes \dots \otimes \mathcal{A}^+_{p+q}$$

la définition des opérations commutateur et anticommutateur; en effet si l'on munit ce produit de la structure d'algèbre définie par :

$$(a_1 \otimes \dots \otimes a_{p+q})(b_1 \otimes \dots \otimes b_{p+q}) = a_1b_1 \otimes \dots \otimes a_{p+q}b_{p+q}$$

pour $a_i, b_i \in \mathcal{A}^-_i \qquad i = 1, 2, \dots p$

$$a_{p+j}, b_{p+j} \in \mathcal{A}^+_{p+j} \qquad j = 1, 2, \dots q$$

on peut alors définir :

$$[a_1 \otimes \dots \otimes a_{p+q}, b_1 \otimes \dots \otimes b_{p+q}]_\pm = (a_1 \otimes \dots \otimes a_{p+q})(b_1 \otimes \dots \otimes b_{p+q}) \pm (b_1 \otimes \dots \otimes b_{p+q})(a_1 \otimes \dots \otimes a_{p+q})$$

Si nous supposons de plus $\mathcal{A}^-_i \quad i = 1, 2, \dots p$ et $\mathcal{A}^+_{p+j} \quad j = 1, 2, \dots q$ munis respectivement des éléments unité e^-_i et e^+_{p+j} et si nous identifions $\mathcal{A}^-_i$ avec $e^-_1 \otimes \dots \otimes \mathcal{A}^-_i \otimes \dots \otimes e^-_p \otimes e^+_{p+1} \otimes \dots \otimes e^+_{p+q}$ et $\mathcal{A}^+_{p+j}$ avec

$$e^-_1 \otimes \dots \otimes e^-_p \otimes e^+_{p+1} \dots \otimes \mathcal{A}^+_{p+j} \otimes \dots \otimes e^+_{p+q},$$

alors nous pouvons dire que les éléments de $\mathcal{A}^-_i$ et $\mathcal{A}^+_{p+j}$ commutent car quels que soient $a_i \in \mathcal{A}^-_i$ et $a_{p+j} \in \mathcal{A}^+_{p+j}$ le commutateur :

$$[e^-_1 \otimes \dots \otimes a_i \otimes \dots \otimes e^-_p \otimes \dots \otimes e^+_{p+q}, e^-_1 \otimes \dots \otimes e^-_p \otimes e^+_{p+1} \otimes \dots \otimes a_{p+j} \otimes \dots \otimes e^+_{p+q}]$$

est nul d'après la définition précédente.

D'autre part il est clair que, pour la même raison, les éléments de $\mathcal{A}^+_i$ commutent avec ceux de $\mathcal{A}^+_j$ et ceux de $\mathcal{A}^-_i$ avec ceux de $\mathcal{A}^-_j$ pour $j \neq i$. Cette remarque permet d'écrire un monôme M quelconque sur le produit tensoriel $\mathcal{A}$:

$$M = (a_1 \otimes \dots \otimes a_{p+q})(b_1 \otimes \dots \otimes b_{p+q}) \dots (l_1 \otimes \dots \otimes l_{p+q})$$

sous la forme :

$$M = a_1 \dots a_{p+q}b_1 \dots b_{p+q} \dots l_1 \dots l_{p+q}$$

où l'on a supprimé les signes de produit tensoriel et où pour chaque i l'ordre des éléments $a_i, b_i, \dots, l_i$ appartenant à une même algèbre $\mathcal{A}^\pm_i$ importe seul puisque des éléments appartenant à des algèbres différentes commutent toujours.

Définissant enfin sur $\mathcal{A}_i^{\pm}$ une décomposition en deux classes :

$$\mathcal{A}_i^{\pm} = K_{1,i}^{\pm} \cup K_{2,i}^{\pm} \qquad i = 1, \dots p + q$$

on peut comme plus haut se poser pour le produit tensoriel $\mathcal{A}$ les problèmes 1) et 2); ces problèmes se résolvent encore par permutations successives d'éléments consécutifs. Pour le problème 2) il faut ranger les éléments appartenant à $K_{1,i}^{\pm}$ à gauche de ceux appartenant à $K_{2,j}^{\pm}$.

Des polynômes sur $\mathcal{A}$ étant donnés il nous faut pour pouvoir programmer des opérations de commutation sur ces polynômes, définir d'abord pour les éléments des algèbres $\mathcal{A}_i$ des représentations numériques qui puissent être traitées par un ordinateur. Or on voit qu'un élément appartenant à l'un des $\mathcal{A}_i$ peut être repéré par deux indices (i, j) : le premier i, repérant l'algèbre à laquelle il appartient, le second j, repérant l'élément considéré à l'intérieur de cette algèbre (on affecte naturellement des ensembles d'indices différents aux éléments appartenant à la classe $K_{1,i}$ et à ceux appartenant à la classe $K_{2,i}$).

A chaque monôme $M = a_1 \dots a_m$ sur $\mathcal{A}$ on peut donc associer une suite de couples d'entiers $(i_1, j_1) \dots (i_m, j_m)$ ceux-ci étant rangés dans l'ordre des $a_1 \dots a_m$. Supposons qu'on veuille commuter deux éléments a_r et a_{r+1} du monôme M, on échangera les couples correspondants (i_r, j_r) et (i_{r+1}, j_{r+1}), d'autre part on saura d'après les indices i_r et i_{r+1} si ces éléments appartiennent à des algèbres différentes ou non, et si leur (anti-) commutateur est différent de zéro; dans ce dernier cas on adjoindra à la première suite une nouvelle suite contenant les mêmes couples que la première sauf ceux correspondant aux éléments commutés qui seront remplacés par un couple correspondant à la valeur du (anti-) commutateur (supposé non nul). A la fin des opérations de commutation on aura donc une suite de couples qu'il suffira ensuite d'interpréter à l'aide des conventions ci-dessus pour retrouver l'expression du commutateur.

On voit donc que le procédé actuel se prête bien à la transcription dans un langage de programmation symbolique des opérations de commutation, la représentation des éléments par des tableaux entiers ramenant ces commutations à des comparaisons et des transferts portant sur des nombres entiers.

1.2. Application à certains calculs de la théorie quantique des champs

Nous examinons maintenant dans ce qui suit les problèmes particuliers qui se posent dans le cadre de la théorie quantique des champs et nous décrivons de façon plus détaillée les représentations et les algorithmes utilisés. Nous rappelons d'abord les notations usuelles en théorie quantique des champs (cf. [1]) et nous donnons les principales relations entre les opérateurs de champ. Nous désignons par $A_\alpha(k)$ l'opérateur d'annihilation d'un certain type de particules dans l'état d'impulsion k et de spin-isospin α et par $A_{\alpha'}^*(k')$ l'opérateur de création du même type de particules avec l'impulsion k' et l'indice de spin-isospin α'; ces opérateurs vérifient les relations de commutation ou d'anti-communications suivantes :

$$\begin{aligned}[][A_\alpha(k), A^*_{\alpha'}(k')]_\pm &= \delta_{\alpha\alpha'}\delta(k-k')I \\ [A_\alpha(k), A_{\alpha'}(k')]_\pm &= [A^*_\alpha(k), A^*_{\alpha'}(k')]_\pm = 0\end{aligned} \tag{1.2.1}$$

où $\delta_{\alpha\alpha'}$ désigne le symbole de Kronecker pour les indices α et α', $\delta(k-k')$ la mesure de Dirac concentrée à l'origine pour la variable $k-k'$, et I l'opérateur identité; d'autre part le signe $+$ correspond aux fermions, le signe $-$ aux bosons.

Un opérateur de création appliqué au vide mathématique noté $|\,0>$ donne le vecteur d'état d'une particule d'impulsion k et de spin isospin α

$$A^*_\alpha(k)\,|0> \; = \; |\,\alpha, k> \tag{1.2.2}$$

tandis qu'un opérateur d'annihilation appliqué au vide donne le vecteur nul.

$$A_\alpha(k)\,|\,0> \; = 0 \tag{1.2.3}$$

Soient des polynômes en les opérateurs de création et d'annihilation de plusieurs types de particules, nous nous proposons de construire des représentations numériques des opérateurs de création et d'annihilation ainsi que des « multiples » $\delta_{\alpha\alpha'}\delta(k-k')I$ de l'opérateur identité afin de définir des algorithmes permettant le traitement sur ordinateur de calculs de commutation entre ces polynômes.

2. REPRESENTATIONS DE PRODUITS TENSORIELS D'OPERATEURS DE CHAMP

2.1. Structure d'un bloc

Dans les calculs sur les opérateurs de champ on est amené à considérer des monômes de la forme :

$$f(k_1)\dots f(k_r)0(k'_1)\dots 0(k'_s)\delta(k''_{i1}, k''_{j1})\dots\delta(k''_{it}, k''_{jt}) \tag{2.1.1}$$

qui comportent un produit de fonctions d'impulsion $f(k_1)\dots f(k_r)$, un produit d'opérateurs de champ $0(k)$ contenant lui-même plusieurs types d'opérateurs (boson ou fermion, créateur ou annihilateur d'un certain type de particules), et un produit de symboles δ qui représentent soit une distribution de Dirac ayant pour argument une différence de deux impulsions, soit le symbole de Kronecker dont les indices représentent le spin et l'isospin.

Un tel monôme sera désigné en vue de sa représentation numérique sous le nom de *bloc*. (On peut par exemple représenter un bloc par un tableau à deux dimensions, cf. [2].)

Un bloc sera constitué par les éléments suivants; une partie appelée *caractéristique* contenant des informations sur la composition du bloc, et qui comprend :

le nombre total d'éléments du bloc (désigné dans la suite par Q), le nombre de fonctions d'impulsion f (désigné par R), le nombre d'opérateurs (S), de fonctions δ (T), le signe (U) du monôme représenté par le bloc, et un index (W) qui dans le bloc issu de la multiplication de deux blocs repère la position de la partie opérateur du premier bloc par rapport à la partie opérateur du second.

On trouvera ensuite :

— les fonctions $f(k)$ repérées par un simple numéro entier correspondant à l'indice de leur variable d'impulsion-spin-isospin;

— les opérateurs $0(k)$ représentés par un couple de deux entiers dont le premier indique la nature de l'opérateur et le second correspond à l'indice de la variable impulsion-spin-isospin;

— les symboles δ également représentés par un couple d'entiers correspondant aux numéros des variables qui figuraient dans les deux opérateurs au moment de la commutation.

Une somme de termes du type (2.1.1) constitue un polynôme qui est représenté par un ensemble de blocs consécutifs.

2.2. Distinction entre les différents types d'opérateurs de champ

Nous envisageons le cas d'un système comprenant N fermions et M bosons. A une particule de type j ($1 \leqslant j \leqslant N$ ou $1 \leqslant j \leqslant M$) nous associons deux nombres entiers positifs, l'un de ces nombres C_j sera affecté au créateur de la particule j, l'autre A_j à l'annihilateur.

Connaissant les nombres N et M nous allons choisir pour chaque type de particules les nombres C_j et A_j de façon que dans la représentation par couples d'entiers (§ 2.1), l'on puisse distinguer les divers types d'opérateurs en cours de calcul (§. 3.2).

Cas des fermions

Soit n_0 le premier nombre que l'on veut affecter aux opérateurs des fermions.

La représentation numérique sera définie par les formules :

$$\begin{aligned} C_j^F &= n_0 + j - 1 \\ A_j^F &= n_0 + N + j - 1 \end{aligned} \qquad 1 \leqslant j \leqslant N$$

d'où les propriétés :

$$A_j^F - C_j^F = N$$

$$A_N^F - C_1^F = 2N - 1$$

on posera

$$F = 2N - 1$$

Cas des bosons

La représentation numérique des opérateurs de bosons sera construite à partir des formules suivantes :

$$\begin{aligned} C_j^B &= n_0 + 4N + j - 1 \\ A_j^B &= n_0 + 6N + M + j - 2 \end{aligned} \qquad 1 \leqslant j \leqslant M$$

d'où les propriétés :

$$A_j^B - C_j^B = 2N + M - 1$$
$$A_M^B - C_1^B = 2(N + M - 1)$$

on posera

$$B = 2N + M - 1$$

D'après les relations précédentes on peut en déduire les inégalités suivantes qui nous permettront de construire des tests pour distinguer les divers types de particules :

$$A_j^F - C_j^F \leqslant A_N^F - C_1^F < A_i^B - C_i^B \leqslant A_M^B - C_1^B \quad \forall\, i, j \qquad \begin{array}{c} 1 \leqslant i \leqslant M \\ \\ 1 \leqslant j \leqslant N \end{array}$$

EXEMPLE

Considérons une interaction entre des nucléons, des antinucléons et des mésons π, dans ce cas $N = 2$, $M = 1$, et soit $n_0 = 1$, d'où la représentation numérique des opérateurs associés à ces particules (nous désignerons par i l'indice d'impulsion spin-isospin de la particule [2]) :

		SYMBOLE DE LA THÉORIE DES CHAMPS	REPRÉSENTATION NUMÉRIQUE
		—	—
Nucléon	Créateur	b_i^*	$(2, i)$
	Annihilateur	b_i	$(4, i)$
Antinucléon	Créateur	d_i^*	$(1, i)$
	Annihilateur	d_i	$(3, i)$
Méson π	Créateur	a_i^*	$(9, i)$
	Annihilateur	a_i	$(13, i)$

3. ALGORITHMES DES OPERATIONS FONDAMENTALES

Nous groupons dans ce paragraphe la description des opérations les plus importantes qui seront utilisées dans les calculs.

3.1. Multiplication de deux blocs

Le calcul du commutateur de deux polynômes nécessite le calcul de tous les commutateurs de chaque monôme du premier polynôme avec tous les monômes du second, chacune de ces opérations nécessite la formation du produit des deux monômes considérés, c'est-à-dire dans la représentation utilisée la multiplication des deux blocs qui leur correspondent.

Analyse du processus

Considérons la multiplication d'un bloc B_1 par un bloc B_2, et soit $B_3 = B_1 \times B_2$ le bloc produit.

a) Calcul de la caractéristique de B_3.

Soient $Q_1, R_1, S_1, T_1, U_1, W_1$ les éléments de la caractéristique de B_1; $Q_2, R_2, S_2, T_2, U_2, W_2$ les éléments de la caractéristique de B_2, alors les éléments de la caractéristique de B_3 se calculent par les règles suivantes :

$$\begin{aligned} R_3 &= R_1 + R_2 \\ S_3 &= S_1 + S_2 \\ T_3 &= T_1 + T_2 \\ U_3 &= U_1 \times U_2 \\ W_3 &= W_1 \\ Q_3 &= R_3 + S_3 + T_3 \end{aligned}$$

b) Introduire dans le bloc produit B_3 les fonctions de B_1, B_2, les opérateurs de B_1 et B_2 (en tenant compte de l'ordre des opérateurs), et les fonctions δ de B_1 et B_2.

On constate que le bloc B_3 obtenu par les règles ci-dessus a bien la même structure que les blocs facteurs.

3.2. Commutation de deux opérateurs dans un bloc

Nous rappelons les règles de (anti-) commutation satisfaites par les opérateurs de champ dans le cas des fermions et des bosons.

Fermions

$$[b_k, b^*_{k'}]_+ = b_k b^*_{k'} + b^*_{k'} b_k = \delta(k - k')$$

tous les autres anticommutateurs sont nuls. Il en résulte que l'anticommutateur de deux opérateurs de fermions introduit toujours un signe — dans le bloc initial.

Bosons

$$[a_k, a^*_{k'}]_- = a_k a^*_{k'} - a^*_{k'} a_k = \delta(k - k')$$

tous les autres commutateurs sont nuls.

Cette dernière relation pouvant s'écrire aussi :

$$a_k a_{k'}^* = a_{k'}^* a_k + \delta(k - k')$$

$$a_{k'}^* a_k = a_k a_{k'}^* - \delta(k - k')$$

On voit que le signe de $\delta(k - k')$ peut être soit $+$ soit $-$, il résulte que le bloc initial ne change pas de signe et que seul le bloc issu de la commutation peut avoir un signe variable suivant les cas.

Signalons enfin que bosons et fermions commutent toujours.

Tests sur la commutation de deux opérateurs O_1 et O_2, désignons par n_1 et n_2 les nombres qui caractérisent le type de ces opérateurs et posons $D = n_1 - n_2$. Nous allons montrer qu'il est possible grâce à la représentation numérique des opérateurs (§ 2.2) d'établir des tests en vue de distinguer tous les cas possibles de commutation ou d'anticommutation suivant les règles énoncées précédemment; ces tests sont représentés dans le tableau **I**.

Analyse de l'opération commutation dans un bloc

Considérons la commutation de deux opérateurs dans le bloc initial; commuter deux opérateurs appartenant à ce bloc revient à le transformer en un nouveau bloc dans lequel deux opérateurs ont été permutés suivant les règles ci-dessus et sans changer l'ordre des autres opérateurs; il faut de plus, si le (anti-) commutateur n'est pas nul former un nouveau bloc qui contiendra les mêmes éléments que ceux du bloc initial à l'exception des deux opérateurs commutés, et en plus la fonction δ issue de la commutation. Les opérations à effectuer sont donc les suivantes :

a) Permutation dans le bloc initial des deux opérateurs considérés.

b) Tests sur le (anti-) commutateur (voir tableau I).

S'il est nul il y a seulement changement de signe pour le bloc initial si l'on anticommute des fermions, dans le cas contraire, il faut (après changement de signe dans le cas des fermions et éventuellement dans le cas des bosons) former le nouveau bloc issu de la commutation.

c) La caractéristique du nouveau bloc, Q', R', S', T', U', W', est donnée à partir de la caractéristique Q, R, T, U, W, S, du bloc initial par :

$$\begin{aligned} Q' &= Q - 1 \\ R' &= R \\ S' &= S - 2 \\ T' &= T + 1 \\ U' &= U^* \\ W' &= W \end{aligned}$$

$D > 0$

$$\mathrm{Sgn}\,(D - F) = \begin{cases} + \begin{cases} \text{2 bosons} \\ \text{boson-fermion} \longrightarrow \mathrm{Sgn}\,(D - B) = \begin{cases} + \begin{cases} \text{boson-fermion} \\ \text{2 bosons de type différent} \end{cases} \\ 0 \quad \text{2 bosons de même type} \longrightarrow \delta \\ - \begin{cases} \text{2 bosons de type différent} \\ \text{fermion-boson} \end{cases} \end{cases} \end{cases} \\ \left.\begin{matrix} 0 \\ - \end{matrix}\right\} \text{2 fermions} \xrightarrow{\text{C. Sgn}} \mathrm{Sgn}\,(D - N) \end{cases}$$

$$\left.\begin{matrix} \mathrm{Sgn}\,(D - N) \\ \mathrm{Sgn}\,(D + N) \end{matrix}\right\} = \begin{cases} + \quad \text{2 fermions de type différent} \\ 0 \quad \text{2 fermions de même type} \longrightarrow \delta \\ - \quad \text{2 fermions de type différent} \end{cases}$$

$D < 0$

$$\mathrm{Sgn}\,(D + F) = \begin{cases} \left.\begin{matrix} + \\ 0 \end{matrix}\right\} \text{2 fermions} \xrightarrow{\text{C. Sgn}} \mathrm{Sgn}\,(D + N) \\ - \begin{cases} \text{2 bosons} \\ \text{fermion-boson} \longrightarrow \mathrm{Sgn}\,(D + B) = \begin{cases} + \begin{cases} \text{2 bosons de type différent} \\ \text{boson-fermion} \end{cases} \\ 0 \quad \text{2 bosons de même type} \xrightarrow{\text{C. Sgn}} \delta \\ - \begin{cases} \text{boson-fermion} \\ \text{2 bosons de type différent} \end{cases} \end{cases} \end{cases} \end{cases}$$

$D = 0$

$$\mathrm{Sgn}\,(n_1 - n_0 - F) = \begin{cases} + \quad \text{2 bosons de type différent} \\ \left.\begin{matrix} 0 \\ - \end{matrix}\right\} \text{2 fermions de type différent} \longrightarrow \text{C. Sgn} \end{cases}$$

TABLEAU I. — *Tests sur la commutation de deux opérateurs*

(Les quantités F et B ont été définies en 2.2., Sgn désigne le signe d'une expression, C.Sgn indiquera un changement de signe dans le bloc, δ désignera l'introduction d'une fonction δ dans le bloc issu de la commutation.)

U^* est défini de la façon suivante : dans le cas des fermions $U^* = U$, dans le cas des bosons $U^* = U$ si l'on avait la configuration aa^*, et $U^* = -U$ si l'on avait la configuration a^*a.

d) Transfert des fonctions du bloc initial dans le bloc intermédiaire, transfert des opérateurs (à l'exception de ceux commutés), et des fonctions δ, avec une fonction δ supplémentaire provenant de la commutation. Ces opérations étant effectuées, on a ainsi constitué un nouveau bloc de même structure que les précédents.

Nous envisageons maintenant quelques exemples d'applications des algorithmes que nous venons d'exposer.

4.1. Calcul des relations de commutation entre les polynômes

Le problème consiste à calculer le commutateur $[P, Q]_- = PQ - QP$ de deux polynômes P et Q formés de monômes du type (2.1.1) ou plus généralement à calculer le commutateur multiple de plusieurs polynômes de ce type soit $[P, [Q, [R, O]]]$.

Prenons un exemple d'application à la physique.

Soient S et O deux polynômes sur l'algèbre des opérateurs de création et d'annihilation, et considérons la transformation suivante

$$O' = e^{iS} O e^{-iS}$$

on montre que l'on a le développement :

$$O' = O + i[S, O]_- + \frac{(i)^2}{2!}[S, [S, O]]_- + \ldots \frac{(i)^n}{n!}[S, \ldots [S, O] \ldots]_- + \ldots$$

On voit sur cette formule que le calcul de O' peut se faire à un ordre d'approximation donné n, il suffit pour cela de calculer tous les commutateurs itérés de O avec S jusqu'à l'ordre n (1).

4.2. Calcul des éléments de matrice des opérateurs dans l'espace de Fock

On se donne un certain monôme M et deux états représentés l'un par un vecteur $| A \rangle$ de l'espace de Fock, l'autre par un covecteur $\langle B |$ (cet espace pouvant être identifié avec son dual); l'élément de matrice M entre les états A et B est défini par $\langle B | M | A \rangle$, on montre [1] que le calcul de cet élément de matrice se ramène au calcul de l'élément de matrice d'un certain monôme M' entre deux états de vide

$$\langle B | M | A \rangle = \langle O | M' | O \rangle$$

les états A et B étant en effet eux-mêmes obtenus par application sur les états de vide $| O \rangle$ et $\langle O |$ d'opérateurs de création et d'annihilation. Le calcul

(1) Ce problème a été programmé en Fortran IV sur Univac 1108 [2].

de $\langle B\,|M|\,A\rangle$ revient donc à ordonner le monôme M', c'est-à-dire à commuter créateurs et annihilateurs de façon à amener tous les annihilateurs à gauche des créateurs.

A l'opposé de ce qui avait lieu pour le calcul du commutateur de deux monômes, on n'est plus obligé ici de conserver en mémoire tous les termes issus d'une commutation de deux opérateurs : en effet tous ceux contenant le plus à gauche un opérateur de création ou le plus à droite un opérateur d'annihilation s'appliquant directement sur le vide sont nuls à cause de la relation (1.2.3).

4.3. Produits ordonnés

Étant donné un produit d'opérateurs de création et d'annihilation de plusieurs types de particules, ordonner ce produit consiste à l'exprimer de manière telle que les opérateurs de création soient rangés à gauche des opérateurs d'annihilation. Par exemple :

$$\overbrace{\text{boson-fermion-antifermion}}^{\text{créateur}} \text{ — } \overbrace{\text{antifermion-fermion-boson}}^{\text{annihilateur}}$$

Un avantage du produit ordonné tient au fait que sa valeur moyenne dans le vide est nulle.

D'après la méthode que nous venons d'exposer nous savons commuter et distinguer les opérateurs entre eux, il en résulte que le schéma des opérations pour ordonner un produit consiste à rechercher successivement les divers types d'opérateur et à les ranger dans l'ordre que l'on s'est fixé en utilisant les relations de (anti-) commutation [2].

CONCLUSION

Le présent travail nous a permis de montrer qu'il est possible par l'utilisation d'une représentation numérique simple des opérateurs de création et d'annihilation de la théorie quantique des champs de programmer, et de faire effectuer par un ordinateur les principaux types de calculs sur les opérateurs de champ que l'on rencontre dans cette théorie. L'intérêt de ce travail est donc de permettre l'application à des calculs très longs à effectuer à la main les possibilités d'un ordinateur au point de vue vitesse de calcul et risque d'erreur pratiquement nul [3]. Signalons enfin que les méthodes utilisées ici pour l'algèbre des créateurs et annihilateurs s'étendent facilement à d'autres cas, par exemple celui de l'algèbre de Clifford des opérateurs linéaires $\gamma(\bar{x})$ agissant sur l'espace $S(M)$ des spineurs sur l'espace de Minkowski M [cf. [4] pour le calcul de traces de produits de $\gamma(x)$].

REMERCIEMENTS

Nous remercions MM. les Professeurs J. Kuntzmann et A. Visconti pour l'intérêt qu'ils ont manifesté et les conseils qu'ils ont bien voulu nous donner.

L'un des auteurs (C. Bourrely) remercie le Centre National de la Recherche Scientifique de son aide financière.

BIBLIOGRAPHIE

[1] Nous ne citerons ici que quelques ouvrages fondamentaux.
S. Schweber, *An Introduction to Relativistic Quantum Field Theory*, Row-Peterson and Co. (1961).
D. Kastler, *Introduction à l'léectrodynamique quantique*, Dunod (1961).
A. Visconti, *Théorie quantique des champs*, Gauthier-Villars (1961).

[2] C. Bourrely et F. Di Guglielmo, (prétirage 67/P. 202), juillet 1967.

[3] C. Bourrely et R. Andriambololona, *Nuovo Cimento*, *58* A, 205 et 909 (1968).

[4] C. Bourrely (prétirage 68/P. 202), janvier 1968.