Revue française d'informatique et de recherche opérationnelle. Série rouge

J. P. Steen

# Principe d'un algorithme de recherche d'un isomorphisme entre deux graphes

*Revue française d'informatique et de recherche opérationnelle. Série rouge*, tome 3, n° R3 (1969), p. 51-69

<http://www.numdam.org/item?id=M2AN_1969__3_3_51_0>

R.I.R.O.
(3e année, Nº R-3, 1969, p. 51-69)

# PRINCIPE D'UN ALGORITHME DE RECHERCHE D'UN ISOMORPHISME ENTRE DEUX GRAPHES

par J. P. STEEN

Laboratoire de Calcul, Faculté des Sciences de Lille.

Résumé. — *Étude des correspondances biunivoques entre les éléments d'ensembles structurés et partitionnés munis de groupes de permutations.*

*Pour justifier un algorithme de recherche d'un isomorphisme entre deux graphes l'auteur propose un modèle mathématique faisant intervenir les correspondances biunivoques entre des ensembles finis de mêmes cardinaux, structurés par des fonctions l (fonctions successeurs des graphes). Sur ces ensembles il construit des partitions de plus en plus fines, et entre les classes des partitions de deux ensembles, des correspondances biunivoques qui permettent d'obtenir celles cherchées entre les éléments de ces ensembles. Dans ce but, il rappelle des propriétés des partitions et des groupes de permutations d'ensembles partitionnés. Il donne un théorème relatif à la finesse de partitions d'un ensemble structuré muni d'un groupe de permutations. L'algorithme succinctement décrit dans la dernière partie illustre le modèle mathématique.*

## 1. INTRODUCTION

Le but de cet article est de décrire le principe d'un algorithme de recherche d'un isomorphisme entre deux graphes, algorithme qui permet de résoudre le problème de l'identification des graphes construits par une méthode mécanique. Cet algorithme a été étudié en détail dans une thèse de troisième cycle présentée par l'auteur [6] au Laboratoire de Calcul de la Faculté des Sciences de Lille. Les algorithmes de Unger [7] et de Duijvestijn [3] lui étant semblables, il est apparu intéressant de construire un modèle mathématique qui leur soit commun.

Comme les « Nodal Functions » de [7] les « Weights » de [3] les « fonctions intrinsèques » de la thèse [6] ne servent qu'à séparer les sommets des graphes, il nous a semblé que les partitions les représenteraient avantageusement. L'opération « Extending » de [7], le calcul des « Scores » de (3) et la « méthode des deux fonctions » de (6) se sont alors traduites par l'opération $q = p \wedge l$ décrite en 4.1.1.

Dans ces trois algorithmes les mêmes phénomènes de « blocage » se présentent au cours de l'application, et des méthodes semblables permettent de résoudre ces difficultés. L'auteur a étudié ces phénomènes dans sa thèse, les a expliqués et donne dans cet article une justification mathématique par un théorème en 4.1.1., qui fait intervenir les groupes d'automorphismes des graphes étudiés. Aussi un paragraphe a-t-il été consacré aux groupes de permutations d'ensembles partitionnés.

# I. MODELE MATHEMATIQUE

Correspondances biunivoques entre les éléments d'ensembles structurés et partitionnés munis de groupes de permutations.

## 2. PARTITIONS

### 2.1. Partitions sur un ensemble

#### 2.1.1. Définitions

Soit $X$ un ensemble fini de $n$ objets. On posera $n = \text{card}\,(X) = |X|$.

*Une partition de $X$* est un sous-ensemble de l'ensemble $\mathcal{P}(X)$ des parties de $X$ tel que ces parties soient ou la partie vide, ou des parties disjointes et que, ensemble, elles recouvrent tout $X$, c'est-à-dire ou $\varnothing \in p$ ou

$$A1, A2 \in p, \quad \text{on a} \quad A1 = A2 \quad \text{ou} \quad A1 \cap A2 = \varnothing$$
$$x \in X, A \in p \quad \text{tel que} \quad x \in A.$$

Les éléments $A \in p$, qui sont des parties de $X$, sont *les classes* de la partition $p$.

A une partition $p$ de $X$ est associée une relation d'équivalence sur $X$, et vice versa. Deux *objets* $x$ et $y$ d'une même classe de $p$ sont dits *p-équivalents*. On écrit $x \underset{p}{\sim} y$.

#### 2.1.2. Types de partitions

Deux *partitions* $p$ et $q$ sont de même type si elles ont le même nombre de classes de même cardinal. Dans cette définition il n'est pas nécessaire que ce soient des partitions d'un même ensemble.

On peut caractériser le type d'une partition $p$ par sa *signature*. C'est une fonction $t_p : N \to N$ qui à chaque nombre $a$ associe le nombre $c$ éventuellement nul, des classes admettant ce nombre pour cardinal.

On la représente souvent par la suite des nombres $a$, indicés en puissance par $c$, pour $c$ non nul.

EXEMPLE : dans $X = \{1, 2, 3, 4, 5\}$ la partition $p = \{1\}\{2\}\{3, 4, 5\}$ a pour signature $t_p = 1^2 3^1$.

Si deux partitions $p$ et $q$ sont équivalentes les partitions $p'$ et $q'$, obtenues en faisant dans chacune d'elles la réunion des classes de même cardinal, sont aussi équivalentes.

### 2.1.3. Comparaison de partitions d'un ensemble

On dira que $p$ est une partition de $X$ *plus fine* que la partition $q$ de $X$ si toute classe de $p$ est contenue entièrement dans une classe de $q$. Il en résulte que la partition $p$ a au moins autant de classes que la partition $q$. L'ensemble $p$ des partitions de $X$ est ainsi muni d'une relation d'ordre.

On dira que $p$ est une partition de $X$ *strictement plus fine* que la partition de $X$ si $p$ est plus fine que $q$ et si elle a plus de classes que $q$. Il existe alors une classe de $q$ qui contient au moins deux classes de $p$.

Exemple : dans $X = \{ 1, 2, 3, 4, \}$, $p = \{ 1 \} \{ 2 \} \{ 3, 4 \}$ est strictement plus fine que $q = \{ 1, 2 \} \{ 3, 4 \}$.

### 2.1.4. Opérations sur les partitions d'un même ensemble

La relation « plus fine » qui est une relation d'ordre munit l'ensemble des partitions d'un même ensemble d'une structure de treillis.

A partir de deux partitions $p$ et $q$ d'un même ensemble on peut définir deux autres partitions $p \wedge q$ et $p \vee q$ comme suit.

$p \wedge q$ est la moins fine des partitions plus fines que $p$ et $q$ à la fois (notion de PGCD). Elle est constituée par l'ensemble des intersections de chaque classe de $p$ avec chaque classe de $q$.

$p \vee q$ est la plus fine des partitions moins fines que $p$ et $q$ à la fois (notions de PPCM). Elle est plus délicate à construire.

Deux objets sont équivalents pour la partition $p \wedge q$ s'ils sont à la fois $p$-équivalents *et* $q$-équivalents. On ne peut pas trouver la formule correspondante pour $p \vee q$ en remplaçant *et* par *ou*, à cause de la transitivité.

## 2.2. Partitions sur deux ensembles

### 2.2.1. Partitions de deux ensembles et correspondance biunivoque entre ces ensembles

Si entre deux ensembles finis $X$ et $X'$ d'objets il existe une correspondance biunivoque $\mu : X \rightarrow X'$, à toute partition $p$ de $X$ on peut faire correspondre une partition $p'$ de $X'$ constituée par les ensembles $A' = \mu A$ où $A \in p$. Les objets de ces ensembles sont les correspondants de tous les éléments d'une seule classe de la partition $p$.

Ces partitions $p$ et $p'$ sont de même type, et il existe une correspondance biunivoque entre leurs classes telle que les objets de deux classes correspondantes sont $\mu$-correspondants. On dira alors que cette correspondance biunivoque entre les classes est *compatible avec* ou *induite par* la correspondance biunivoque $\mu$ entre les objets.

Inversement, si on connaît des partitions de mêmes types de $X$ et $X'$, on peut construire une ou plusieurs correspondances biunivoques entre $X$ et $X'$. Tout objet $x$ d'une classe de $X$ devra correspondre à un objet $x'$ de $X'$ appartenant à une classe de même cardinal, et tout objet de la classe de $x$ correspondra à un objet de la classe de $x'$.

Il n'y a qu'une correspondance biunivoque entre les classes des partitions obtenues en faisant dans $X$ et dans $X'$ la réunion des classes de même cardinal. Si $s_i$ est le nombre de classes de cardinal $i$, il y a $\prod_i (s_i!)$ correspondances biunivoques entre les classes des partitions équivalentes de $X$ et $X'$.

Il y a $\prod_i (i!)^{s_i}$ correspondances biunivoques entre les objets de $X$ et $X'$ compatibles avec chacune des correspondances biunivoques entre les classes.

Si on a sur $X$ deux partitions, du même type respectivement que des partitions de $X'$, une correspondance biunivoque entre les classes de partitions de $X$ et $X'$ plus fines que les partitions déjà définies induira entre les classes de ces dernières une correspondance biunivoque compatible avec elle.

## 3. GROUPES DE PERMUTATIONS ET PARTITIONS D'UN ENSEMBLE

### 3.1. Partitions associées à un groupe de permutations sur un ensemble

Soit $H$ un groupe de permutations des objets de $X$.

$H$ est isomorphe à un sous-groupe du groupe symétrique $S_n$ des $n!$ permutations de $n$ objets.

On peut définir des équivalences sur $X$ à partir du groupe $H$; et donc des partitions.

Deux objets $x$ et $y$ de $X$ sont *H-équivalents* s'il existe dans $H$ une permutation $\nu$ qui applique $x$ sur $y : y = \nu \cdot x$. La permutation inverse $\nu^{-1}$ appliquera $y$ sur $x$. La *H-partition* correspond à cette $H$-équivalence. La *H-classe* $H_x$ de $x$ est constituée par l'ensemble $H \cdot x$ des transformés de $x$ par les permutations de $H$.

Soit $g$ un sous-groupe de $H$. La *g-partition* est plus fine que la $H$-partition. En effet pour tout objet $x$ la $g$-classe $g_x$ vérifie $g_x = g \cdot x \subset H \cdot x = H_x$.

Le sous-ensemble $S$ des *transpositions* $\tau$ de $H$ (permutations qui échangent deux objets en laissant les autres invariants) et de leurs produits constitue un sous-groupe de $H$ si on admet que l'identité est une transposition qui échange n'importe quel objet avec lui-même. Il lui correspond la *S-partition.* D'autre part c'est un *sous-groupe invariant.* Il en résultera alors que les $S$-classes contenues dans une même $H$-classe auront même cardinal.

En effet soit $g$ un sous-groupe invariant de $H$. Alors pour toute permutation $\nu$ de $H$ $\nu \cdot g = g \cdot \nu$, d'où $(\nu \cdot g) \cdot x = (g \cdot \nu) \cdot x$ pour tout objet $x$ de $X$, c'est-à-dire $\nu(g_x) = g_{\nu \cdot x} = g_y$ et pour deux objets $x$ et $y$ $H$-équivalents il existe une correspondance biunivoque entre leurs $g$-classes. Elles ont donc même cardinal.

| $H \rightarrow$ / $X \downarrow$ | $I$ | $r^1$ | $r^2$ | $r^1r^2$ | $r^2r^1$ | $r^1r^2r^1$ | $r^2r^1r^2$ | $r^2r^1r^2r^1 = r^1r^2r^1r^2$ | $Hx$ | $Sx$ |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| 1 | 1 | 1 | 1 | 1 | 1 | 1 | 1 | 1 | 1 | 1 |
| 2 | 2 | 2 | 3 | 3 | 3 | 3 | 2 | 2 | 2, 3 | 2 |
| 4 | 4 | 5 | 6 | 6 | 7 | 7 | 4 | 5 | 4, 5, 6, 7, | 4, 5 |
| 5 | 5 | 4 | 7 | 7 | 6 | 6 | 5 | 4 | 4, 5, 6, 7, | 4, 5 |
| 3 | 3 | 3 | 2 | 2 | 2 | 2 | 3 | 3 | 2, 3 | 3 |
| 6 | 6 | 6 | 4 | 5 | 4 | 5 | 7 | 7 | 4, 5, 6, 7 | 6, 7 |
| 7 | 7 | 7 | 5 | 4 | 5 | 4 | 6 | 6 | 4, 5, 6, 7 | 6, 7 |

**Figure 1**

$$\text{Groupe } H \begin{cases} \text{2 Générateurs} \begin{cases} r^1 = [4, 5] \\ r^2 = [2, 3][4, 6][5, 7] \end{cases} \\ \text{3 Relations} \begin{cases} r_1^2 = I \\ r_2^2 = I \\ (r^1r^2r^1r^2)^2 = I \end{cases} \end{cases}$$

$$\text{Éléments} \begin{cases} \text{Groupe } H : (I, r^1, r^2, r^1r^2, r^2r^1, r^1r^2r^1, r^2r^1\, r^2, r^1r^2r^1r^2) \\ \text{Groupe } S : (I, r^1) + (I, r^2r^1r^2) = (I, r^1, r^2r^1r^2, r^1r^2r^1r^2) \end{cases}$$

$$\text{Partitions} \begin{cases} H - \text{partition} : (1)(2, 3)(4, 5, 6, 7) \\ S - \text{partition} : (1)(2)(3)(4, 5)(6, 7) \end{cases}$$

**Figure 2**

On peut encore établir que chacun des sous-ensembles de $S$ de transpositions n'échangeant que les objets d'une même $S$-classe constituent un *sous-groupe symétrique de $S$,* donc de $H$.

EXEMPLE. — Soit le groupe $H$ (fig. 1) où chaque permutation indiquée par ses générateurs applique la première colonne sur celle qui lui correspond. Dans les deux dernières colonnes sont indiquées les $H$-classes et les $S$-classes.

### 3.2. Sous-groupe spécial par rapport à une partition d'un ensemble

L'ensemble $I_H$ des *invariants* par $H$ de $X$ est constitué par les objets qui vérifient $\forall\, \nu \in H\, \nu \cdot x = x$. Chacun de ces invariants est à lui seul une $S$-classe et une $H$-classe. Si $h$ est un sous-groupe de $H$ alors $I_h \supset I_H$ car tout sommet invariant par $H$ est invariant par $h$.

Soit une partition $p$ sur $X$. Dans le groupe symétrique $S_X$ des permutations des $n$ objets de $X$ un sous-groupe $k$ sera dit *spécial* si la $k$-partition associée est plus fine que la partition $p$. Un sous-groupe spécial $h$ est *particulier* (ou maximal) s'il n'existe pas de $k$-partition strictement moins fine. Cela ne signifie pas que ces $k$-partitions soient plus fines. Il se peut qu'elles ne soient pas comparables, n'ayant pas les mêmes distributions des objets en classes.

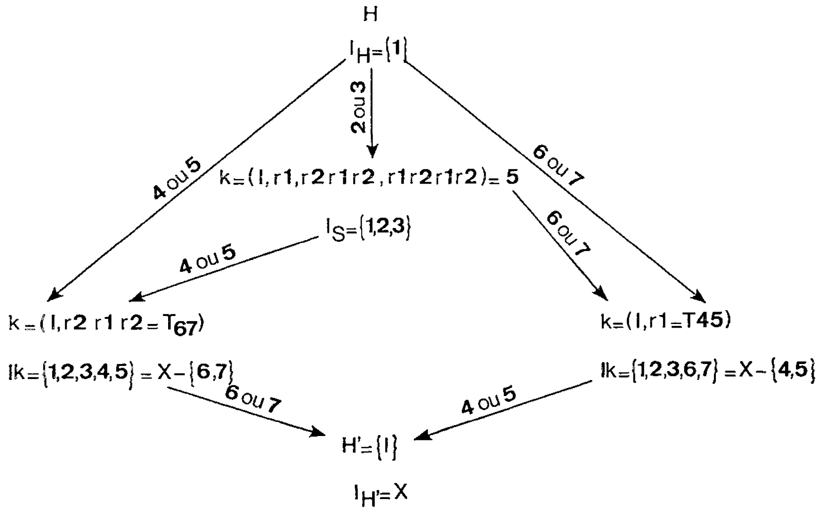


**Figure 3**

Tout sous-groupe d'un groupe est encore un groupe spécial.

Ajoutons à l'ensemble $I_H$ des invariants par $H$ des objets de $X$, un objet $x$ de $X$ n'y étant pas déjà inclus. Il existe parmi les sous-groupes propres de $h$ de $H$ admettant $I_H \cup \{ x \}$ dans leurs invariants $I_h$ un sous-groupe $k$ contenant tous les autres. Il est obtenu en faisant le produit des sous-groupes $h$. Les sous-groupes $h$ sont des groupes spéciaux pour la $p$-partition obtenue en isolant dans une seule classe l'objet $x$ ajouté aux invariants de $I_H$ dans la $H$-partition, $k$ est particulier parmi eux, et c'est le seul à avoir cette propriété.

En itérant ce processus sur les sous-groupes $k$ on obtiendra une *suite finie de sous-groupes propres emboîtés* qui dépend de la suite d'objets $x$ choisie.

Exemple (fig. 3) avec le groupe $H$ étudié en 3.1. Les chiffres inscrits sur les flèches sont les objets qu'il faut ajouter aux invariants du sous-groupe origine de la flèche pour obtenir le sous-groupe spécial maximal de l'extrémité. Tous les objets invariants apparaissent sur les flèches sortant de chaque sous-groupe.

## 4. SYSTEME DU GRAPHE $(X, l)$

### 4.1. Etudes d'un système

#### 4.1.1. Fonction $l$ et théorème « de finesse »

Soit une fonction $l : X \to \mathcal{P}(X)$ où $|X|$ est fini. Il existe un sous-groupe $H$ du groupe $S_X$ des permutations $\nu$ de $X$ tel que

$$\forall x \in X \quad , \quad \forall \nu \in H \quad , \quad l(\nu \cdot x) = \nu(lx) \qquad (2)$$

Ce groupe $H$ est constitué par les permutations $\nu$ de $X$ telles que si $y \in lx$ alors, le transformé $\nu \cdot y$ de $y$ appartient à $l(\nu \cdot x)$. $l$ vérifie cette propriété pour tout sous-groupe de $H$.

Nous verrons plus loin qu'un *système* $(X, l)$ est un *graphe* $(X, \Gamma)$ avec $\Gamma = l$.

Toutefois pour garder au modèle mathématique que nous étudions son caractère général nous prendrons la dénomination $(X, l)$, d'autant plus que les notions classiques (arcs, chemins, etc.) liées aux graphes n'interviendront pas dans cette étude.

C'est surtout le groupe $H$ et la « structure » générale qui donne la fonction $l$ à l'ensemble $X$ qui seront utiles.

Soit maintenant une partition $p$ de $X$. On peut établir sur $X$ une nouvelle partition à l'aide de la $l$-équivalence suivante : $x$ est *$l$-équivalent à $y$ si pour toute classe $A$ de $p$* $|lx \cap A| = |ly \cap A|$. Cette $l$-partition n'est en général pas comparable à $p$. On a vu en 2.1.4. que la $q = p \wedge l$*-partition* est plus fine que la $p$- et la $l$-partition.

Moyennant certaines conditions on peut connaître une partition plus fine que la $q$-partition.

**Théorème**

**Soit une fonction $l : X \to \mathcal{P}(X)$ et $H$ le groupe de $S_X$ associé.**

**Soit $p$ une partition sur $X$.**

**Soit $h$ un sous-groupe spécial particulier de $H$ par rapport à $p$.**

**La $q = p \wedge l$-partition est moins fine que la $h$-partition.**

D'après la construction de $h$ la $h$-partition est plus fine que la $p$-partition. Il faut alors montrer que la $h$-partition est plus fine que la $l$-partition.

Soient deux objets $x$ et $y$ $h$-équivalents. Il existe alors $\nu \in h$ tel que $y = \nu \cdot x$. Comme $h$ est un sous-groupe de $H$, $ly = \nu(lx)$.

D'autre part pour toute classe $A$ de $p$, $\nu \cdot A = A$, d'où

$$\nu(lx \cap A) = (\nu lx) \cap A = ly \cap A$$

ce qui entraîne que $x$ et $y$ sont $l$-équivalents, puisque $\nu$ en tant que permutation est une correspondance biunivoque.

### 4.1.2. Suite de partitions d'un ensemble

La partition $q = p \wedge l$ obtenue est plus fine que la partition $p$. Itérons le processus de construction de $q$ avec la partition obtenue et la fonction $l$. On construira $q_1 = q \wedge l$ qui sera plus fine que $q$, puis $q_2 = q_1 \wedge l$, etc. On obtiendra une suite de partitions de plus en plus fines qui après un certain nombre fini d'itérations seront toutes égales à une *partition* $p_1$ moins fine que la $h$-partition intervenant dans le théorème. Même en changeant la fonction $l$ sans changer le sous-groupe $h$ (c'est-à-dire qu'on garde la propriété

$$\forall x \in X, \forall \nu \in h, l(\nu x) = \nu(lx)),$$

on ne pourra pas obtenir une partition strictement plus fine que la $h$-partition.

$h$ est un sous-groupe spécial particulier pour toutes les partitions de la suite, et seulement des objets de $I_h$ sont seuls dans leur classe pour toutes ces partitions. Si on modifie l'une quelconque de ces partitions, $p_1$ par exemple, en isolant un objet $x$ (qui n'est pas seul dans sa classe) dans une classe supplémentaire, on obtiendra une *partition* $p_2$ sur $X$ qui acceptera pour groupe spécial particulier ou bien $h$ (si $x \in I_h$; dans ce cas on en isolera encore un autre) ou bien le plus grand sous-groupe $k$ de $h$ qui admet parmi ses invariants $I_h$ et les objets isolés. On amorce là une suite de sous-groupes propres emboîtés.

On peut de nouveau itérer le processus de construction de $q$ puisque la fonction $l$ vérifie la propriété (2) au début de 4.1.1. pour tout sous-groupe de $H$. On obtiendra une nouvelle partition de genre $p_1$ par rapport à $k$. On isolera un nouvel objet, et ainsi de suite...

La suite obtenue dépendra de la partition $p$ de départ, de la (ou des) fonction $l$ utilisée et de la suite d'objets $x$ isolés successivement. La partition la plus fine qu'on peut obtenir est la partition triviale où chaque objet est isolé dans sa classe. La suite de partitions est finie, sa longueur dépend pour $p$ et $l$ données de la suite d'objets $x$. Il est très difficile de définir, sans connaître $l$, quelle serait la suite d'objets $x$ qui permettrait de construire la suite de partitions la plus courte. Il semblerait qu'elle soit constituée par les objets $x$ tels que $\left| \bigcup_n l^{-n}(x) \right|$ soit le plus grand possible. On définit $l^{-1}x = \{ z \mid x \in lz \}$ et $l^n(x) = l(l \ldots (l(x)) \ldots)$.

## 4.2. Etude de deux graphes $(X, l)$

### 4.2.1. Correspondance biunivoque entre graphes $(X, l)$

Considérons deux ensembles finis $X$ et $X'$ de $n$ objets chacun et supposons que soit définie sur $X$ une fonction $l : X \to \mathcal{T}(X)$.

Soit $H$ le groupe de permutation associé.

Soit une correspondance biunivoque $\mu : X \to X'$. On peut alors définir sur $X'$ une fonction $l' : X' \to \mathcal{T}(X')$ du même type que $l$ en posant $l' = \mu l \mu^{-1}$ (ou encore $l'(\mu x) = \mu(lx)$). Le groupe $H' = \mu H \mu^{-1}$ isomorphe au groupe $H$, est le groupe de permutations de $X'$ associé à la fonction $l'$.

En effet

$$\forall\, x' \in X', \exists\, x \in X : \qquad x' = \mu x$$
$$\forall\, \nu' \in H', \exists \nu \in H : \qquad \nu' = \mu\nu\mu^{-1}$$

alors :

$$l'(\nu' x') = \mu l^{-1} \mu^{-1} \cdot (\mu\nu\mu^{-1} \cdot \mu x) = \mu \cdot l(\nu x) = \mu \cdot \nu(lx)$$
$$= \mu \cdot \mu^{-1} \nu' \mu(\mu^{-1} l' \mu \cdot \mu^{-1} x') = \nu'(l' x').$$

Toute transformation $\mu_1 = \mu\nu : X \to X'$ où $\nu \in H$ et toute transformation $\mu_1' = \nu'\mu : X \to X'$ où $\nu' \in H'$ sont encore des correspondances biunivoques de $X$ dans $X'$ qui vérifient les propriétés $l' = \mu l \mu^{-1}$ de liaison de $l$ et $l'$ et $H' = \mu H^{-1}$ de liaison des groupes $H$ et $H'$.

### 4.2.2. Partitions et correspondance biunivoque entre deux graphes $(X, l)$

Soit $p$ une partition de $X$. Alors par $\mu$ on construit sur $X'$ une partition $p'$. Si $A$ est une classe de $p$ dans $X$ alors $A' = \mu(A)$ est une classe de $p'$ dans $X'$. Ces deux partitions sont de même type, et la correspondance biunivoque $\mu$ entre les objets de $X$ et $X'$ induit entre leurs classes, comme on l'a vu en 2.2.1., une correspondance biunivoque.

Les fonctions $l$ et $l'$ définissent avec $p$ et $p'$ des $l$-partitions de même type sur $X$ et $X'$ respectivement, et $\mu$ induit une correspondance biunivoque entre leurs $l$-classes. En effet si $x'$ de $X'$ est le correspondant par $\mu$ de $x$ de $X$ alors

$$\mu(lx \cap A) = \mu(lx) \cap \mu(A) = l'(\mu x) \cap A' = l'(x') \cap A'.$$

On a aussi un résultat intéressant. Comme c'est $|lx \cap A|$ qui définit la $l$-classe de $x$ dans $X$, comme $|lx \cap A| = |l'(x') \cap A'|$ puisque

$$\mu(lx \cap A) = l'(x') \cap A',$$

il en résulte que cette correspondance biunivoque entre les $l$-classes est aussi définie par la valeur $a = |lx \cap A|$. Une conséquence importante est que : si $\mu$ existe, sans être nécessairement connue, si $l$ et $l'$, $p$ et $p'$ sont connues ainsi qu'une correspondance biunivoque entre les classes de $p$ et $p'$ compatible avec $\mu$, alors *les cardinaux du type a* $= |l(x) \cap A| = |l'(x') \cap A'|$ créent entre les classes $l$- et $l'$-partitions une correspondance binunivoque compatible avec $\mu$.

Les classes des partitions $q = p \wedge l$ et $q' = p' \wedge l'$ de $X$ et $X'$ respectivement sont aussi en correspondance biunivoque. Comme elles sont construites en appliquant successivement à chaque classe de $p$ (et $p'$) le principe de construction de $l$-partition (chaque objet $x$ cherche ses $l$-équivalents dans la $p$-classe et non dans tout $X$) il en résulte que les cardinaux du *type a* définissent en respectant la correspondance biunivoque entre les classes de $p$ et $p'$ une correspondance biunivoque entre les $q$-classes de $q$ et $q'$ compatible avec la correspondance biunivoque $\mu$ entre les objets de $X$ et $X'$.

## 5. RECHERCHE D'UNE CORRESPONDANCE BIUNIVOQUE ENTRE DEUX GRAPHES $(X, l)$

### 5.1. Le problème

Le problème se pose de la façon suivante :

**Étant donnés deux ensembles $X$ et $X'$, et pour chacun d'eux les fonctions $l : X \to (X)$ et $l' : X' \to (X')$, existe-t-il une (ou plusieurs) correspondance biunivoque $\mu : X \to X'$ telle que $l' = \mu l \mu^{-1}$ ? En construire une éventuellement.**

Un certain nombre de conditions nécessaires doivent être vérifiées pour que la réponse soit affirmative. Il faut, d'une façon évidente, que $X$ et $X'$ aient même cardinal, ou encore, par exemple, qu'il y ait dans $X$ et dans $X'$ le même nombre d'objets tels que la partie associée par la fonction ait un cardinal donné. Si on peut connaître les groupes $H$ et $H'$ correspondant respectivement à $l$ et $l'$ et construits comme en 4.1.1. il faut vérifier qu'ils sont isomorphes. Cette vérification n'est pas aisée à faire sans construire la correspondance biunivoque $\mu$ cherchée.

A l'aide du matériel mathématique rappelé et étudié jusqu'ici on peut réaliser une stratégie pour construire une correspondance biunivoque $\mu$ ou montrer qu'elle n'existe pas.

Elle consiste à construire simultanément sur $X$ et $X'$ des suites *de partitions de même type* de plus en plus fines telles qu'on connaisse toujours entre les partitions de $X$ et $X'$ de même rang dans les suites une *correspondance biunivoque des classes compatible avec la correspondance biunivoque* $\mu$ *des objets.* On affinera les partitions jusqu'à atteindre sur $X$ et $X'$ la partition triviale à un objet par classe. La correspondance $\mu$ sera celle qui existera entre les classes de ces deux partitions.

Si à un rang quelconque de ces suites les partitions ne sont pas équivalentes ou seulement que la correspondance biunivoque entre les classes n'existe pas, on pourra conclure que $\mu$ n'existe pas.

Voici, plus détaillée, la construction des suites.

## 5.2. Description de la stratégie. Construction des suites de partitions

### 5.2.1. Partitions de départ

On a, *a priori*, sur $X$ et sur $X'$ des partitions de même type $p$ et $p'$ entre les classes desquelles il existe une correspondance biunivoque compatible avec $\mu$, il s'agit, soit des partitions triviales n'ayant qu'une classe ($X$ tout entier pour $p$, $X'$ pour $p'$), soit celles correspondant à l'équivalence suivante : $x$ et $y$ sont équivalents si $|lx| = |ly|$.

Ces deux points de départ se valent puisque, comme on peut déduire du paragraphe suivant, en partant du premier on passe par le second. D'autre part les groupes $H$ et $H'$ sont spéciaux particuliers par rapport à ces partitions respectivement.

### 5.2.2. Premier procédé de construction

Le premier procédé de construction est l'opération $q = p \wedge l$ de 4.1.1. qui se justifie par le paragraphe 4.2.2. On construira $q = p \wedge l$ pour $X$ et $q' = p' \wedge l'$ pour $X'$.

Dans le cas où $p$ n'a qu'une seule classe $X$ on a évidemment $|lx \cap X| = |lx|$.

Les partitions $q$ et $q'$ *sont de même type, et entre leurs classes on connaît une correspondance biunivoque compatible avec* $\mu$ *cherchée.* En itérant le processus de construction, comme 4.1.2. on obtient des partitions $q_1$ et $q'_1$ qui, si $\mu$ existe, vérifient les conditions soulignées. On peut ainsi en un nombre fini d'itérations obtenir des partitions $p_1$ et $p'_1$ du genre $p_1$ de 2.6 qui vérifieront les conditions requises, si $\mu$ existe.

Ces partitions sont moins fines que les $H$- et $H'$-partitions et on ne peut pas les affiner plus. On peut éventuellement changer les fonctions $l$ et $l'$, mais en respectant certaines conditions (voir 4.1.2.) par rapport à $H$ et $H'$ (il existe effectivement d'autres fonctions, construites d'ailleurs à partir de $l$, qui vérifient ces conditions, comme $l^{-1}$). On restera quand même avec des partitions moins fines que les $H$- et $H'$-partitions. On va alors utiliser le deuxième procédé de construction.

### 5.2.3. Deuxième procédé de construction

Comme pour les suites simples de 4.1.2., on va affiner simultanément les partitions $p_1$ et $p'_1$ pour obtenir des partitions $p_2$ et $p'_2$ en isolant dans $p_1$ un objet $x$ de $X$ dans une nouvelle classe et en isolant dans $p'_1$ un objet $x'$ de $X'$, choisi parmi ceux susceptibles de lui être $\mu$-correspondants, c'est-à-dire appartenant à la classe $A'$ de $p'_1$ correspondant à la classe $A$ de $x$ dans $p_1$.

Nous appellerons ce choix de $x'$ une *hypothèse* ou une *supposition* sur $\mu$, car elle revient à supposer que $x'$ est le correspondant par $\mu$ de $x$.

Rappelons que dans ce cas on utilise des sous-graphes $h$ et $h'$ de $H$ et $H'$ respectivement au lieu de ces groupes eux-mêmes. Les conséquences en sont importantes, car $h$ et $h'$ ne sont pas nécessairement isomorphes.

Les partitions $p_2$ et $p'_2$ sont de même type et on connaît entre leurs classes une correspondance biunivoque supposée compatible avec $\mu$ cherchée. On peut donc itérer le premier procédé de construction. On obtiendra au bout d'un nombre fini d'itérations *trois possibilités* : des partitions $p_3$ et $p'_3$ du genre $p_1$ de 4.1.2., la correspondance biunivoque $\mu$, ou la non vérification des conditions nécessaires d'existence de $\mu$.

Nous allons étudier ces trois cas.

### 5.2.4. Obtentions des partitions $p_3$ et $p'_3$

Ces partitions sont moins fines que les $h$- et $h'$-partitions respectivement.

On va de nouveau appliquer le deuxième procédé de construction. On dira que la première hypothèse faite est de *niveau 1* et que celle-ci est de *niveau 2.*

On appliquera ensuite le premier procédé de construction, jusqu'à retomber sur une situation semblable, et ainsi de suite.

On peut rencontrer plusieurs *niveaux d'hypothèse.*

### 5.2.5. Obtention de la correspondance biunivoque $\mu$

A chaque niveau d'hypothèse on utilise des sous-groupes propres de $H$ et de $H'$ encore plus petits que les précédents. Comme $H$ et $H'$ sont finis, en un nombre fini de niveaux d'hypothèse on doit être amené à utiliser le groupe $h = \{I\}$ réduit à la permutation identité. Pour ce groupe, la $h$-partition est la partition triviale à un objet par classe. Les partitions peuvent par emploi répété des deux procédés de construction être rendues aussi fines que cette partition.

Elles seront naturellement de même type. Si en plus la correspondance biunivoque entre les classes, qui est définie par les cardinaux du type $a$ de 4.2.2. qui sont maintenant égaux à 0 ou 1, reste inchangée par application du premier procédé de construction, on aura alors la correspondance biunivoque $\mu$. Cette correspondance pourrait être modifiée ou détruite si $\mu$ n'existait pas ou si à un niveau quelconque d'hypothèse, la supposition faite n'était pas valable, comme on peut le voir dans le paragraphe suivant.

### 5.2.6. Non vérification de conditions nécessaires

Si cette possibilité, non vérification d'une condition nécessaire, se produit avant le premier niveau d'hypothèse on peut conclure à l'inexistence de $\mu$.

Si elle se produit après le premier niveau d'hypothèse il faut alors se demander si à un niveau quelconque une supposition faite n'était pas mauvaise, dans ce cas les suivantes sont erronées.

On modifiera d'abord l'hypothèse faite au dernier niveau.

On reprendra les partitions sur lesquelles cette hypothèse a été faite et on associera à l'objet $x$ de $X$ qui avait été isolé dans une nouvelle classe un autre objet $x'$ de $X'$ appartenant à la classe dans $X'$ correspondant à la classe de $x$ dans $X$.

Si tous les objets $x'$ de la classe en question ont été essayés c'est au niveau précédent que l'hypothèse doit être mauvaise, et qu'il faut la modifier.

S'il n'y a plus de niveau d'hypothèse, c'est-à-dire que toutes les possibilités d'hypothèse de niveau 1 ont été explorées sans donner de résultat, la correspondance biunivoque $\mu$ n'existe pas car on ne peut pas établir cette corres pondance $\mu$ entre les objets de deux classes correspondantes.

Il est important de remarquer qu'il est nécessaire de se souvenir à chaque niveau des partitions sur lesquelles se font les hypothèses, l'objet $x$ de $X$ qu'on isole, et la liste des objets $x'$ de $X'$ qu'on lui a déjà fait correspondre dans les essais précédents.

Cette méthode d'essais d'hypothèses est comparable au modèle suivant d'un voyageur qui explore un labyrinthe en forme d'arborescence. Il est parti de la racine de l'arborescence et parcourt les arcs suivant leur orientation. Chaque sommet de l'arborescence est à un niveau d'hypothèse. Il se présente au voyageur plusieurs routes qui sont les suppositions possibles.

Son but est d'atteindre une sortie qui ne peut être située que sur un des sommets les plus éloignés de la racine. S'il arrive à une impasse (à un niveau inférieur) il retournera au dernier sommet pour choisir une autre route (ou une autre supposition); s'il les a toutes explorées, il retournera au carrefour précédent; s'il se retrouve à l'entrée, le labyrinthe est sans issue (pas de correspondance biunivoque).

Notons enfin que par cette méthode d'exploration on peut trouver le groupe $H$ (ou le groupe $H'$). Pour cela il suffit de considérer toute sortie comme une impasse, et deux correspondances biunivoques obtenues se déduisent l'une de l'autre par produit, par une permutation de $H$ (ou de $H'$) (voir 4.2.1.).

On pourrait construire les suites de partitions en n'utilisant que le deuxième procédé. On arriverait au résultat en au plus $n - 1$ niveaux d'hypothèse. On ne se servirait du premier procédé que pour vérifier la correspondance biunivoque entre les classes.

La longueur minimum des suites est sujette aux mêmes remarques que celles faites sur les suites simples en 4.1.2. Le nombre maximum de couples de partitions calculées dépend par l'intermédiaire des fonctions $l$ et $l'$, et des hypothèses, de l'ordre des groupes $H$ et $H'$. Je pense que dans tous les cas il est strictement plus petit que $n!$ le nombre maximum de permutations à essayer dans une méthode brutale.

### 5.2.7. Accélération à l'aide des $S$-partitions

On peut raccourcir la longueur des suites à l'aide des $S$-partitions de $X$ et $X'$ (voir 3.1.). En effet le sous-groupe de $S$ échangeant les objets d'une même $S$-classe est symétrique. Il en résulte que si on connaît une correspondance biunivoque entre les $S$-classes de la $S$-partition de $X$ et celles de la $S$-partition de $X'$ alors on peut construire la correspondance biunivoque $\mu$ en prenant dans chaque couple de $S$-classes une correspondance biunivoque quelconque.

Ceci résulte de ce que $\mu_1 = \mu\nu$ où $\nu \in H$ et $\mu_1' = \nu'\mu(\nu' \in H')$ sont encore des correspondances biunivoques telles que $H' = \mu H \mu^{-1}$ (4.2.1.). Si on impose à $\nu$, par exemple, d'appartenir à $S$ (en fait à un sous-groupe) $\mu\mu^{-1}$ qui est une permutation des objets de $X$, laissera invariant les objets n'appartenant pas à la $S$-classe dont les éléments ne sont permutés que par les permutations du sous-groupe de $S$ contenant $\nu$. (Voir 3.1. à la fin.)

Or la $S$-partition est facile à construire. Deux objets $x$ et $y$ sont $S$-équivalents si $\tau_{xy} \in H$, c'est-à-dire si, $y = \tau_{xy}x$, $l(y) = l(\tau_{xy}x) = \tau_{xy}l(x)$, c'est-à-dire qu'on obtient $l(y)$ en échangeant $x$ et $y$ dans $l(x)$.

Tout ceci est encore équivalent à

$$
\begin{gathered}
l(x) - \{x, y\} = l(y) - \{x, y\} \\
x \in l(x) \Leftrightarrow y \in l(y) \\
y \in l(x) \Leftrightarrow x \in l(y) \\
l^{-1}(x) - \{x, y\} = l^{-1}(y) - \{x, y\}
\end{gathered}
$$

et ces quatre conditions sont faciles à tester quand on connaît $l$.

On peut aussi, construire les $S$-classes sur $X'$. On n'a pas, bien sûr, la correspondance biunivoque entre les $S$-classes de $X$ et $X'$. On peut orienter les suites de partitions de façon à ce qu'elles permettent de construire cette correspondance biunivoque. Comme on sait que toute $H$-classe ne contenant que des $S$-classes de même cardinal sera moins fine que la $H$-partition. D'autre part la correspondance biunivoque entre les classes de ces dernières partitions de $X$ et de $X'$, obtenue en utilisant les cardinaux ayant servi à les construire, est compatible avec la correspondance biunivoque cherchée. Ces partitions peuvent servir donc de point départ des suites.

Pour ne pas fausser la correspondance biunivoque entre les $S$-classes qu'on cherche, au lieu d'associer deux objets on associera deux $S$-classes dans le deuxième procédé de construction, et tout ce qui se faisait sur les objets se fera sur les $S$-classes.

Ainsi on n'utilisera plus des cardinaux du type $a = |l(x) \cap A|$, mais si $s$ est une $S$-classe on utilisera soit $a_s = |l(s) \cap A|$ où $l(s) = \bigcup_{x \in s} l(x)$, soit ce qui est encore mieux $a'_s$ = nombre de $S$-classes de $l(s)$ contenues dans $A$. On pourra même faire intervenir les cardinaux des $S$-classes de $l(s)$ contenues dans $A$.

# II. ISOMORPHISME ENTRE DEUX GRAPHES

## 6. APPLICATIONS AUX GRAPHES

### 6.1. Isomorphisme entre deux graphes

Beaucoup de problèmes relatifs aux isomorphismes entre deux graphes vont être résolus si on sait qu'un *graphe* est, comme on l'a dit en 4.1.1., un système $(X, l)$ où $X$ est l'ensemble des sommets du graphe et $l$ la fonction successeur $\Gamma$ qui à chaque sommet $x$ de $X$ associe ceux qui peuvent être atteints à partir de $x$ en parcourant un arc suivant son orientation. On définira donc *un graphe* $G$ par le couple $(X, \Gamma)$ qui est la notation habituelle.

D'autre part, deux graphes $G = (X, \Gamma)$ et $G' = (X', \Gamma')$ sont *isomorphes* s'il existe une correspondance biunivoque $\mu : X \to X'$ qui respecte les arcs c'est-à-dire telle que si deux sommets $x$ et $y$ sont reliés par un arc de sens donné dans $X$ alors leurs correspondants $x'$ et $y'$ dans $X'$ sont reliés aussi par un arc, orienté, de la même façon.

Un *automorphisme* d'un graphe est un isomorphisme de ce graphe dans lui-même. Il correspond à une permutation $\nu$ de $X$ qui respecte les arcs. Les automorphismes d'un graphe constituent un groupe $H(G)$ isomorphe au groupe $H$ des permutations $\nu$ de $X$.

On peut très facilement montrer que ces transformations « qui respectent les arcs » sont les permutations $\nu$ du groupe $H$ relatif à $l$ introduit en 4.1.1. et les correspondances biunivoques $\mu$ apparues en 4.2.1.

### 6.2. L'algorithme de recherche d'un isomorphisme

Rechercher un isomorphisme entre deux graphes est donc trouver une correspondance biunivoque $\mu$ du type de celles de 4.2.1. La stratégie proposée en 5.1. est alors un *algorithme* qui permet de construire une solution ou de montrer qu'il n'en existe pas.

Reprenons en termes de graphes les éléments de cette stratégie.

#### 6.2.1. Partitions de départ dans les graphes

La fonction $l$ étant la fonction successeur $\Gamma$, le cardinal $|lx|$ qui sert à construire la partition de départ est alors le demi-degré extérieur du sommet $x$. Dans les deux graphes on groupe dans une même classe les sommets de même demi-degré extérieur et une correspondance biunivoque naturelle est établie entre les classes des deux graphes correspondant à des demi-degré extérieurs égaux.

Si des classes correspondantes n'ont pas même nombre de sommets il n'y a pas d'isomorphisme entre les deux graphes.

On peut éventuellement obtenir des partitions plus fines en utilisant par exemple, les demi-degrés intérieurs à l'aide de la fonction $\Gamma^{-1}$ qui est une autre fonction $l$. De même le fait qu'un sommet soit support d'une boucle peut être utilisé. Ceci sera justifié en 6.2.5.

### 6.2.2. Premier procédé de construction dans les graphes

Il consiste à diviser les classes des partitions obtenues à l'aide des cardinaux du type $|lx \cap A|$ où $A$ est une classe de la partition. Comme on utilise $\Gamma$, le cardinal $|\Gamma x \cap A|$ est le nombre de successeurs de $x$ qui sont du demi-degré extérieur correspondant à la classe $A$.

C'est aussi le nombre de chemins de longueur deux issus de $x$ et passant par un sommet de demi-degré extérieur donné. On voit ici qu'on sépare les sommets dans les classes différentes d'après leurs successeurs, ou plutôt la forme des chemins qui en sont issus.

On établit la correspondance biunivoque entre les classes des nouvelles partitions de la façon suivante. Dans des classes correspondantes des premières partitions on sépare les sommets d'après le nombre de leurs successeurs dans deux classes $A$ correspondantes bien définies. On obtient la correspondance biunivoque entre ces nouvelles classes à l'aide des nombres de successeurs, puis on recommence avec une autre classe $A$, et ainsi de suite jusqu'à l'épuisement des classes $A$.

Répéter ce procédé revient à faire intervenir pour un sommet $x$ le nombre de successeurs d'un demi-degré extérieur donné qui ont un nombre donné de successeurs d'un demi-degré extérieur donné. On voit bien apparaître la forme des chemins de longueur trois. En itérant ainsi, on fera apparaître les chemins de quatre, puis cinq et ainsi de suite, jusqu'à atteindre les plus longs chemins qui ont au plus $n = |X|$ arcs, si on considère les circuits comme des chemins particuliers. On ne pourra plus obtenir une finesse plus grande dans les partitions.

Il faut toujours vérifier que dans deux classes correspondantes créées à une étape quelconque de l'algorithme il y a toujours le même nombre de sommets, ce qui est une condition nécessaire d'isomorphie.

### 6.2.3. Deuxième procédé de construction dans les graphes

Comme en 5.2.3. il consiste à faire une hypothèse sur la correspondance biunivoque cherchée en isolant simultanément dans les deux graphes des sommets qu'on suppose $\mu$-correspondants. Il en résulte que leurs prédécesseurs et aussi leurs successeurs, seront aussi $\mu$-correspondants.

Le premier procédé permettra de séparer les sommets qui ont ou n'ont pas les sommets isolés dans leurs successeurs; puis les sommets qui ont ou n'ont pas les sommets isolés dans les successeurs de leurs successeurs, etc.

Comme les sommets sont séparés à l'aide de leurs successeurs, c'est en isolant ceux qui ont le plus de prédécesseurs qu'on fera des hypothèses permettant de raccourcir la longueur des calculs (voir fin de 4.1.2.). Cependant si les chemins qui aboutissent à ces sommets sont très longs on aura beaucoup de fois à itérer le premier processus de construction pour arriver à une partition du type $p_3$ de 5.2.3.

L'obtention de l'une des trois possibilités de 5.2.3. entraîne les mêmes considérations que celles traitées en 5.2.4., 5.2.5., 5.2.6.

### 6.2.4. Accélération à l'aide des $S$-partitions dans les graphes

Comme on l'a vu en 5.2.7. l'algorithme reste le même, mais au lieu de travailler avec les sommets, on utilise les $S$-classes.

Celles-ci se construisent très facilement en traduisant les formules données en 5.2.7. Deux sommets $x$ et $y$ sont $S$-équivalents s'ils ont mêmes successeurs, mêmes prédécesseurs, sont ou ne sont pas tous les deux supports d'une boucle, et sont ou ne sont pas reliés par des arcs de sens contraires. En conséquence, une $S$-classe est support d'un sous-graphe symétrique complet avec ou sans les boucles (entre deux sommets quelconques il y a un arc de chaque sens) ou sans arcs, dont les sommets ont les mêmes prédécesseurs et les mêmes successeurs.

Dans le cas de graphes $G$ et $G'$ symétriques complets avec ou sans les boucles les groupes $H$ et $H'$ sont isomorphes au groupe de permutations $S_n$ entier. En utilisant l'accélération par les $S$-classes on a une solution immédiatement. Chaque graphe est constitué par une seule $S$-classe et $\mu$ peut être n'importe quelle correspondance biunivoque entre les sommets. Si on n'utilise pas les $S$-classes, le deuxième procédé uniquement par $n - 1$ hypothèses, toutes exactes, permet d'arriver au résultat. C'est un cas où il faut le maximum d'hypothèses.

### 6.2.5. Autres fonctions $l$ dans les graphes

En 4.1.2. et 5.2.1. est indiquée la possibilité d'utiliser d'autres fonctions $l$, c'est-à-dire d'autres fonctions que $\Gamma$.

Le graphe $G^{-1} = (X, \Gamma^{-1})$ est le graphe $G$ où les arcs sont inversés. Un tel graphe a même groupe d'automorphismes que le graphe $G$. La fonction $\Gamma^{-1}$ peut donc remplacer la fonction $\Gamma$ d'autant plus naturellement qu'elle revient à faire intervenir les prédécesseurs au lieu des successeurs dans la construction des partitions. Si on utilise en même temps $\Gamma$ et $\Gamma^{-1}$ on construira des chaînes au lieu des chemins. Il serait maladroit d'utiliser les puissances de $\Gamma$ en raison de ce qui a été dit sur les chemins des graphes et les itérations du premier procédé de constructions. On peut utiliser aussi le nombre de circuits de longueur donnée passant par les sommets à séparer. C'est le nombre de fois où ces sommets sont successeurs d'eux-mêmes au degré correspondant à la longueur du circuit.

Le graphe $\bar{G} = (X, \bar{\Gamma})$ construit sur $X$ avec les arcs qu'il manque à $G$ pour en faire un graphe symétrique complet avec ou sans toutes les boucles a aussi le même groupe d'automorphismes que $G$. La fonction $\bar{\Gamma}$ peut donc éventuellement remplacer $\Gamma$. On fait intervenir le fait qu'un sommet n'a pas de successeurs ou de prédécesseurs dans une classe donnée. Ce graphe peut même remplacer $G$ dès le départ quand il possède moins d'arcs donc moins de chemins.

## 6.3. Réalisation pratique

C'est bien sûr la partie la plus délicate. Pour des petits graphes on peut par un dessin approprié des deux graphes donner une réponse en quelques minutes au plus.

Mais si les graphes n'ont seulement que 10 ou 15 sommets il faut déjà une somme de calculs si importante que l'emploi d'un calculateur électronique s'avère nécessaire. Il se pose alors le problème de la meilleure représentation des graphes, des partitions et des correspondances biunivoques, c'est celle qui coûtera le moins cher en place, temps et précision.

Un programme a été réalisé en ALGOL, exploité sur BGE M40. En moins de cinq secondes, il traite de deux graphes de quinze sommets.

Les graphes ont été représentés par leur matrice caractéristique ou matrice d'incidence aux sommets.

Une partition est représentée par un vecteur dont les coordonnées sont les valeurs, souvent des cardinaux du type $a$, d'une fonction caractéristique de la partition. C'est une fonction $f : X \to E$, le plus souvent $E = N$, qui a même valeur pour les sommets d'une même classe et des valeurs différentes pour des sommets de classes différentes.

La correspondance biunivoque entre les classes des deux graphes est indiquée en donnant la même valeur aux fonctions caractéristiques des partitions pour les classes correspondantes.

L'opération $\wedge$ de deux partitions (2.1.4.) est réalisée en juxtaposant les vecteurs-partitions et en numérotant différemment les couples des coordonnées différents, ceci se réalisant simultanément sur les deux graphes.

La $l$-partition est calculée par un produit spécial de la matrice et du vecteur-partition $p$, qui ressemble à un produit scalaire inachevé. Ce produit spécial fait en particulier la différence entre $4 = 2 + 2$ et $4 = 3 + 1$.

Le deuxième procédé de construction se réalise naturellement en ajoutant une valeur supplémentaire aux fonctions caractéristiques des partitions. Les partitions et les hypothèses sont conservées dans des tableaux dont les dimensions sont calculées en tenant compte des considérations sur la longueur des suites. Ces tableaux sont utilisés comme des piles.

La fonction $\Gamma^{-1}$ s'obtient par transposition de la matrice.

Le programme contient un grand nombre de tests pour vérifier les conditions nécessaires d'existence d'un isomorphisme.

Ce programme, sa description et toutes les indications nécessaires à son emploi se trouvent dans (6).

## 7. CONCLUSION

Ce modèle mathématique, dont l'application aux graphes est l'une de ses plus justes illustrations, peut également représenter d'autres problèmes de correspondance biunivoque entre ensembles « structurés », en particulier le problème de l'isomorphisme de groupes et celui de la *P*-équivalence de matrices. L'adaptation se fera par l'expression de la « structure » des ensembles étudiés.

On notera enfin que le deuxième procédé de construction est apparenté aux méthodes de « Back-tracking ».

## REFERENCES

1. P. S. ALEXANDROFF, *Introduction à la théorie des groupes*, Dunod, Paris, 1965.
2. C. BERGE, *Théorie des graphes et ses applications*, Dunod, Paris, 1963.
3. A. J. W. DUIJVESTIJN, *Electronic Computation of squared rectangles* (thèse), Philips Computing Centre, Eindhoven, The Netherlands, 1962.
4. W. LEDERMANN, *Introduction to the theory of finite groups*, Oliver and Boyd, London, 1957.
5. O. ORE, *Theory of graphs*, American Mathematical Society, Colloquium Publications, vol. XXXVIII, 1962.
6. J. P. STEEN, *Algorithme de recherche d'un isomorphisme entre deux graphes* (thèse), Faculté des Sciences de l'Université de Lille, BP 36-59, Lille, France, 1968.
7. S. H. UNGER, *GIT — A heuristic program for testing pairs of directed line graphs for isomorphism*, Com. of ACM, vol. 7, n° 1, janv. 1964, pp. 26 à 34.