REVUE FRANÇAISE D'INFORMATIQUE ET DE RECHERCHE OPÉRATIONNELLE

IOAN TOMESCU

Sur l'algorithme matriciel de B. Roy

Revue française d'informatique et de recherche opérationnelle, tome 2, n° R1 (1968), p. 87-91

<http://www.numdam.org/item?id=M2AN_1968__2_1_87_0>

R.I.R.O.
(2e année, N° 7, 1968, p. 87-91)

SUR L'ALGORITHME MATRICIEL DE B. ROY

Ioan TOMESCU (1)

Résumé. — *Le but de cet article est celui de généraliser l'algorithme matriciel de B. Roy, proposé dans* [1], [2] *pour la détermination de la μ-fermeture d'un graphe fini au cas des matrices aux éléments dans un semi-groupe à ordre semi-réticulaire.*

Dans ce qui suit l'on considère un semi-groupe à ordre semi-réticulaire, c'est-à-dire un ensemble S muni de deux lois de composition $\circ$ et $\wedge$ qui satisfont aux axiomes :

1) $a \circ b = b \circ a$.

2) $a \circ (b \circ c) = (a \circ b) \circ c$.

3) $a \circ e = a$.

4) $a \wedge b = b \wedge a$.

5) $a \wedge (b \wedge c) = (a \wedge b) \wedge c$.

6) $a \wedge a = a$.

7) $a \circ (b \wedge c) = (a \circ b) \wedge (a \circ c)$.

8) $a \wedge (a \circ b) = a$ quels que soient a, b, $c \in S$ et e étant l'élément neutre de semi-groupe.

Dans l'ensemble S, on introduit une relation d'ordre partiel : $a \prec b$ si $a \wedge b = a$, qui a les propriétés suivantes : $a \wedge b \prec a$; $a \wedge b \prec b$; si $z \prec a$ et $z \prec b$ alors $z \prec a \wedge b$; $a = a \wedge (a \circ b) \prec a \circ b$, en particulier

$$e \prec a \circ e = a.$$

Théorème 1. *Si $a \prec b$ et $c \prec d$ alors $a \wedge c \prec b \wedge d$ et $a \circ c \prec b \circ d$.*

Démonstration. On obtient $a \wedge b \prec a \prec c$ et $a \wedge b \prec b \prec d$, donc $a \wedge b \prec c \wedge d$.

(1) Université de Bucarest, str. Academiei, 14.

Si $a \prec c$ alors

$$a \circ b = b \circ a = b \circ (a \wedge c) = (b \circ a) \wedge (b \circ c) = (a \circ b) \wedge (c \circ b) \prec c \circ b$$

quel que soit $b \in S$.

En utilisant ce résultat on obtient dans les hypothèses du théorème que $a \circ b \prec c \circ b = b \circ c \prec d \circ c = c \circ d$. C.Q.F.D.

On définit la multiplication des matrices carrées

$$A = \{ a_{\alpha\beta} \}_{\alpha,\beta=1,\dots,p} \qquad \text{et} \qquad B = \{ b_{\alpha\beta} \}_{\alpha,\beta=1,\dots,p}$$

avec $a_{\alpha\beta}$, $b_{\alpha\beta} \in S$ par la relation :

$$\{ A \times B \}_{\alpha\beta} = \bigwedge_{\gamma=1,\dots,p} (a_{\alpha\gamma} \circ b_{\gamma\beta}) = (a_{\alpha 1} \circ b_{1\beta}) \wedge (a_{\alpha 2} \circ b_{2\beta}) \wedge \dots \wedge (a_{\alpha p} \circ b_{p\beta}).$$

Dans [3] on obtient que cette loi de composition est associative et, si $a_{\alpha\alpha} = e$ on a la relation $A^{p-1} = A^p = \dots$

On introduit une relation d'ordre partiel dans l'ensemble des matrices aux éléments de S de la façon suivante : $A \prec B$ si $a_{\alpha\beta} \prec b_{\alpha\beta}$ pour tout α, $\beta = 1,\dots, p$.

Si $A \prec C$ et $B \prec D$ alors, conformément au théorème 1 :

$$a_{\alpha\gamma} \circ b_{\gamma\beta} \prec c_{\alpha\gamma} \circ d_{\gamma\beta} \qquad \text{et} \qquad \bigwedge_{\gamma=1,\dots,p} (a_{\alpha\gamma} \circ b_{\gamma\beta}) \prec \bigwedge_{\gamma=1,\dots,p} (c_{\alpha\gamma} \circ d_{\gamma\beta}),$$

donc $A \times B \prec C \times D$.

$$\{ A^2 \}_{\alpha\beta} = a_{\alpha\beta} \wedge \bigwedge_{\substack{\gamma=1,\dots,p \\ \gamma \neq \alpha,\beta}} (a_{\alpha\gamma} \circ a_{\gamma\beta}) \prec a_{\alpha\beta}$$

d'où on déduit :

$$A \succ A^2 \succ \dots \succ A^{p-1} = A^p = \dots$$

On introduit les opérateurs $T_{\mu\nu}{}^{(\rho)}$ où $\mu, \nu, \rho \in \{ 1, 2, \dots, p \}$ définis sur l'ensemble des matrices $A = \{ a_{\alpha\beta} \}_{\alpha,\beta=1,\dots,p}$ avec $a_{\alpha\beta} \in S$ et $a_{\alpha\alpha} = e$ de la manière suivante :

$$T_{\mu\nu}{}^{(\rho)}(A) = B \text{ si } b_{\mu\nu} = a_{\mu\nu} \wedge (a_{\mu\rho} \circ a_{\rho\nu}) \text{ et } b_{\alpha\beta} = a_{\alpha\beta}$$

pour tout $(\alpha, \beta) \neq (\mu, \nu)$.

On en déduit que $A \succ T_{\mu\nu}{}^{(\rho)}(A) \succ A^2$, donc

$$A^{p-1} \succ (T_{\mu\nu}{}^{(\rho)}(A))^{p-1} \succ (A^2)^{p-1} = A^{p-1}$$

et par conséquent $(T_{\mu\nu}{}^{(\rho)}(A))^{p-1} = A^{p-1}$.

On vérifie aisément que :

$$T_{\mu_1\nu_1}{}^{(\rho_1)}(T_{\mu_2\nu_2}{}^{(\rho_2)}(A)) = T_{\mu_2\nu_2}{}^{(\rho_2)}(T_{\mu_1\nu_1}{}^{(\rho_1)}(A))$$

et

$$T_{\mu\nu}{}^{(\rho)}(T_{\mu\nu}{}^{(\rho)}(A)) = T_{\mu\nu}{}^{(\rho)}(A).$$

On introduit les opérateurs $U_\rho = \prod_{\substack{\mu,\nu=1 \\ \mu\neq\nu,\mu\neq\rho,\nu\neq\rho}}^{p} T_{\mu\nu}{}^{(\rho)}$ et l'opérateur

$$U = \prod_{\rho=1}^{p} U_\rho.$$

Dans l'expression de l'opérateur U l'ordre des opérateurs U_ρ n'importe pas en vertu de la propriété suivante : $U_{\rho 1}U_{\rho 2}(A) = U_{\rho 2}U_{\rho 1}(A)$.

En effet :

$$\begin{aligned}
\{ U_{\rho_1}U_{\rho_2}(A) \}_{\alpha\beta} &\\
&= a_{\alpha\beta} \wedge (a_{\alpha\rho_2} \circ a_{\rho_2\beta})\\
&\wedge (a_{\alpha\rho_1} \wedge (a_{\alpha\rho_2} \circ a_{\rho_2\rho_1})) \circ (a_{\rho_1\beta} \wedge (a_{\rho_1\rho_2} \circ a_{\rho_2\beta}))\\
&= a_{\alpha\beta} \wedge (a_{\alpha\rho_1} \circ a_{\rho_1\beta}) \wedge (a_{\alpha\rho_2} \circ a_{\rho_2\beta}) \wedge (a_{\alpha\rho_1} \circ a_{\rho_1\rho_2} \circ a_{\rho_2\beta})\\
&\wedge (a_{\alpha\rho_2} \circ a_{\rho_2\rho_1} \circ a_{\rho_1\beta}) = a_{\alpha\beta} \wedge (a_{\alpha\rho_1} \circ a_{\rho_1\beta}) \wedge (a_{\alpha\rho_2} \wedge (a_{\alpha\rho_1} \circ a_{\rho_1\rho_2}))\\
&\qquad \circ (a_{\rho_2\beta} \wedge (a_{\rho_2\rho_1} \circ a_{\rho_1\beta})) = \{ U_{\rho_2}U_{\rho_1}(A) \}_{\alpha\beta}
\end{aligned}$$

Compte tenu de la relation $(T_{\mu\nu}{}^{(\rho)}(A))^{p-1} = A^{p-1}$ on obtient par l'itération que $(U_\rho(A))^{p-1} = A^{p-1}$ et $(U(A))^{p-1} = A^{p-1}$.

Théorème 2. *$U(A) = A^{p-1}$ quelle que soit la matrice $A = \{ a_{\alpha\beta} \}_{\alpha,\beta=1,\ldots,p}$ avec $a_{\alpha\beta} \in S$ et $a_{\alpha\alpha} = e$.*

Démonstration. En utilisant la commutativité et l'idempotence du produit des opérateurs U_ρ, induites par la commutativité et l'idempotence du produit des opérateurs $T_{\mu\nu}{}^{(\rho)}$, on obtient $U^2(A) = U(A)$ et par conséquent

$$U(A) = U^2(A) = \ldots$$

On démontre par induction par rapport à s que :

$$\{ U_{k_s}U_{k_{s-1}} \ldots U_{k_1}(A) \}_{\alpha\beta} \prec a_{\alpha\beta} \wedge \bigwedge_{\gamma \in \{k_1,k_2,\ldots,k_s\}\setminus\{\alpha,\beta\}} (a_{\alpha\gamma} \circ a_{\gamma\beta})$$

et, par conséquent, $U(A) \prec A^2$ d'où on déduit $U^2(A) \prec A^4$; ...; $U^n(A) \prec A^{2^n}$ pour tout $n \in N$.

Si $r \in N$ et $r \geqslant \left[\dfrac{\log(p-1)}{\log 2}\right] + 1$ alors on a $U^r(A) \prec A^{2^r} \prec A^{p-1}$ mais $U^r(A) \succ (U^r(A))^{p-1} = (U(A))^{p-1} = A^{p-1}$ et donc $U^r(A) = A^{p-1}$, c'est-à-dire $U(A) = U^2(A) = \ldots = U^r(A) = A^{p-1}$. C.Q.F.D.

Le problème du calcul de la matrice A^{p-1} est associé à quelques problèmes de la théorie des graphes et des réseaux électriques.

Soit S l'algèbre booléenne des fonctions booléennes définies sur $\{0, 1\}^n$ avec les valeurs dans $\{0, 1\}$; les opérations $(\circ, \wedge)$ sont respectivement $(\cdot, \cup)$, la relation d'ordre partiel $\prec$ est la relation $\geqslant$ définie par $f \geqslant g$ si

$$f(x_1, ..., x_n) \geqslant g(x_1, ..., x_n)$$

et l'élément neutre est la fonction $e(x_1, ..., x_n) \equiv 1$.

Dans [4] on démontre que, si A est la matrice des conductibilités directes entre les nœuds d'un circuit électrique, alors la matrice A^{p-1} représente la matrice des conductibilités totales entre les nœuds de ce circuit.

Dans [5] on définit la fermeture transitive $\hat{G} = (X, \hat{\Gamma})$ d'un graphe fini $G = (X, \Gamma)$ où l'application $\hat{\Gamma}$ est définie par

$$\hat{\Gamma}x = \{x\} \cup \Gamma x \cup \Gamma x^2 \cup ... \cup \Gamma x^{p-1}$$

pour tout $x \in X$. Dans [6] on démontre que la matrice d'incidence du graphe $\hat{G}$ est A^{p-1}, où A est la matrice unitaire d'incidence associée au graphe G. S est l'algèbre booléenne $\{0, 1\}$ et $(\circ, \wedge, \prec, e)$ sont respectivement $(\cdot, \cup, \geqslant, 1)$.

Dans [7], [5], [8], [3] pour un réseau de transport on définit une application $l(u)$ et une application $c(u)$ sur l'ensemble U des arcs du réseau avec les valeurs dans l'ensemble $\{x \mid x \geqslant 0\}$.

On introduit la matrice $A = \{a_{\alpha\beta}\}_{\alpha,\beta=1,...,p}$ où l'on a : $a_{\alpha\alpha} = 0$; $a_{\alpha\beta} = l(x_\alpha, x_\beta)$ s'il y a un arc qui va de x_α à x_β et $a_{\alpha\beta} = \infty$ en cas contraire.

En considérant le semi-groupe à ordre semi-réticulaire $\{x \mid x \geqslant 0\} \cup \{\infty\}$ avec $(\circ, \wedge, \prec, e)$ donnés par $(+, \min, \leqslant, 0)$, la matrice A^{p-1} représente la matrice des plus petites distances entre les sommets du réseau :

$$\{A^{p-1}\}_{\alpha\beta} = \min_{\mu=(x_\alpha,...,x_\beta)} \left\{ \sum_{u \in \mu} l(u) \right\}$$

On introduit la matrice $A = \{a_{\alpha\beta}\}_{\alpha,\beta=1,...,p}$ avec $a_{\alpha\alpha} = \infty$; $a_{\alpha\beta} = c(x_\alpha, x_\beta)$ si $(x_\alpha, x_\beta) \in U$ et $a_{\alpha\beta} = 0$ si $(x_\alpha, x_\beta) \notin U$.

Le semi-groupe à ordre semi-réticulaire est l'ensemble $\{x \mid x \geqslant 0\} \cup \{\infty\}$ et $(\circ, \wedge, \prec, e)$ sont $(\min, \max, \geqslant, \infty)$. La matrice A^{p-1} représente la matrice des capacités maximales de transport :

$$\{A^{p-1}\}_{\alpha\beta} = \max_{\mu=(x_\alpha,...,x_\beta)} \{\min_{u \in \mu} \{c(u)\}\}$$

On définit une application $p(u)$ sur l'ensemble U des arcs du réseau avec les valeurs dans l'intervalle $[0, 1]$.

Si on définit la matrice A par les relations :

$$a_{\alpha\alpha} = 1;\ a_{\alpha\beta} = p(x_\alpha, x_\beta) \text{ si } (x_\alpha, x_\beta) \in U \text{ et } a_{\alpha\beta} = 0 \text{ si } (x_\alpha, x_\beta) \notin U,$$

alors A^{p-1} représente la matrice des probabilités maximales de la réussite du transport :

$$\{ A^{p-1} \}_{\alpha\beta} = \max_{\mu=(x\alpha,\ldots,x\beta)} \left\{ \prod_{u \in \mu} p(u) \right\}$$

si $S = \{ x \mid 0 \leqslant x \leqslant 1 \}$ et $(\mathrm{o}, \wedge, \prec, e)$ sont donnés par $(\cdot, \max, \geqslant, 1)$.

D'autres méthodes matricielles de calcul de la matrice A^{p-1} sont exposées dans [9]. Il faut remarquer que L. Nolin, en utilisant une structure algébrique semblable, a proposé aussi ([10], p. 94) une généralisation de l'algorithme matriciel de B. Roy (nommé ici l'algorithme de Warshall).

OUVRAGES CITÉS

[1] B. Roy, *Transitivité et connexité,* C. R. Ac. Sc. Paris, t. 249, p. 216-218, 1959.

[2] B. Roy, Cheminement et connexité dans les graphes. Application aux problèmes d'ordonnancement, *Metra,* série spéciale, n° 1, 1962.

[3] Gr. C. Moisil, Asupra unor reprezentări ale grafurilor ce intervin in probleme de economia transporturilor, Comunicările *Acad. R. P. R.*, t. X, n° 8, 1960, p. 647-652.

[4] A. G. Lunts, *Méthodes algébriques d'analyse et de synthèse des schémas à contacts,* Izv. Acad. Nauk SSSR, Série math., 1952, p. 405-427 (en russe).

[5] C. Berge, *Théorie des graphes et ses applications,* Dunod, Paris, 1963.

[6] K. Maghout, Applications de l'algèbre de Boole à la théorie des graphes et aux programmes linéaires et quadratiques, *Cahiers du Centre d'études de Rech. Opérationnelle,* vol. 5, n° 1-2, 1963, Bruxelles.

[7] A. Shimbel, Structure in Communication Nets, *Proc. Symposium on Information Networks* (April 1954), Polytechn. Inst. Brooklyn, N. Y., 1955, p. 199-203.

[8] G. N. Povarov, Notions fondamentales de la théorie des réseaux cumulatifs, *Bul. Inst. Politechnic Iaşi,* t. VI (X), fasc. 1-2, 1960, p. 29-36 (en russe).

[9] I. Tomescu, Sur les méthodes matricielles dans la théorie des réseaux, C. R. Ac. Sc. Paris, t. 263, p. 826-829, 1966.

[10] L. Nolin, Traitement des données groupées, Publication de l'Institut Blaise-Pascal, Paris, mai 1964.

Le directeur de la Publication : Georges Dunod. — *Imprimé en France.*

Dépôt légal : 2e trimestre 1968. N° 5740.

Imprimerie Nouvelle, Orléans. — N° 5708.