

REVUE FRANÇAISE D'INFORMATIQUE ET DE RECHERCHE OPÉRATIONNELLE

F. ROBERT

Calcul du rapport maximal de deux normes sur \mathbf{R}^n

Revue française d'informatique et de recherche opérationnelle,
tome 1, n° 5 (1967), p. 97-118

<http://www.numdam.org/item?id=M2AN_1967__1_5_97_0>

© AFCET, 1967, tous droits réservés.

L'accès aux archives de la revue « Revue française d'informatique et de recherche opérationnelle » implique l'accord avec les conditions générales d'utilisation (<http://www.numdam.org/conditions>). Toute utilisation commerciale ou impression systématique est constitutive d'une infraction pénale. Toute copie ou impression de ce fichier doit contenir la présente mention de copyright.

NUMDAM

Article numérisé dans le cadre du programme
Numérisation de documents anciens mathématiques
<http://www.numdam.org/>

CALCUL DU RAPPORT MAXIMAL DE DEUX NORMES SUR \mathbf{R}^n

par F. ROBERT *

Résumé. — On se propose de déterminer un algorithme de calcul du maximum du quotient de deux normes quelconques données sur \mathbf{R}^n . Dans ce but, on est amené à définir et à caractériser la notion de vecteur et valeur propres d'une norme ou d'un couple de normes. L'algorithme proposé, basé sur la notion de décomposition d'une norme, se réduit à la méthode classique de la puissance itérée lorsque les normes en jeu sont ellipsoïdales.

INDEX DES NOTATIONS

PAGE	
98	$S_{\varphi\psi}$ φ ψ \mathbf{R}^n $\varphi(x)$ $\varphi^*(x)$ $\ Rx\ $
99	τ_x Φ_x λ_x
100	S_{φ^2} $S_{2\varphi^*}$ $S_{\varphi\varphi^*}$ $S_{\varphi\psi}$ $S_{\psi^*\varphi^*}$
	E_M E_{φ^2} $E_{2\varphi^*}$ $E_{\varphi\varphi^*}$
103	$S_{\varphi^*\varphi}$ S_{φ^*2} $S_{2\varphi}$ d_{φ} $\varphi^*(d_{\varphi}(x))$ $\varphi(d_{\varphi}(x))$
106	τ_1 τ_k τ_i τ_j $\tau_{i(p)}$
107	$\tau_{i(p+1)}$ $S(x_0)$ $\alpha(x_0)$ $\tau(x_0)$
111	ψ_x $P(\varphi, \psi)$ $\Lambda(\varphi, \psi)$ $Z(\varphi, \psi)$ $P(\varphi^*, \psi^*)$ $Z(\varphi^*, \psi^*)$
112	$\Lambda(\psi^*, \varphi^*)$ $\frac{1}{S_{\psi\varphi}}$
113	d_{ψ^*} ψ^* $\psi(d_{\psi^*}(x))$ S_{λ}
	τ T_{λ} T_{μ} ν
114	S_{μ} $S(x_0)$ $T(x_0)$ $\alpha(x_0)$
115	$S_{\tau\psi}(A)$ d_{τ}
116	$\varphi_1(Ax)$ $\varphi_{\infty}(x)$ $S_{\varphi_1\varphi_{\infty}}(A)$
117	$\varphi_{\infty}(Ax)\varphi_1(x)$ $S_{\varphi_{\infty}\varphi_1}(A)$ $S_{\varphi_{\infty}\varphi_{\infty}}(A)$

(*) Attaché de Recherches C.N.R.S., Laboratoire de Calcul, Grenoble

Ce travail est un essai de réponse à la question de calcul suivante : Déterminer numériquement la quantité :

$$S_{\varphi\psi} = \text{Sup}_{x \neq 0} \left(\frac{\varphi(x)}{\psi(x)} \right)$$

lorsque φ et ψ sont deux normes données sur \mathbf{R}^n . On sait que cette quantité intervient (parfois sous la forme d'une norme de matrice) dans de nombreuses formules relatives aux procédés numériques linéaires (formules d'erreurs, vitesses de convergence...). On sait aussi que son accès est généralement difficile.

Le plan de l'exposé est le suivant : pour établir, aux sections II et III un algorithme de calcul, nous sommes amenés, en section I, à étudier la notion d'éléments propres d'une norme. La quantité $S_{\varphi\psi}$ cherchée apparaît alors comme la plus grande valeur propre du couple (φ, ψ) et l'algorithme peut s'interpréter comme une extension de la méthode de la puissance itérée, à laquelle il se ramène lorsque les normes en jeu sont ellipsoïdales.

Ce travail a fait l'objet d'une communication, à Lille, au Congrès 1966 de l'A.F.I.R.O. On trouvera ici les démonstrations des propositions énoncées, et les résultats d'expériences numériques.

I. — ELEMENTS PROPRES ET DECOMPOSITION NORMALE D'UNE NORME SUR \mathbf{R}^n

§ 1. — Introduction

Soit $B = R^T R$ une matrice (n, n) symétrique définie positive (R non singulière). L'application :

$$x \in \mathbf{R}^n \rightarrow \varphi(x) = (x^T B x)^{1/2} = \|R x\|$$

est une norme sur \mathbf{R}^n , dont la duale, φ^* , a pour expression :

$$\varphi^*(x) = (x^T B^{-1} x)^{1/2} = \|R^{-1} x\|$$

Les ellipsoïdes de \mathbf{R}^n définis par les équations :

$$\varphi(x) = 1$$

$$\varphi^*(x) = 1$$

ont mêmes axes, à savoir les vecteurs propres de B . Nous appellerons éléments propres de φ les éléments propres de B . La duale φ^* de φ a alors mêmes vecteurs propres que φ et ses valeurs propres sont les inverses des valeurs propres de φ .

Nous allons voir que l'on peut définir, pour une norme quelconque sur \mathbf{R}^n , la notion d'éléments propres avec conservation de la propriété précédente.

§ 2. — Définitions

Soit φ une norme sur \mathbf{R}^n . Un élément non nul $x \in \mathbf{R}^n$ est dit vecteur propre de la norme φ s'il existe un hyperplan π_x , d'appui en x à la boule :

$$\Phi_x = \{ u \in \mathbf{R}^n \mid \varphi(u) \leq \varphi(x) \}$$

et qui soit orthogonal à x . La valeur propre λ_x correspondante est définie par :

$$\lambda_x = \frac{\varphi(x)}{\varphi^*(x)}$$

L'hyperplan π_x , de point courant ν , a pour équation :

$$x^T \nu = \|x\|^2$$

Dire qu'il est d'appui à Φ_x , c'est dire que l'on a :

$$\forall u \in \Phi_x : |x^T u| \leq \|x\|^2$$

§ 3. — Caractérisation des vecteurs propres

Une condition nécessaire et suffisante pour que x soit vecteur propre de la norme φ est que l'on ait :

$$\varphi(x)\varphi^*(x) = \|x\|^2 \tag{3-1}$$

$\alpha)$ Si x est vecteur propre, on a :

$$\varphi^*(x) = \sup_{u \neq 0} \left(\frac{|x^T u|}{\varphi(u)} \right) = \frac{1}{\varphi(x)} \{ \sup_{\{u \mid \varphi(u) = \varphi(x)\}} (|x^T u|) \}$$

or

$$\{ \sup_{\{u \mid \varphi(u) = \varphi(x)\}} (|x^T u|) \} = \|x\|^2$$

d'où :

$$\varphi(x)\varphi^*(x) = \|x\|^2$$

$\beta)$ Si $\varphi(x)\varphi^*(x) = \|x\|^2$ soit $u \in \Phi_x$; alors :

$$|x^T u| \leq \varphi^*(x)\varphi(u) \leq \varphi^*(x)\varphi(x) = \|x\|^2$$

par conséquent π_x est plan d'appui en x à Φ_x .

Ainsi les éléments propres d'une norme sont caractérisés par :

$$\begin{aligned} \varphi(x)\varphi^*(x) &= \|x\|^2 \\ \lambda_x &= \frac{\varphi(x)}{\varphi^*(x)} = \left(\frac{\varphi(x)}{\|x\|} \right)^2 = \left(\frac{\|x\|}{\varphi^*(x)} \right)^2 \end{aligned}$$

Sous cette forme, il est clair qu'une norme et sa duale ont mêmes vecteurs propres, et que leurs valeurs propres sont respectivement inverses.

REMARQUE. — En utilisant l'inégalité de Schwarz, on peut retrouver facilement que les éléments propres d'une norme ellipsoïdale sont ceux de la matrice définie positive qui la définit.

NOTATION. — Si φ et ψ sont deux normes sur \mathbf{R}^n , on posera :

$$S_{\varphi\psi} = \sup_{\substack{x \in \mathbf{R}^n \\ x \neq 0}} \frac{\varphi(x)}{\psi(x)}$$

l'indice « 2 » désigne la norme euclidienne ($\|x\| = (x^T x)^{1/2}$)

$$S_{\varphi 2} = \sup_{\substack{x \in \mathbf{R}^n \\ x \neq 0}} \frac{\varphi(x)}{(x^T x)^{1/2}} \quad ; \quad S_{2\psi} = \sup_{\substack{x \in \mathbf{R}^n \\ x \neq 0}} \frac{(x^T x)^{1/2}}{\psi(x)}$$

§ 4. — Lemme

Pour toute norme φ sur \mathbf{R}^n , on a :

$$S_{\varphi 2} = S_{2\varphi^*} = (S_{\varphi\varphi^*})^{1/2} \quad (4-1)$$

La première relation est bien connue, conséquence de la relation plus générale : $S_{\varphi\psi} = S_{\psi^*\varphi^*}$.

L'inégalité de Hölder permet d'écrire :

$$\frac{1}{\varphi^*(x)} \leq \frac{\varphi(x)}{\|x\|^2}$$

ou encore :

$$\frac{\varphi(x)}{\varphi^*(x)} \leq \left(\frac{\varphi(x)}{\|x\|} \right)^2$$

d'où :

$$S_{\varphi\varphi^*} \leq S_{\varphi 2}^2 = S_{2\varphi^*}^2 \quad (1)$$

Soit alors x_0 tel que $\|x_0\| = S_{2\varphi^*}\varphi^*(x_0)$. On a :

$$\|x_0\|^2 = S_{2\varphi^*} \|x_0\| \varphi^*(x_0) = S_{\varphi 2} \|x_0\| \varphi^*(x_0) \geq \varphi(x_0)\varphi^*(x_0)$$

Cette dernière inégalité, inverse de celle de Hölder, est en fait une égalité. x_0 est donc vecteur propre de φ , d'où :

$$\frac{\varphi(x_0)}{\varphi^*(x_0)} = \left(\frac{\|x_0\|}{\varphi^*(x_0)} \right)^2 = (S_{2\varphi^*})^2$$

et l'on a donc :

$$S_{\varphi\varphi^*} \geq (S_{2\varphi^*})^2 \quad (2)$$

De (1) et (2) résulte bien la relation (4-1). La relation duale s'écrit :

$$S_{\varphi^* 2} = S_{2\varphi} = (S_{\varphi^*\varphi})^{1/2} \quad (4-2)$$

REMARQUES

α) De la définition même, il résulte que toute valeur propre de φ est inférieure ou égale à $S_{\varphi\varphi^*}$. Or nous venons de mettre en évidence un vecteur propre x_0 dont la valeur propre associée est :

$$\frac{\varphi(x_0)}{\varphi^*(x_0)} = (S_{2\varphi^*})^2 = S_{\varphi\varphi^*}$$

Par conséquent, $S_{\varphi\varphi^*}$ est la plus grande valeur propre de la norme φ .

β) La relation (4-1) montre que les rapports

$$\left(\frac{\varphi(x)}{\|x\|}\right)^2 ; \quad \left(\frac{\|x\|}{\varphi^*(x)}\right)^2 ; \quad \frac{\varphi(x)}{\varphi^*(x)}$$

ont même maximum $S_{\varphi\varphi^*}$. Nous allons montrer, dans les paragraphes suivants, que ce maximum est atteint, pour chacun des trois rapports, sur la même partie E_M de \mathbf{R}^n , définie comme l'ensemble des vecteurs propres de φ relatifs à la plus grande valeur propre $S_{\varphi\varphi^*}$.

§ 5. — Définitions

Soit donc les parties suivantes de \mathbf{R}^n :

$$E_{\varphi_2} = \left\{ x \in \mathbf{R}^n ; \frac{\varphi(x)}{\|x\|} = S_{\varphi_2} \right\}$$

$$E_{2\varphi^*} = \left\{ x \in \mathbf{R}^n \quad \frac{\|x\|}{\varphi^*(x)} = S_{2\varphi^*} \right\}$$

$$E_{\varphi\varphi^*} = \left\{ x \in \mathbf{R}^n \quad \frac{\varphi(x)}{\varphi^*(x)} = S_{\varphi\varphi^*} \right\}$$

dont il s'agit de montrer qu'elles coïncident avec E_M .

Le paragraphe précédent permet d'écrire les inclusions suivantes :

$$E_{2\varphi^*} \subset E_{\varphi_2} \tag{5-1}$$

$$E_{2\varphi^*} \subset E_M \subset E_{\varphi\varphi^*} \tag{5-2}$$

§ 6. — Proposition

Si $x_1 \in E_{\varphi_2}$ $\left(\frac{\varphi(x_1)}{\|x_1\|} = S_{\varphi_2}\right)$, x_1 est vecteur propre de φ avec pour valeur propre $S_{\varphi\varphi^*}$.

En effet, soit y tel que :

$$\varphi(x_1) = \frac{|x_1^T y|}{\varphi^*(y)} \tag{1}$$

on a alors :

$$\begin{aligned} |x_1^T y| &= \varphi(x_1) \varphi^*(y) = S_{\varphi^2} \|x_1\| \varphi^*(y) \\ &= \|x_1\| S_{2\varphi^* \varphi^*}(y) \geq \|x_1\| \|y\| \end{aligned}$$

Cette inégalité, inverse de celle de Schwarz, est donc en fait une égalité, et l'on en déduit que y est proportionnel à x_1 . Posant $y = \alpha x_1$, (1) s'écrit :

$$\varphi(x_1) \varphi^*(x_1) = \|x_1\|^2$$

x_1 est donc vecteur propre de φ , avec pour valeur propre :

$$\frac{\varphi(x_1)}{\varphi^*(x_1)} = \left(\frac{\varphi(x_1)}{\|x_1\|} \right)^2 = (S_{\varphi^2})^2 = S_{\varphi\varphi^*}$$

REMARQUE : on a alors :

$$\frac{\|x_1\|}{\varphi^*(x_1)} = \frac{\varphi(x_1)}{\|x_1\|} = S_{\varphi^2} = S_{2\varphi^*}$$

par conséquent :

$$E_{\varphi^2} \subset E_{2\varphi^*} \tag{6-1}$$

§ 7. — Proposition

Si $y_0 \in E_{\varphi\varphi^*}$ $\left(\frac{\varphi(y_0)}{\varphi^*(y_0)} = S_{\varphi\varphi^*} \right)$, y_0 est vecteur propre de φ

En effet :

$$\varphi(y_0) = S_{\varphi\varphi^*} \varphi^*(y_0) = (S_{\varphi^2})^2 \varphi^*(y_0)$$

d'où

$$\varphi^2(y_0) = (S_{\varphi^2})^2 \varphi^*(y_0) \varphi(y_0) \leq (S_{\varphi^2})^2 \|y_0\|^2$$

d'où :

$$\varphi^*(y_0) \varphi(y_0) \leq \|y_0\|^2$$

cette inégalité, inverse de celle de Hölder, entraîne donc que l'on a :

$$\varphi^*(y_0) \varphi(y_0) = \|y_0\|^2$$

y_0 est donc vecteur propre, avec pour valeur propre :

$$\frac{\varphi(y_0)}{\varphi^*(y_0)} = S_{\varphi\varphi^*}$$

et l'on a :

$$\frac{\|y_0\|}{\varphi^*(y_0)} = (S_{\varphi\varphi^*})^{1/2} = S_{2\varphi^*}$$

d'où les inclusions :

$$E_{\varphi\varphi^*} \subset E_M \tag{7-1}$$

$$E_{\varphi\varphi^*} \subset E_{2\varphi^*} \tag{7-2}$$

Alors, des inclusions (5-1), (5-2), (6-1) et (7-1), (7-2) résulte bien que les ensembles $E_{2\varphi^*}$, E_{φ_2} et $E_{\varphi\varphi^*}$ coïncident avec l'ensemble E_M des vecteurs propres de φ relatifs à la plus grande valeur propre $S_{\varphi\varphi^*}$. D'où la :

§ 8. — Proposition

Tout vecteur propre x_0 correspondant à la plus grande valeur propre $S_{\varphi\varphi^*}$ d'une norme φ sur \mathbf{R}^n est caractérisé par les relations :

$$(A) \quad \frac{\varphi(x_0)}{\|x_0\|} = S_{\varphi_2} = S_{2\varphi^*} = \frac{\|x_0\|}{\varphi^*(x_0)} = (S_{\varphi\varphi^*})^{1/2} = \left(\frac{\varphi(x_0)}{\varphi^*(x_0)} \right)^{1/2}$$

REMARQUE

On a alors, pour tout $x \in \mathbf{R}^n$:

$$|x_0^T x| \leq \varphi(x)\varphi^*(x_0) \leq \|x\| \|x_0\| \leq \varphi^*(x)\varphi(x_0)$$

En effet :

$$\varphi^*(x)\varphi(x_0) = \varphi^*(x)S_{\varphi_2} \|x_0\| = (\varphi^*(x)S_{2\varphi^*}) \|x_0\| \geq \|x\| \|x_0\|$$

et

$$\varphi(x)\varphi^*(x_0) = \varphi(x) \frac{\|x_0\|}{S_{2\varphi^*}} = \frac{\varphi(x)}{S_{\varphi_2}} \|x_0\| \leq \|x\| \|x_0\|$$

Il suffit de remarquer que la plus petite valeur propre de la norme φ est l'inverse de la plus grande valeur propre de φ^* pour obtenir, par dualité, la :

§ 9. — Proposition

Tout vecteur propre x_1 correspondant à la plus petite valeur propre $1/S_{\varphi^*\varphi}$ d'une norme φ sur \mathbf{R}^n est caractérisée par les relations :

$$\frac{\varphi^*(x_1)}{\|x_1\|} = S_{\varphi^*\varphi} = S_{2\varphi} = \frac{\|x_1\|}{\varphi(x_1)} = (S_{\varphi^*\varphi})^{1/2} = \left(\frac{\varphi^*(x_1)}{\varphi(x_1)} \right)^{1/2}$$

et l'on a pour tout $x \in \mathbf{R}^n$:

$$|x_1^T x| \leq \varphi^*(x)\varphi(x_1) \leq \|x\| \|x_1\| \leq \varphi(x)\varphi^*(x_1)$$

§ 10. — Décomposition d'une norme

Une norme φ sur \mathbf{R}^n est dite décomposée [2] si l'on connaît une application d_φ de $\mathbf{R}^n - \{0\}$ dans lui-même telle que, pour tout x non nul de \mathbf{R}^n :

$$\varphi(x) = [d_\varphi(x)]^T x$$

On a alors, par application de l'inégalité de Hölder :

$$\varphi(x) = [d_\varphi(x)]^T x \leq \varphi^*(d_\varphi(x))\varphi(x)$$

d'où :

$$\varphi^*(d_\varphi(x)) \geq 1 \tag{10-1}$$

et :

$$\varphi(x) \leq \varphi(d_\varphi(x))\varphi^*(x)$$

d'où :

$$\varphi(d_\varphi(x)) \geq \frac{\varphi(x)}{\varphi^*(x)} \quad (10-2)$$

§ 11. — Décomposition normale et plans d'appui

Une décomposition d_φ de la norme φ est dite *normale* si

$$\forall x \in \mathbf{R}^n - \{0\} \quad , \quad \varphi^*(d_\varphi(x)) = 1$$

Proposition. — Pour qu'une décomposition d_φ soit normale, il faut et il suffit que l'on ait :

$$\forall x \in \mathbf{R}^n - \{0\} \quad ; \quad \forall y \in \mathbf{R}^n \quad , \quad |[d_\varphi(x)]^T y| \leq \varphi(y) \quad (1)$$

α) La condition est nécessaire : en effet, si $\varphi^*(d_\varphi(x)) = 1$ on a :

$$|[d_\varphi(x)]^T y| \leq \varphi^*(d_\varphi(x))\varphi(y) = \varphi(y)$$

β) La condition est suffisante. En effet si la décomposition d_φ satisfait la relation (1) on conclut que $\varphi^*(d_\varphi(x))$ est, pour tout x non nul, inférieur ou égal à 1. On a donc, d'après (10-1) :

$$\forall x \in \mathbf{R}^n - \{0\} \quad \varphi^*(d_\varphi(x)) = 1$$

On peut donner une interprétation géométrique de ce résultat.

Proposition. — Pour qu'une décomposition d_φ d'une norme φ soit normale, il faut et il suffit que, pour tout x non nul de \mathbf{R}^n , l'hyperplan passant par x orthogonal à $d_\varphi(x)$ soit d'appui pour la boule :

$$\Phi_x = \{u : \varphi(u) \leq \varphi(x)\}$$

REMARQUE. — Si la norme φ est une fonction continûment différentiable sur \mathbf{R}^n , il n'existe en chaque point x , qu'un plan d'appui à la boule Φ_x : le plan tangent. Ceci prouve que la décomposition :

$$\varphi(x) = [\text{grad}(\varphi(x))]^T \cdot x \quad (\text{Euler})$$

est la seule décomposition normale de φ .

Les décompositions normales joueront un grand rôle dans la suite.

II. — PROCÉDE ITERATIF POUR LE CALCUL D'UNE VALEUR PROPRE

§ 1. — Introduction

Soit φ , une norme sur \mathbf{R}^n que l'on suppose décomposée normalement :

$$\varphi(x) = [d_\varphi(x)]^T x \quad ; \quad \varphi^*(d_\varphi(x)) = 1$$

Partant d'un vecteur x_0 quelconque non nul de \mathbf{R}^n , envisageons l'itération :

$$x_1 = d_\varphi(x_0) \quad ; \quad x_2 = d_\varphi(x_1) \quad ; \quad \dots x_{p+1} = d_\varphi(x_p) \quad ; \quad \dots$$

on a donc :

$$\varphi(x_p) = [x_{p+1}]^T x_p.$$

§ 2. — Propriétés de cette itération

1) La décomposition étant normale, on a :

$$\varphi^*(x_p) = 1 \quad (p = 1, 2, \dots) \tag{2-1}$$

la suite $x_1, x_2 \dots x_p \dots$ appartient donc au compact $\varphi^*(x) = 1$.

2) On a alors, par application de l'inégalité de Hölder :

$$\varphi(x_p) = [x_{p+1}]^T x_p \leq \varphi(x_{p+1}) \varphi^*(x_p) = \varphi(x_{p+1})$$

d'où

$$\varphi(x_{p+1}) \geq \varphi(x_p) \quad (p = 1, 2, \dots) \tag{2-2}$$

Par conséquent, la suite $\varphi(x_1), \varphi(x_2) \dots \varphi(x_p) \dots$ est croissante et bornée supérieurement par $S_{\varphi\varphi^*}$ donc convergente. Soit α sa limite qui ne dépend que du vecteur x_0 de départ.

3) Considérons alors le cosinus de deux itérés successifs

$$\frac{\varphi(x_p)}{\|x_{p+1}\| \|x_p\|} = \cos(x_{p+1}, x_p) = \frac{x_{p+1}^T x_p}{\|x_{p+1}\| \|x_p\|} \leq 1$$

or, par application de l'inégalité de Hölder :

$$\frac{\varphi(x_p)}{\|x_{p+1}\| \|x_p\|} \geq \frac{\|x_p\|^2}{\varphi^*(x_p) \|x_{p+1}\| \|x_p\|} = \frac{\|x_p\|}{\|x_{p+1}\|}$$

soit

$$\frac{\|x_p\|}{\|x_{p+1}\|} \leq \cos(x_{p+1}, x_p) \leq 1 \tag{2-3}$$

On en déduit que

$\alpha)$ $\|x_p\| \leq \|x_{p+1}\|$. La suite $\|x_1\|, \|x_2\| \dots \|x_p\|$ est donc croissante et bornée par $S_{2\varphi^*}$: elle converge. Soit β sa limite : β ne dépend que du vecteur x_0 de départ.

$\beta)$ la suite des $\|x_p\|$ étant convergente, le rapport $\frac{\|x_p\|}{\|x_{p+1}\|}$ tend vers 1 lorsque p tend vers l'infini.

Alors, d'après (2-3)

$$\lim_{p \rightarrow \infty} (\cos(x_{p+1}, x_p)) = 1 \tag{2-4}$$

or $\cos(x_{p+1}, x_p) = \frac{\varphi(x_p)}{\|x_p\| \|x_{p+1}\|}$. Cette quantité tend vers $\frac{\alpha}{\beta^2}$ lorsque p tend vers l'infini. D'où

$$\alpha = \beta^2 \tag{2-5}$$

γ) On a alors :

$$\begin{aligned}\|x_{p+1} - x_p\|^2 &= \|x_{p+1}\|^2 + \|x_p\|^2 - 2x_{p+1}^T x_p \\ &= \|x_{p+1}\|^2 + \|x_p\|^2 - 2\varphi(x_p) \rightarrow 2\beta^2 - 2\alpha = 0 \\ &\quad (p \rightarrow \infty)\end{aligned}$$

d'où

$$\lim_{p \rightarrow \infty} \|x_{p+1} - x_p\| = 0 \quad (2-6)$$

4) Puisque la suite $x_1 \dots x_p \dots$ appartient au compact $\varphi^*(x) = 1$, nous pouvons en extraire une sous-suite convergente. Soit τ la limite d'une telle sous-suite.

Alors on a :

$$\begin{aligned}\varphi^*(\tau) &= 1 \\ \varphi(\tau) &= \tau^T \tau = \|\tau\|^2 = \alpha\end{aligned}$$

τ est donc vecteur propre de la norme φ avec pour valeur propre α .

5) Par conséquent, pour x_0 fixé, l'ensemble des points d'accumulation de la suite $x_1 \dots x_p \dots$ (c'est-à-dire l'ensemble des limites des sous-suites convergentes) est un ensemble de vecteurs propres relatifs à la valeur propre α .

Supposons cet ensemble fini (hypothèse satisfaite pour tout x_0 si l'ensemble des vecteurs propres de la norme φ est lui-même fini). Nous allons montrer qu'il est alors réduit à un élément. Raisonnant « par l'absurde » notons $\tau_1 \dots \tau_k$ ses éléments.

Puisque les τ_i sont en nombre fini, il existe $\varepsilon > 0$ tel que :

$$\forall i \neq j \|\tau_i - \tau_j\| > \varepsilon \quad (1)$$

1) Puisque $\|x_{p+1} - x_p\| \rightarrow 0$ quand p tend vers l'infini, il existe un rang N_1 à partir duquel deux itérés successifs sont distants, en norme euclidienne, de moins de $\varepsilon/3$ soit :

$$p > N_1 \Rightarrow \|x_{p+1} - x_p\| < \varepsilon/3 \quad (2)$$

2) Puisque l'ensemble $\{\tau_1 \dots \tau_k\}$ des points d'accumulation est fini, il existe un rang N_2 à partir duquel tout point de la suite est distant de moins de $\varepsilon/3$ de l'un des τ_i ; soit :

$$p > N_2 \Rightarrow \exists i(p) : \|x_p - \tau_{i(p)}\| < \varepsilon/3 \quad (3)$$

3) De plus, l'indice $i(p)$ mis en évidence en (3) ne peut rester constant à partir d'un certain rang, car s'il restait constant, tous les x_p seraient, à partir de ce rang, distants de $\tau_{i(p)}$ de moins de $\varepsilon/3$ et resteraient à une distance supérieure de $2\varepsilon/3$ des autres τ_j , qui ne seraient pas points d'accumulation.

Ces remarques nous permettent de choisir un rang p supérieur à N_1 et N_2 tel que $i(p+1) \neq i(p)$. Alors :

$$\begin{aligned} \|\tau_{i(p+1)} - \tau_{i(p)}\| &\leq \|\tau_{i(p+1)} - x_{p+1}\| + \|x_{p+1} - x_p\| + \|x_p - \tau_{i(p)}\| \\ &\leq \varepsilon/3 \qquad \qquad \qquad + \varepsilon/3 \qquad \qquad \qquad + \varepsilon/3 \end{aligned}$$

d'où :

$$\|\tau_{i(p+1)} - \tau_{i(p)}\| \leq \varepsilon \tag{4}$$

Ce résultat contredit (1) puisque $i(p+1) \neq i(p)$.

On conclut donc que la suite $x_1 \dots x_p \dots$ n'admet qu'un seul point d'accumulation τ , vecteur propre de φ relatif à la valeur propre α . La suite $x_1 \dots x_p \dots$ converge donc vers τ .

D'où le :

§ 3. — Théorème

Soit φ une norme sur \mathbf{R}^n , que l'on suppose décomposée normalement :

$$\varphi(x) = [d_\varphi(x)]^T x.$$

x_0 étant un vecteur quelconque (non nul) de \mathbf{R}^n , construisons la suite :

$S(x_0) = \{ x_1 \dots x_p \dots \}$ définie par :

$$x_{p+1} = d_\varphi(x_p)$$

– $S(x_0)$ est contenue dans le compact $\varphi^*(x) = 1$

– La suite $\varphi(x_1) \dots \varphi(x_p) \dots$ est croissante et converge vers le nombre positif $\alpha(x_0)$, valeur propre de φ

$$\lim_{p \rightarrow \infty} \|x_{p+1} - x_p\| = 0$$

– Tout point d'accumulation de la suite $S(x_0)$ est un vecteur propre de φ relatif à la valeur propre $\alpha(x_0)$.

– Si φ n'admet qu'un nombre fini de directions propres, la suite $S(x_0)$ converge, quel que soit le vecteur x_0 de départ vers un vecteur propre $\tau(x_0)$ de la norme φ relatif à la valeur propre $\alpha(x_0)$.

§ 4. — Exemple

Appliquons l'algorithme précédent à la norme ellipsoïdale $\varphi(x) = (x^T Bx)^{1/2}$ (B , symétrique, définie positive).

D'après ce qui précède, la seule décomposition normale est celle du gradient (cf. I, § 11) :

$$d_\varphi(x) = \frac{Bx}{(x^T Bx)^{1/2}}$$

On a donc :

$$x_1 = \frac{Bx_0}{(x_0^T Bx_0)^{1/2}} = \frac{Bx_0}{(x_0^T B B^{-1} Bx_0)^{1/2}} = \frac{Bx_0}{\varphi^*(Bx_0)}$$

et, de la façon générale :

$$x_p = \frac{B^p x_0}{\varphi^*(B^p x_0)}$$

On reconnaît, sous cette forme, l'algorithme de la puissance itérée sur la matrice B . Plaçons-nous dans le cas où B n'a qu'un nombre fini de directions propres. Elle a alors toutes ses valeurs propres distinctes et le théorème précédent, comme le résultat classique, indique la convergence de l'algorithme vers un vecteur propre de B .

§ 5. — Essais numériques

1) Nous avons pris, pour norme φ dans \mathbf{R}^2 , celle dont la boule unité est l'intersection de 4 ellipses :

$$4x^2 + 0,4444 \dots y^2 = 1 \quad (1)$$

$$3,847x^2 + 0,5102 y^2 = 1 \quad (2)$$

$$2,277x^2 + 0,59172 y^2 = 1 \quad (3)$$

$$x^2 + 0,61 y^2 = 1 \quad (4)$$

Et l'on a le tableau de résultats :

p	0	1	2	3	4	5	6
x_p	1 20	0,06388 0,77943	0,10437 0,77675	0,46588 0,73856	1,69862 0,35712	1,99510 0,04660	1,99993 0,00519
$\varphi(x_p)$	15,65247	0,61209	0,62231	1,05513	3,40557	3,99033	3,99988
Numéro ellipse	(4)	(4)	(3)	(2)	(1)	(1)	(1)

7
1,99999 0,00057
3,99999
(1)

Il y a convergence vers le vecteur propre $\begin{vmatrix} 2 \\ 0 \end{vmatrix}$ relatif à la valeur propre

$$S_{\varphi\varphi^*} = 4$$

2) Sur \mathbf{R}^3 , prenons :

$$\varphi(x) = [|x_1|^3 + (2|x_2|)^3 + (3|x_3|)^3]^{1/3}$$

dont la plus grande valeur propre est $S_{\varphi\varphi^*} = 9$.

Nous donnons, pour différents vecteurs de départ, les résultats obtenus :

	p	0	1	2	3	4	5	6
Exemple N° 1	x_p	1 0,06 0,06	0,994992 0,028656 0,096713	0,983682 0,006527 0,250929	0,781240 0,000275 1,372590	0,035832 0 2,986419	0,000016 0 3	0 0 3
	$\varphi(x_p)$	1,002514	1,003210	1,112916	4,127122	8,959257	8,999999	9
N° 2	x_p	1 10 20	0,000271 0,216899 2,928131	0 0,004876 2,999759	0 0,000002 3	0 0 3		
	$\varphi(x_p)$	60,731864	0,878475	0,899928	9,000001	9		
N° 3	x_p	1 1 0	0,231120 1,848963 0	0,003906 1,999674 0	0 2 0			
	$\varphi(x_p)$	2,080083	3,698228	3,99935	4			
N° 4	x_p	1 1 1	0,091720 0,733761 2,476446	0,000152 0,077638 2,984680	0 0,000601 0,999989	0 0 3,000001		
	$\varphi(x_p)$	3,301927	7,448379	8,954055	8,999968	9,000001		

On constate, sur les exemples 1, 2 et 4 la convergence de l'algorithme vers le vecteur propre $\begin{vmatrix} 0 \\ 0 \\ 3 \end{vmatrix}$ relatif à la plus grande des valeurs propres

$$S_{\varphi\varphi^*} = 9$$

Par contre, dans l'exemple 3, le choix du vecteur de départ fait converger l'algorithme vers le vecteur propre $\begin{pmatrix} 0 \\ 2 \\ 0 \end{pmatrix}$ relatif à la valeur propre 4 qui n'est pas la plus grande.

3) Enfin pour la norme sur \mathbf{R}^{10}

$$\varphi(x) = \left(\sum_{i=1}^{10} |ix_i|^5 \right)^{1/5}$$

nous avons obtenu, à partir d'un vecteur x_0 ayant toutes ses composantes égales, au quatrième pas de l'itération :

$$x_4 = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0,357 \cdot 10^{-18} \text{ (zéro machine)} \\ 100,000 \text{ 02} \end{pmatrix}$$

avec $\varphi(x_4) = 100$ à 10^{-6} près.

C'est bien la plus grande valeur propre de φ . On remarque la rapidité de convergence.

III. — ELEMENTS PROPRES D'UN COUPLE DE NORMES SUR \mathbf{R}^n

§ 1. — Introduction

Étant donnée une norme φ sur \mathbf{R}^n , nous nous sommes intéressés aux points x où le plan tangent à la sphère de centre l'origine passant par x est d'appui pour la boule :

$$\Phi_x = \{ u \in \mathbf{R}^n : \varphi(u) \leq \varphi(x) \}$$

et l'algorithme de la section précédente conduit éventuellement ⁽¹⁾ à la détermination numérique de la quantité $S_{\varphi\varphi^*}$.

(1) La question du choix du vecteur de départ conduisant à la plus grande valeur propre, $S_{\varphi\varphi^*}$, reste ouverte. Voir la conclusion de ce travail.

Si φ et ψ sont deux normes données sur \mathbf{R}^n nous nous proposons d'étudier maintenant les points x où passe un plan d'appui commun aux deux boules :

$$\Phi_x = \{ u \in \mathbf{R}^n : \varphi(u) \leq \varphi(x) \}$$

$$\Psi_x = \{ v \in \mathbf{R}^n : \psi(v) \leq \psi(x) \}$$

et, dans le but de déterminer $S_{\varphi\psi}$, nous généraliserons l'algorithme précédemment étudié.

§ 2. — Définitions

Étant donné deux normes φ et ψ sur \mathbf{R}^n , nous appellerons « vecteur propre du couple (φ, ψ) » tout vecteur x non nul de \mathbf{R}^n où passe un plan d'appui commun aux deux boules Φ_x et Ψ_x définies ci-dessus. $P(\varphi, \psi)$ désignera la partie de \mathbf{R}^n formée des vecteurs propres du couple (φ, ψ) .

A tout x appartenant à $P(\varphi\psi)$ nous attacherons la valeur propre :

$$0 < \lambda_x = \frac{\varphi(x)}{\psi(x)}$$

et nous désignerons par $\Lambda(\varphi, \psi)$ l'ensemble des valeurs propres du couple (φ, ψ) .

Il est clair que l'on a $P(\varphi, \psi) = P(\psi, \varphi)$ et que les éléments de $\Lambda(\varphi, \psi)$ sont inverses de ceux de $\Lambda(\psi, \varphi)$.

§ 3. — Caractérisation des éléments de $P(\varphi, \psi)$

Dire que le plan de vecteur normal z , passant par x est d'appui à Φ c'est dire que le vecteur $z/\varphi^*(z)$ décompose (normalement) $\varphi(x)$ soit :

$$z^T x = \varphi(x) \varphi^*(z)$$

Par conséquent, pour que le vecteur x non nul de \mathbf{R}^n appartienne à $P(\varphi, \psi)$ il faut et il suffit qu'il existe z non nul de \mathbf{R}^n tel que :

$$z^T x = \varphi(x) \varphi^*(z) = \psi(x) \psi^*(z) \tag{3-1}$$

on a alors :

$$\lambda_x = \frac{\varphi(x)}{\psi(x)} = \frac{\psi^*(z)}{\varphi^*(z)} \tag{3-2}$$

Désignons par $Z(\varphi, \psi)$ l'ensemble des vecteurs z tels que (3-1) pour $x \in P(\varphi, \psi)$; on a alors :

$$Z(\varphi, \psi) \subset P(\varphi^*, \psi^*)$$

$$P(\varphi, \psi) \subset Z(\varphi^*, \psi^*)$$

Ces inclusions, vraies quelles que soient φ et ψ entraînent donc que l'on a :

$$Z(\varphi, \psi) = P(\varphi^*, \psi^*) \tag{3-3}$$

avec alors

$$\Lambda(\varphi, \psi) = \Lambda(\psi^*, \varphi^*) \quad (3-4)$$

§ 4. — **Éléments extrémaux de $P(\varphi, \psi)$ et $\Lambda(\varphi, \psi)$**

Tout élément λ_x de $\Lambda(\varphi, \psi)$ est donc compris entre $\frac{1}{S_{\psi\varphi}}$ et $S_{\varphi\psi}$. Nous allons montrer que ces valeurs sont atteintes.

Proposition : Soit $x_0 \in \mathbf{R}^n$ tel que :

$$\frac{\varphi(x_0)}{\psi(x_0)} = S_{\varphi\psi}.$$

Alors, tout z non nul de \mathbf{R}^n tel que :

$$(1) \quad z^T x_0 = \varphi(x_0)\varphi^*(z)$$

est tel que :

$$(2) \quad z^T x_0 = \psi(x_0)\psi^*(z).$$

x_0 , par conséquent, appartient à $P(\varphi\psi)$ avec pour valeur propre $S_{\varphi\psi}$, plus grande valeur propre de couple (φ, ψ) . En effet, il existe au moins un z satisfaisant (1) : dire cela, c'est dire qu'existe en x_0 un plan d'appui à Φ_{x_0} . Et l'on a :

$$z^T x_0 = \varphi(x_0)\varphi^*(z) \leq \psi(x_0)\psi^*(z) = \frac{\varphi(x_0)}{S_{\varphi\psi}} \psi^*(z) = \frac{\varphi(x_0)}{S\psi^*\varphi^*} \psi^*(z) \leq \varphi(x_0)\varphi^*(z)$$

D'où le résultat (2). Géométriquement, ceci s'interprète ainsi :

Si $\frac{\varphi(x_0)}{\psi(x_0)} = S_{\varphi\psi}$, tout plan d'appui en x_0 à Φ_{x_0} est d'appui à Ψ_{x_0} .

Par dualité on obtient la :

Proposition

Soit $x_1 \in \mathbf{R}^n$ tel que :

$$\frac{\psi(x_1)}{\varphi(x_1)} = S_{\psi\varphi}$$

Alors $x_1 \in P(\varphi\psi)$ et la valeur propre associée est la quantité $1/S_{\psi\varphi}$, plus petit élément de $\Lambda(\varphi, \psi)$.

§ 5. — **Calcul d'éléments propres d'un couple (φ, ψ) de normes**

Soit d_φ une décomposition normale de la norme φ :

$$\varphi(x) = [d_\varphi(x)]^T x \quad ; \quad \varphi^*(d_\varphi(x)) = 1$$

soit d_{ψ^*} une décomposition normale de la duale ψ^* de la norme ψ :

$$\psi^*(x) = [d_{\psi^*}(x)]^T x \quad ; \quad \psi(d_{\psi^*}(x)) = 1$$

Partant de x_0 quelconque, mais non nul de \mathbf{R}^n , envisageons l'itération suivante :

$$\begin{aligned} y_0 &= d_{\varphi}(x_0) & ; & & x_1 &= d_{\psi^*}(y_0) \\ y_1 &= d_{\varphi}(x_1) & ; & & x_2 &= d_{\psi^*}(y_1) \\ \dots & \dots & & & \dots & \dots \\ y_p &= d_{\varphi}(x_p) & ; & & x_{p+1} &= d_{\psi^*}(y_p) \end{aligned}$$

On a donc :

$$\begin{aligned} \varphi(x_p) &= y_p^T x_p \\ \psi^*(y_p) &= x_{p+1}^T y_p \end{aligned} \tag{5-1}$$

§ 6. — Propriétés de cette itération

1) Les deux décompositions étant normales, on a :

$$\varphi^*(y_p) = 1 \quad \text{et} \quad \psi(x_p) = 1 \quad (p = 1, 2, \dots)$$

2) On a alors, par application de l'inégalité de Hölder :

$$\begin{aligned} \varphi(x_p) &= y_p^T x_p \leq \psi^*(y_p) \psi(x_p) = \psi^*(y_p) \\ \psi^*(y_p) &= x_{p+1}^T y_p \leq \varphi(x_{p+1}) \varphi^*(y_p) = \varphi(x_{p+1}) \end{aligned}$$

d'où les inégalités :

$$\varphi(x_p) \leq \psi^*(y_p) \leq \varphi(x_{p+1}) \quad (p = 1, 2, \dots) \tag{6-1}$$

La suite $\varphi(x_1) \dots \varphi(x_p) \dots$ est croissante et bornée par $S_{\varphi\psi}$: elle converge. Soit α sa limite. Alors la suite croissante $\psi^*(y_1) \dots \psi^*(y_p) \dots$ converge également vers α . α ne dépend que de x_0 .

3) La suite $x_1 \dots x_p \dots$ appartenant au compact $\psi(x) = 1$ nous pouvons en extraire une sous-suite convergente :

$$S_{\lambda} = \{ x_{\lambda_1} \dots x_{\lambda_q} \dots \} \quad (\lambda_{q+1} > \lambda_q)$$

Soit τ la limite de cette sous-suite. Soit T_{λ} la suite de mêmes indices sur les y_p :

$$T_{\lambda} = \{ y_{\lambda_1} \dots y_{\lambda_q} \}$$

De T_{λ} , suite appartenant au compact $\varphi^*(y) = 1$, nous pouvons extraire une sous-suite T_{μ} convergente. Soit ν sa limite.

$$T_{\mu} = \{ y_{\mu_1}, \dots, y_{\mu_q} \dots \} \quad ; \quad (\mu_{q+1} > \mu_q) \quad ; \quad T_{\mu} \subset T_{\lambda}$$

Alors la suite :

$S_{\mu} = \{ x_{\mu_1} \dots x_{\mu_2} \dots \}$ extraite de la suite convergente S_{λ} , a même limite τ . On a :

$$\begin{aligned} \varphi(x_{\mu_q}) &\rightarrow \alpha \\ \psi^*(y_{\mu_q}) &\rightarrow \alpha \\ [y_{\mu_q}]^T x_{\mu_q} &= \varphi(x_{\mu_q}) \\ \psi(x_{\mu_q}) &= \varphi^*(y_{\mu_q}) = 1 \end{aligned}$$

d'où à la limite :

$$v^T \tau = \varphi(\tau) = \psi^*(v) = \alpha \quad (6-2)$$

$$\varphi^*(v) = \psi(\tau) = 1 \quad (6-3)$$

ce qui prouve, d'après (3-1) que :

$$\tau \in P(\varphi, \psi) \quad ; \quad v \in P(\varphi^*, \psi^*) \quad \alpha \in \Lambda(\varphi, \psi) \quad (6-4)$$

Inversement, on peut faire un raisonnement analogue en partant d'une sous-suite convergente de la suite des y_p . D'où le :

§ 7. — Théorème

Soit φ une norme, sur \mathbf{R}^n , admettant la décomposition normale d_{φ} .

Soit ψ une norme sur \mathbf{R}^n , dont la duale ψ^* admet la décomposition normale d_{ψ^*} .

x_0 étant un vecteur de départ quelconque, non nul de \mathbf{R}^n , construisons les deux suites :

$$S(x_0) = \{ x_1, x_2 \dots x_p \dots \}$$

$$T(x_0) = \{ y_0, y_1 \dots y_p \dots \}$$

définies par :

$$y_p = d_{\varphi}(x_p).$$

$$x_{p+1} = d_{\psi^*}(y_p).$$

- $S(x_0)$ est contenue dans le compact $\psi(x) = 1$.
- $T(x_0)$ est contenue dans le compact $\varphi^*(y) = 1$.
- $\varphi(x_p) \leq \psi^*(y_p) \leq \varphi(x_{p+1}) \quad (p = 1, 2 \dots)$
la suite des $\varphi(x_p)$ converge vers le nombre positif $\alpha(x_0)$ et la suite des $\psi^*(y_p)$ également.
- $\alpha(x_0) \in \Lambda(\varphi, \psi)$
- A tout point d'accumulation τ de la suite $S(x_0)$ correspond un point d'accumulation v de la suite $T(x_0)$ lié par les relations :

$$\begin{aligned} v^T \tau &= \varphi(\tau) = \psi^*(v) = \alpha(x_0) \\ \varphi^*(\tau) &= \psi(\tau) = 1 \\ \lambda_{\tau} &= \frac{\varphi(\tau)}{\psi(\tau)} = \alpha(x_0) \end{aligned}$$

Par conséquent $\tau \in P(\varphi, \psi)$ et $\nu \in P(\varphi^*, \psi^*)$

- On a le même résultat en inversant dans le résultat précédent les rôles de $S(x_0)$ et $T(x_0)$.

§ 8. — **Remarque**

Si les normes sont ellipsoïdales

$$\varphi(x) = (x^T B x)^{1/2} \quad ; \quad \psi(y) = (y^T C y)^{1/2}$$

où B et C sont des matrices symétriques définies positives ; on a

$$\psi^*(y) = (y^T C^{-1} y)^{1/2}$$

et

$$d_\varphi(x) = \frac{Bx}{(x^T B x)^{1/2}} \quad ; \quad d_{\psi^*}(y) = \frac{C^{-1}y}{(y^T C^{-1} y)^{1/2}}$$

d'où :

$$y_p = \frac{Bx_p}{(x_p^T B x_p)^{1/2}} \quad x_{p+1} = \frac{C^{-1}y_p}{(y_p^T C^{-1} y_p)^{1/2}}$$

soit

$$x_{p+1} = \frac{C^{-1}Bx_p}{(x_p^T B C^{-1} B x_p)^{1/2}} = \frac{C^{-1}Bx_p}{\psi(C^{-1}Bx_p)}$$

l'algorithme coïncide donc avec la méthode de la puissance itérée sur la matrice $C^{-1}B$; $S_{\varphi\psi}$ est d'ailleurs égale à la racine carrée de $\rho(C^{-1}B)$, rayon spectral de $C^{-1}B$. En effet avec les notations $B = R^T R$ et $C = S^T S$

$$\begin{aligned} S_{\varphi\psi} &= \sup_{x \neq 0} \frac{\|R x\|}{\|S x\|} = \sup_{y \neq 0} \frac{\|R S^{-1} y\|}{\|y\|} = [\rho(S^{-1} R^T R S^{-1})]^{1/2} \\ &= [\rho(S^{-1} S^{-1} R^T R)]^{1/2} = [\rho(C^{-1} B)]^{1/2} \end{aligned}$$

§ 9. — **Application à la recherche de $S_{\tau\psi}(A)$**

τ et ψ étant deux normes sur \mathbf{R}^n , et A une matrice (n, n) régulière, on a :

$$\sup_{x \neq 0} \left(\frac{\tau(Ax)}{\psi(x)} \right) \stackrel{df}{=} S_{\tau\psi}(A) = S_{\varphi\psi}$$

avec $\varphi(x) = \tau(Ax)$ qui est une norme sur \mathbf{R}^n .

Dans le but d'appliquer l'algorithme précédent au couple (φ, ψ) , montrons que si l'on a une décomposition normale d_τ de la norme τ , l'application :

$$x \in \mathbf{R}^n \rightarrow d_\varphi(x) = A^T d_\tau(Ax)$$

est une décomposition normale de la norme φ . En effet :

$$[d_\varphi(x)]^T x = [A^T d_\tau(Ax)]^T x = [d_\tau(Ax)]^T Ax = \tau(Ax) = \varphi(x)$$

et

$$\varphi^*(d_\varphi(x)) = \tau^*(A^{-1} d_\varphi(x)) = \tau^*(A^{-1} A^T d_\tau(Ax)) = \tau^*(d_\tau(Ax)) = 1$$

puisque la décomposition d_τ est normale.

§ 10. — Essais numériques

Dans les quatre exemples suivants, où les normes utilisées sont polyédrales, l'algorithme converge en un pas : à partir du vecteur x_0 , on calcule y_0 et x_1 ; ensuite l'algorithme stationne. On a alors :

$$y_0^T x_1 = \varphi(x_1) = \psi^*(y_0)$$

$$\varphi^*(y_0) = \psi(x_1) = 1$$

x_1 , par conséquent, est vecteur propre du couple (φ, ψ) avec pour valeur propre $\varphi(x_1)$.

Le vecteur de départ x_0 est défini par ses composantes, prises, pour tous les exemples ci-dessous, égales à :

$$x_0^i = \sin(i)$$

1) Dans \mathbf{R}^6 nous avons pris $\varphi(x) = \varphi_1(Ax)$ où φ_1 désigne la norme de la somme des valeurs absolues.

A est la matrice (6×6) de terme $a_{ij} = 6(i - 1) + j$ et $\psi(x) = \varphi_\infty(x)$ (norme du max).

On obtient

$$x_1 = \begin{pmatrix} -1 \\ -1 \\ -1 \\ -1 \\ -1 \\ -1 \end{pmatrix} \quad y_0 = \begin{pmatrix} -96 \\ -102 \\ -108 \\ -114 \\ -120 \\ -126 \end{pmatrix} \quad \varphi(x_1) = \psi^*(y_0) = 666$$

La matrice A étant > 0 on a $S_{\varphi\psi} = S_{\varphi_1\varphi_\infty}(A) = \sum_{i,j} a_{ij} = 666$

On a bien atteint la plus grande valeur propre.

2) Dans \mathbf{R}^6 nous avons pris :

$$A = \begin{pmatrix} 0,053 & -2,0135 & 1,0172 & 1,4521 & -1,3122 & -2,0543 \\ -1,2142 & -1,5676 & 5,0431 & 1,5834 & 3,2172 & -2,2127 \\ -2,0534 & -7,9415 & 6,7123 & -2,1421 & 4,0327 & 0,8754 \\ 3,9835 & 9,1121 & -11,3451 & -10,4520 & 2,9723 & 1,7247 \\ -5,3236 & -3,4962 & 7,5547 & 11,7854 & -6,4131 & 5,1426 \\ 0,2346 & 7,4314 & -8,2154 & 9,3221 & -7,7861 & 4,6817 \end{pmatrix}$$

et :

$$\varphi(x) = \varphi_{\infty}(Ax)$$

$$\psi(x) = \varphi_{\infty}(x)$$

On obtient :

$$x_1 = \begin{vmatrix} 1 \\ 1 \\ -1 \\ -1 \\ 1 \\ 1 \end{vmatrix} \quad y_0 = \begin{vmatrix} 3,9835 \\ 9,1121 \\ -11,3451 \\ -10,4520 \\ 2,9723 \\ 1,7247 \end{vmatrix} \quad \varphi(x_1) = \psi^*(y_0) = 39,5897$$

y_0 est la 4^e ligne, transposée, de la matrice A . La plus grande valeur propre $\text{Max}_i \left\{ \sum_j |a_{ij}| \right\}$ n'est pas atteinte.

3) Pour la même matrice A que ci-dessus, nous avons pris :

$$\varphi(x) = \varphi_{\infty}(Ax)$$

$$\psi(x) = \varphi_1(x)$$

On obtient :

$$x_1 = \begin{vmatrix} 0 \\ 0 \\ -1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{vmatrix} \quad y_0 = \begin{vmatrix} 3,9835 \\ 9,1121 \\ -11,3451 \\ -10,4520 \\ 2,9723 \\ 1,7247 \end{vmatrix} \quad \varphi(x_1) = \psi^*(y_0) = 11,3451$$

Là encore, y_0 est la 4^e ligne, transposée de la matrice A ; la plus grande valeur propre $S_{\varphi\varphi} = S_{\varphi_{\infty}\varphi_1}(A) = \text{Max}_{i,j} |a_{ij}| = 11,7854$ n'est pas atteinte.

4) Dans \mathbf{R}^{50} nous avons pris la matrice A définie par :

$$a_{ij} = \frac{(-1)^{i+j} \times 100}{i \times j} \quad (1 \leq i, j \leq 50)$$

et

$$\varphi(x) = \varphi_{\infty}(Ax)$$

$$\psi(x) = \varphi_{\infty}(x)$$

on obtient, pour y_0 , la 1^{re} ligne, transposée, de A , et $\psi^*(y_0) = 449,92046$
or

$$S_{\varphi_{\infty}\varphi_{\infty}}(A) = \text{Max}_i \left\{ \sum_{j=1}^{50} |a_{ij}| \right\} = \sum_{k=1}^{50} \frac{100}{k} = 449,92046\dots$$

C'est donc la plus grande valeur propre qui a été obtenue.

CONCLUSION (1)

L'algorithme proposé à la section III nécessite en principe la connaissance de décompositions normales de φ et ψ^* , ou du moins le calcul, à chaque pas de l'itération, d'un vecteur de décomposition.

Ceci étant, il conduit toujours à une valeur propre du couple $(\varphi\psi)$ (théorème III-7). Bien entendu, si $\psi^* = \varphi$ l'algorithme devient celui de la section II. On a alors (théorème II-3) quelques résultats supplémentaires sur la convergence du vecteur itéré.

Néanmoins la question du choix du vecteur de départ conduisant à la plus grande valeur propre i.e. la quantité $S_{\varphi\psi}$ cherchée reste ouverte.

Terminons en citant deux exemples caractéristiques de ce qui peut se passer d'un point de vue numérique.

1° Soit, sur \mathbf{R}^2 la norme φ de boule unité :

$$\{ x = (\xi, \eta) \in \mathbf{R}^2 \quad |\xi| \leq \sqrt{2}/2 ; \xi^2 + \eta^2 \leq 1 \}$$

Les vecteurs propres relatifs à la plus grande valeur propre sont les homothétiques non nuls de $(1,0)$. Or partant de $x_0 = (\xi_0, \eta_0)$ avec $|\eta_0| > |\xi_0|$ l'algorithme de la section II stationne ($x_p = x_0$ pour tout p) et l'on n'obtient pas la plus grande valeur propre. L'ensemble des vecteurs de départ « défectueux » (ne conduisant pas à la plus grande valeur propre) n'est donc pas « de mesure nulle » (2).

2° Si la norme φ est ellipsoïdale :

$$\varphi(x) = (x^T B x)^{1/2}$$

l'algorithme de la section II coïncide avec la méthode de la puissance itérée (cf. II, § 4) et l'ensemble des vecteurs de départ défectueux est alors de mesure nulle.

BIBLIOGRAPHIE

- [1] A. S. HOUSEHOLDER, *The theory of Matrices in Numerical Analysis*, Blaisdell Publishing Company, New York, 1964.
- [2] N. GASTINEL, *Matrices du second degré et normes générales en analyse numérique linéaire*, thèse, Publications du Ministère de l'Air. S.D.I.T., 1960, p. 99.
- [3] J. STOER, *On the Characterization of least Upper Bound Norms in Matrix Space*, Numerische Mathematik 6, 1964.
- [4] F. L. BAUER, *On the field of values subordinate to a Norm*, Numerische Mathematik 4, 1962.

(1) Nous reprenons les termes d'une correspondance avec le rapporteur que nous remercions ici de son aide.

(2) Dans le sens suivant : l'ensemble \mathcal{O} des vecteurs de départ défectueux est dit de mesure nulle si $\text{mes}(\mathcal{O} \cap B_\varphi) = 0$ où mes est la mesure de Lebesgue sur \mathbf{R}^n et B_φ la boule unité de la norme φ — ou d'une norme quelconque sur \mathbf{R}^n .