REVUE FRANÇAISE D'INFORMATIQUE ET DE RECHERCHE OPÉRATIONNELLE

ALAIN GHOUILA-HOURI

Sur la généralisation de la notion de commande d'un système guidable

Revue française d'informatique et de recherche opérationnelle, tome 1, nº 4 (1967), p. 7-32

<http://www.numdam.org/item?id=M2AN_1967__1_4_7_0>

R.I.R.O.
(1re année, N° 4, 1967, p. 7-32)

SUR LA GENERALISATION DE LA NOTION DE COMMANDE D'UN SYSTEME GUIDABLE

par Alain GHOUILA-HOURI

Résumé. *— On donne la définition d'une commande-limite d'un système guidable, puis un théorème d'approximation. Le théorème d'existence de la réponse à une commande-limite permet l'étude de problèmes d'existence de commandes-limites optimales. On étudie ensuite la différentiabilité de la réponse par rapport à la commande, ce qui conduit à des conditions nécessaires d'optimalité du type de Pontrjagin. Enfin un algorithme est donné pour la résolution de certains problèmes d'optimalité.*

Le travail que nous présentons ici a été effectué par Alain Ghouila-Houri, décédé prématurément le 3 octobre 1966 à l'âge de 27 ans.

Ancien élève de l'École Polytechnique, Docteur ès Sciences, Alain Ghouila-Houri, qui a été Maître de Conférences à la Faculté des Sciences de Caen, a laissé des travaux bien connus dont notamment : Programmes, Jeux et Réseaux de Transport, *écrit en collaboration avec Claude Berge.*

La présente étude a été réalisée dans le cadre d'une convention de recherche entre la D.G.R.S.T. et la Faculté des Sciences de Caen. Elle a été laissée par l'auteur sous forme de mémoire dactylographié [4]. *Une partie des résultats a fait l'objet d'une communication au Congrès d'Automatique théorique de Paris en 1965* [5].

Ce mémoire a été révisé par une équipe de chercheurs du Laboratoire d'Automatique Théorique de la Faculté des Sciences de Caen, parmi lesquels nous tenons à remercier M. Étienne Lanery pour son précieux concours.

Cet article présente des idées qui s'apparentent à celles de McShane [6], *Gamkrelidze* [3] *et Warga* [7], *mais présente une forte originalité tant par la formalisation des problèmes et les techniques utilisées que par l'unité de pensée qui préside à l'examen des nombreuses questions (théorèmes d'existence, condition d'optimalité, algorithme de résolution) qui y sont abordées.*

§ 1. COMMANDES-LIMITES

On appelle *système guidable* d'ordre n la donnée :

— d'un espace topologique $\mathcal{U}$ appelé *espace de commande*,

— d'une application continue f de $\mathbf{R}^n \times \mathcal{U} \times \mathbf{R}^+$ dans $\mathbf{R}^n$.

Dans tout ce qui suit, nous supposerons que l'*espace* $\mathcal{U}$ *est compact.*

Étant donné un nombre $T > 0$, on appelle *commande mesurable sur l'intervalle* $[0, T]$ toute application mesurable $t \to U(t)$ de $[0, T]$ dans $\mathcal{U}$. Étant donné un point $x_0 \in \mathbf{R}^n$ et une commande mesurable U définie dans l'intervalle $[0, T]$, on considère généralement *l'équation intégrale associée* à x_0 et U, soit

$$X(t) = x_0 + \int_0^t f[X(s), U(s), s]\, ds \qquad (0 \leqslant t \leqslant T). \qquad (1)$$

Dans l'ensemble Q_T^2 des commandes mesurables définies dans l'intervalle $[0, T]$, il faut distinguer l'ensemble Q_T^1 des *commandes continues par morceaux* ; et dans Q_T^1, il faut distinguer l'ensemble Q_T^0 des *commandes à paliers*. On a ainsi $Q_T^0 \subset Q_T^1 \subset Q_T^2$.

Il est bon, pour étudier des problèmes d'existence en théorie de la commande optimale, de définir une structure uniforme convenable sur l'ensemble Q_T^2, ce qui amène ensuite inévitablement à considérer le complété de Q_T^2. Nous allons ici procéder directement, c'est-à-dire que nous définissons d'emblée ce complété.

Définition. — Nous appellerons *commande-limite*, ou plus simplement *commande dans l'intervalle* $[0, T]$ toute mesure de Radon positive sur $[0, T] \times \mathcal{U}$ qui se projette sur $[0, T]$ suivant la mesure de Lebesgue. Nous désignerons par Q_T l'ensemble des commandes-limites ; cet ensemble sera muni de la topologie vague des mesures de Radon : Q_T est ainsi un espace compact.

Nous allons maintenant plonger Q_T^2 dans Q_T. A toute commande mesurable U nous associons la mesure de Radon μ_U sur $[0, T] \times \mathcal{U}$ définie en posant, pour toute fonction numérique continue $(t, u) \to \varphi(t, u)$ définie dans $[0, T] \times \mathcal{U}$:

$$\int \varphi(t, u)\mu_U^{t,u} = \int_0^T \varphi[t, U(t)]\, dt$$

On constate immédiatement que μ_U est positive, et qu'elle se projette sur $[0, T]$ suivant la mesure de Lebesgue. Ce plongement est injectif, en ce sens que si on a $\mu_{U_1} = \mu_{U_2}$, on a $U_1(t) = U_2(t)$ presque partout. En identifiant les éléments de Q_T^2 à leurs images, on obtient ainsi

$$Q_T^0 \subset Q_T^1 \subset Q_T^2 \subset Q_T.$$

Étant donné un point $x_0 \in \mathbf{R}^n$ et une commande $\mu \in Q_T$, nous leur associerons l'équation intégrale

$$X(t) = x_0 + \int_{[0,t]\times\mathcal{U}} f[X(s), u, s]\mu^{s,u} \qquad (0 \leqslant t \leqslant T) \qquad (2)$$

où X est une fonction continue de $[0, T]$ dans $\mathbf{R}^n$.

Si $\mu = \mu_U$ est un élément de Q_T^2, l'équation intégrale (2) s'écrit

$$X(t) = x_0 + \int_0^t f[X(s), U(s), s]\, ds \qquad (0 \leqslant t \leqslant T);$$

on retrouve ainsi, dans ce cas, l'équation intégrale (1).

Théorème 1. — *Q_T^0 est partout dense dans Q_T.*

Soient $\varphi_1, \varphi_2, ..., \varphi_m$ des fonctions numériques continues définies dans $[0, T] \times \mathcal{U}$, et soit un nombre $\varepsilon > 0$. On peut facilement trouver des nombres $t_0 = 0 < t_1 < t_2 < \cdot < t_{r-1} < t_r = T$, et des ensembles boréliens $A_1, A_2, ..., A_s$ formant une partition de $\mathcal{U}$ tels que, quels que soient $i = 1, 2, ..., r$, $j = 1, 2, ..., s$ et $k = 1, 2, ..., m$,

$$\left.\begin{cases} t, t' \in [t_{i-1}, t_i[\\ u, u' \in A_j \end{cases}\right\} \Rightarrow |\varphi_k(u, t) - \varphi_k(u', t')| < \varepsilon$$

Soit μ un élément de Q_T ; posons :

$$k_{ij} = \int_{[t_{i-1},t_i[\times A_j} \mu^{s,u} \qquad (i = 1, 2, ..., r; j = 1, 2, ..., s).$$

On a :

$$\sum_{j=1}^{s} k_{ij} = t_i - t_{i-1} \qquad (i = 1, 2, ..., r).$$

Soient

$$B_{i,j} = [t_{i-1} + \sum_{j'<j} k_{ij'},\ t_{i-1} + \sum_{j'\leqslant j} k_{ij'}[$$

Soient $u_1, u_2, ..., u_s$ des éléments quelconques de $A_1, A_2, ..., A_s$.

Soit $U \in Q_T^0$ définie par

$$U(t) = u_j, \qquad \text{pour} \qquad t \in B_{i,j}.$$

Quels que soient i, j, k le nombre

$$l_{i,j,k} = \int_{B_{i,j}\times\mathcal{U}} \varphi_k(t, u) \cdot \mu_U^{t,u} = \int_{B_{i,j}} \varphi_k(t, u_j)\, dt$$

vérifie

$$k_{ij} \inf \{ \varphi_k(t, u) \mid t \in [t_{i-1}, t_i[, u \in A_j \}$$

$$\leqslant l_{i,j,k} \leqslant k_{ij} \sup \{ \varphi_k(t, u) \mid t \in [t_{i-1}, t_i[, u \in A_j \},$$

et par ailleurs on a :

$$k_{ij} \inf \{ \varphi_k(t, u) \mid t \in [t_{i-1}, t_i[, u \in A_j \}$$
$$\leqslant \int_{[t_{i-1}, t_i[\times A_j} \varphi_k(t, u) \mu^{t,u}$$
$$\leqslant k_{ij} \sup \{ \varphi_k(t, u) \mid t \in [t_{i-1}, t_i[, u \in A_j \}.$$

On a donc :

$$l_{i,j,k} - \int_{[t_{i-1}, t_i[\times A_j} \varphi_k(t, u) \mu^{t,u} \Bigg| \leqslant k_{ij} \varepsilon$$

On a alors, quel que soit $k (k = 1, 2, \ldots, m)$:

$$\left| \int_{[0,T] \times \mathcal{U}} \varphi_k(t, u) \mu^{t,u} - \int_0^T \varphi_k[t, U(t)] \, dt \right|$$
$$\leqslant \varepsilon \sum_{i=1}^{r} \sum_{j=1}^{s} k_{ij} = \varepsilon T.$$

Nous venons de démontrer que tout voisinage d'un élément $\mu \in Q_T$ rencontre Q_T^0 : autrement dit, Q_T^0 est partout dense dans Q_T.

§ 2. EXISTENCE, UNICITE ET CONTINUITE DE LA SOLUTION DE L'EQUATION INTEGRALE

Nous allons d'abord démontrer un lemme. Considérons une application continue $(x_0, \rho, t) \to M(x_0 ; \rho, t)$ de $\mathbf{R}^n \times \mathbf{R}^+ \times \mathbf{R}^+$ dans $\mathbf{R}^+$.

Lemme. — *Il existe une application semi-continue inférieurement $x_0 \to \theta_{x_0}$ de $\mathbf{R}^n$ dans la demi-droite étendue $]0, +\infty]$, et une application continue $(x_0, t) \to \rho(x_0, t)$ définie pour $0 \leqslant t < \theta_{x_0}$, et à valeurs dans $\mathbf{R}^+$, telles que*

$$\rho(x_0, t) \geqslant \int_0^t M[x_0 ; \rho(x_0, s), s] \, ds \tag{3}$$

pour $0 \leqslant t < \theta_{x_0}$.

Posons :

$$N(x_0 ; \rho) = \operatorname*{Max}_{0 \leqslant t \leqslant \rho} M(x_0 ; \rho, t)$$

$$P(x_0 ; \rho) = \operatorname{Max} \{ 1, N(x_0 ; \rho) \}.$$

Les applications $(x_0, \rho) \to N(x_0 ; \rho)$ et $(x_0, \rho) \to P(x_0 ; \rho)$ sont continues.

Considérons maintenant l'application $(x_0, r) \to t(x_0, r)$ définie par

$$t(x_0, r) = \int_0^r \frac{d\rho}{P(x_0\,;\,\rho)}.$$

Cette application est continue, croissante par rapport à r, et sa dérivée partielle par rapport à r est

$$\frac{\partial t(x_0, r)}{\partial r} = \frac{1}{P(x_0, r)} > 0.$$

Il en résulte que si l'on pose :

$$\theta_{x_0} = \int_0^{+\infty} \frac{d\rho}{P(x_0\,;\,\rho)} = \operatorname*{Sup}_{r>0} \int_0^r \frac{d\rho}{P(x_0\,;\,\rho)},$$

l'application $x_0 \to \theta_{x_0}$ de $\mathbf{R}^n$ dans $]0, +\infty]$ est semi-continue inférieurement. D'autre part, soit l'application $(x_0, t) \to \rho(x_0, t)$ définie pour $0 \leqslant t < \theta_{x_0}$ par

$$t[x_0, \rho(x_0, t)] = \int_0^{\rho(x_0,\,t)} \frac{d\rho}{P(x_0\,;\,\rho)} = t.$$

Cette application est continue, et elle vérifie

$$\frac{\partial \rho(x_0\,;\,t)}{\partial t} = P[x_0\,;\,\rho(x_0, \mathrm{t})],$$

et $\rho(x_0, 0) = 0$.

On a alors :

$$\rho(x_0\,;\,t) = \int_0^t P[x_0\,;\,\rho(x_0, s)]\, ds \geqslant \int_0^t ds = t$$

et

$$\rho(x_0, t) = \int_0^t P[x_0\,;\,\rho(x_0, s)]\, ds \geqslant \int_0^t N[x_0\,;\,\rho(x_0, s)]\, ds.$$

Comme on a $s \leqslant \rho(x_0, s)$, on a :

$$M[x_0\,;\,\rho(x_0, s), s] \leqslant N[x_0\,;\,\rho(x_0, s)],$$

d'où

$$\rho(x_0, t) \geqslant \int_0^t M[x_0\,;\,\rho(x_0, s), s]\, ds,$$

ce qui achève la démonstration.

Dorénavant, nous supposerons que $M(x_0\,;\,\rho, t)$ vérifie

$$\|x - x_0\| \leqslant \rho,\ u \in \mathcal{U} \text{ et } t \geqslant 0 \ \Rightarrow\ \|f(x, u, t)\| \leqslant M(x_0\,;\,\rho, t).$$

On pourra prendre par exemple

$$M(x_0\,;\,\rho, t) = \operatorname{Max} \{\, \|f(x, u, t)\| \mid \|x - x_0\| \leqslant \rho,\ u \in \mathcal{U} \,\}.$$

REMARQUE. — Supposons qu'il existe un point $a_0 \in \mathbf{R}^n$ tel que

$$M(a_0, \rho) = \operatorname{Max} \{ \|f(x, u, t)\| \mid \|x - a_0\| \leqslant \rho, u \in \mathfrak{U}, t \geqslant 0 \} < \infty,$$

quel que soit $\rho \geqslant 0$, et supposons en outre que l'on ait

$$\int_\alpha^{+\infty} \frac{d\rho}{M(a_0, \rho)} = +\infty, \qquad \text{pour tout nombre} \quad \alpha > 0.$$

Si alors x_0 est un point quelconque de $\mathbf{R}^n$, on a

$$M(x_0, \rho) \leqslant M(a_0, \rho + \|x_0 - a_0\|) < \infty$$

quel que soit $\rho \geqslant 0$, et aussi

$$\int_\alpha^{+\infty} \frac{d\rho}{M(x_0, \rho)} \geqslant \int_\alpha^{+\infty} \frac{d\rho}{M(a_0, \rho + \|x_0 - a_0\|)}$$
$$= \int_{\alpha + \|x_0 - a_0\|}^{+\infty} \frac{d\rho}{M(a_0, \rho)} = +\infty.$$

Supposons qu'en outre la fonction $M(x_0, \rho)$ soit continue : nous dirons alors que le système vérifie la condition (H).

Supposons que le système vérifie la condition (H). En prenant

$$M(x_0 ; \rho, t) = M(x_0, \rho),$$

on aura

$$N(x_0, \rho) = M(x_0, \rho) \qquad \text{et} \qquad P(x_0, \rho) = \operatorname{Max} \{ 1, M(x_0, \rho) \},$$

d'où

$$\theta_{x_0} = \int_0^{+\infty} \frac{d\rho}{P(x_0, \rho)} = +\infty \qquad \text{quel que soit} \quad x_0 \in \mathbf{R}^n.$$

Nous allons maintenant étudier l'équation intégrale (2), mais dans un cadre un peu plus large que celui que nous avons défini [1]. Désignons par Z_T l'ensemble des mesures de Radon positives sur $[0, T] \times U$ dont la projection sur $[0, T]$ est inférieure ou égale à la mesure de Lebesgue : avec la topologie faible, Z_T est un espace compact, et Q_T est un sous-espace de Z_T. Nous allons étudier l'équation intégrale (2) en prenant pour μ un élément quelconque de Z_T.

Étant donné un ensemble quelconque $A \subset \mathbf{R}^n$, nous poserons

$$\theta_A = \operatorname{Inf} \{ \theta_{x_0} \mid x_0 \in A \}.$$

Si A est borné, on aura :

$$\theta_A \geqslant \operatorname{Min} \{ \theta_{x_0} \mid x_0 \in \bar{A} \} > 0.$$

---

(1) Ce cadre est introduit essentiellement en vue du théorème 5 *bis* du paragraphe 6. *(Note de la Rédaction.)*

Théorème 2. — *Quels que soient $x_0 \in \mathbf{R}^n$, $T \in]0, \theta_{x_0}[$ et $\mu \in Z_T$, l'équation intégrale* (2) *admet au moins une solution vérifiant*

$$\|X(t) - x_0\| \leqslant \rho(x_0, t) \qquad \text{pour} \qquad 0 \leqslant t \leqslant T.$$

Si f est continûment différentiable par rapport à x (1), *alors quels que soient $x_0 \in \mathbf{R}^n$, $T > 0$ et $\mu \in Z_T$, l'équation intégrale* (2) *admet au plus une solution. De plus, si f est continûment différentiable par rapport à x, si A est une partie de $\mathbf{R}^n$, et si T est un nombre vérifiant $0 < T < \theta_A$, l'application $(x_0, \mu, t) \to X[x_0, \mu, t]$ de $A \times Z_T \times [0, T]$ dans $\mathbf{R}^n$ définie par*

$$X[x_0, \mu, t] = x_0 + \int_{[0,\, t] \times \mathcal{U}} f[X[x_0, \mu, s], u, s] \mu^{s,\, u} \; (0 \leqslant t \leqslant T)$$

est continue.

1° Supposons f continûment différentiable, et démontrons l'unicité de la solution. Soient $x_0 \in \mathbf{R}^n$, $T > 0$, $\mu \in Z_T$; et soient ξ_1, ξ_2 deux applications continues de $[0, T]$ dans $\mathbf{R}^n$ vérifiant

$$\xi_i(t) = x_0 + \int_{[0,\, t] \times \mathcal{U}} f[\xi_i(s), u, s] \mu^{s,\, u} \quad (0 \leqslant t \leqslant T)(i = 1, 2).$$

Posons :

$$\rho = \max \{ \|\xi_i(t)\| \mid i = 1, 2 \,;\; 0 \leqslant t \leqslant T \}.$$

Comme f est continûment différentiable par rapport à x, il existe un nombre $k > 0$ tel que

$$\|x_1\|, \|x_2\| \leqslant \rho, \, u \in \mathcal{U} \text{ et } 0 \leqslant t \leqslant T$$
$$\Rightarrow \|f(x_1, u, t) - f(x_2, u, t)\| \leqslant k\|x_1 - x_2\|.$$

On a alors, pour $0 \leqslant t \leqslant T$,

$$\|\xi_1(t) - \xi_2(t)\| \leqslant \int_{[0,\, t] \times \mathcal{U}} \|f[\xi_1(s), u, s] - f[\xi_2(s), u, s]\| \mu^{s,\, u}$$
$$\leqslant k \int_0^t \|\xi_1(s) - \xi_2(s)\| \, ds.$$

Posons :

$$m = \max_{0 \leqslant t \leqslant T} \|\xi_1(t) - \xi_2(t)\|.$$

On a :

$$\|\xi_1(t) - \xi_2(t)\| \leqslant kmt.$$

(1) Lorsque nous indiquons que f est continûment différentiable par rapport à x, cela signifie que la dérivée par rapport à x, $f_x'[x, u, t] \in \mathcal{L}(\mathbf{R}^n, \mathbf{R}^n)$, existe en tout point (x, u, t) et que l'application $(x, u, t) \to f_x'[x, u, t]$ est continue.

On obtient alors immédiatement, par récurrence sur l'entier n,

$$\|\xi_1(t) - \xi_2(t)\| \leqslant m\frac{k^n t^n}{n!} \qquad \text{pour} \qquad 0 \leqslant t \leqslant T.$$

En faisant tendre n vers l'infini, on obtient

$$\|\xi_1(t) - \xi_2(t)\| = 0 \qquad \text{pour} \qquad 0 \leqslant t \leqslant T.$$

2° Dans la dernière partie du théorème, on peut toujours supposer que A est borné. Considérons donc un ensemble borné $A \subset \mathbf{R}^n$, et soit un nombre T vérifiant $0 < T < \theta_A$. Posons

$$k = \operatorname{Max}\{\, M[x_0\,;\, \rho(x_0, t), t] \mid x_0 \in \bar{A}\,;\, 0 \leqslant t \leqslant T \,\}$$

Désignons par $\mathcal{E}$ l'ensemble des applications continues ξ de $[0, T]$ dans $\mathbf{R}^n$ qui vérifient $\xi(0) \in \bar{A}$ et

$$\|\xi(t_2) - \xi(t_1)\| \leqslant k(t_2 - t_1) \qquad \text{pour} \qquad 0 \leqslant t_1 \leqslant t_2 \leqslant T$$

D'après le théorème d'Ascoli, $\mathcal{E}$ est compact pour la topologie de la convergence uniforme.

Sans supposer f continûment différentiable, considérons maintenant l'application $(\mu, \xi) \to B_{\mu,\xi}$ de $Z_T \times \mathcal{E}$ dans l'espace des applications continues de $[0, T]$ dans $\mathbf{R}^n$ définie par

$$B_{\mu,\xi}(t) = \int_{[0,t]\times\mathcal{U}} f[\xi(s), u, s]\mu^{s,u} \qquad \text{pour} \qquad 0 \leqslant t \leqslant T.$$

a) Nous allons montrer que cette application est continue par rapport à μ. Posons :

$$m = \operatorname{Max}\{\, \|f[\xi(t), u, t]\| \mid 0 \leqslant t \leqslant T\,;\, u \in \mathcal{U} \,\}$$

Soit un nombre $\varepsilon > 0$ et soient des nombres

$$t_0 = 0 < t_1 < t_2 < \dots < t_r = T$$

tels que

$$|t_i - t_{i-1}| < \frac{\varepsilon}{3m} \qquad \text{pour} \qquad i = 1, 2, \dots, r.$$

On vérifie que l'ensemble V des éléments $\mu_1 \in Z_T$ tels que

$$\left\|\int_{[0,t_i]\times\mathcal{U}} f[\xi(s), u, s]\mu_1^{s,u} - \int_{[0,t_i]\times\mathcal{U}} f[\xi(s), u, s]\mu^{s,u}\right\| < \frac{\varepsilon}{3}$$

pour $i = 1, 2, \dots, r$ est un voisinage de μ dans Z_T, et on a

$$\mu_1 \in V \Rightarrow \|B_{\mu_1,\xi}(t) - B_{\mu,\xi}(t)\| < \varepsilon \qquad \text{pour} \qquad 0 \leqslant t \leqslant T\,\cdot$$

b) Nous allons montrer maintenant que cette application est continue par rapport à ξ, et cela uniformément par rapport à μ.

Soit $\xi_0 \in \mathcal{E}$, et soit $\varepsilon > 0$. Posons :

$$\rho = \varepsilon + \operatorname*{Max}_{0 \leqslant t \leqslant T} \|\xi_0(t)\|.$$

Comme f est continue, il existe un nombre $\eta > 0$ tel que

$$\|x_1\|, \|x_2\| \leqslant \rho, \quad \|x_1 - x_2\| < \eta, \quad 0 \leqslant t \leqslant T \quad \text{et} \quad u \in \mathcal{U}$$
$$\Rightarrow \|f(x_1, u, t) - f(x_2, u, t)\| < \varepsilon.$$

Quel que soit $\xi \in \mathcal{E}$ vérifiant

$$\|\xi(t) - \xi_0(t)\| \leqslant \operatorname{Min}\{\varepsilon, \eta\} \qquad \text{pour} \qquad 0 \leqslant t \leqslant T,$$

on a, quel que soit $\mu \in Z_T$:

$$\|B_{\mu,\xi}(t) - B_{\mu,\xi_0}(t)\| \leqslant \int_{[0,t]\times\mathcal{U}} \|f[\xi(s), u, s] - f[\xi_0(s), u, s]\| \cdot \mu^{s,u}$$
$$\leqslant \varepsilon t \leqslant \varepsilon T.$$

c) Nous venons de montrer que l'application $(\mu, \xi) \to B_{\mu,\xi}$ est continue. Il en résulte que l'application $(x_0, \mu, \xi) \to \mathbf{A}_{x_0,\mu,\xi}$ de $A \times Z_T \times \mathcal{E}$ dans l'espace des applications continues de $[0, T]$ dans $\mathbf{R}^n$ définie par

$$\mathbf{A}_{x_0,\mu,\xi}(t) = x_0 + B_{\mu,\xi}(t) = x_0 + \int_{[0,t]\times\mathcal{U}} f[\xi(s), u, s]\mu^{s,u}$$

pour $0 \leqslant t \leqslant T$, est continue.

Étant donné un point $x_0 \in A$, désignons par $\mathcal{E}_{x_0}$ l'ensemble des éléments $\xi \in \mathcal{E}$ qui vérifient

$$\xi(0) = x_0 \qquad \text{et} \qquad \|\xi(t) - x_0\| \leqslant \rho(x_0, t) \qquad \text{pour} \qquad 0 \leqslant t \leqslant T;$$

L'ensemble $\mathcal{E}_{x_0}$ est convexe compact.

Montrons que

$$\xi \in \mathcal{E}_x \;\Rightarrow\; \mathbf{A}_{x_0,\mu,\xi} \in \mathcal{E}_{x_0}.$$

Quels que soient t_1, t_2 avec $0 \leqslant t_1 \leqslant t_2 \leqslant T$, on a, si $\xi \in \mathcal{E}_{x_0}$,

$$\|\mathbf{A}_{x_0,\mu,\xi}(t_2) - \mathbf{A}_{x_0,\mu,\xi}(t_1)\| \leqslant \int_{[t_1,t_2]\times\mathcal{U}} \|f[\xi(s), u, s]\|\mu^{s,u}$$
$$\leqslant \int_{t_1}^{t_2} M[x_0\,;\rho(x_0, s), s]\,ds \leqslant k(t_2 - t_1).$$

On a donc $\mathbf{A}_{x_0,\mu,\xi} \in \mathcal{E}$. Par ailleurs on a, pour $0 \leqslant t \leqslant T$,

$$\|\mathbf{A}_{x_0,\mu,\xi}(t) - x_0\| \leqslant \int_{[0,t]\times\mathcal{U}} \|f[\xi(s), u, s]\|\,ds$$
$$\leqslant \int_0^t M[x_0\,;\rho(x_0, s), s]\,ds \leqslant \rho(x_0, t).$$

d) Comme l'application $\xi \to \mathbf{A}_{x_0,\mu,\xi}$ de $\mathcal{E}_{x_0}$ dans $\mathcal{E}_{x_0}$ est continue, alors d'après le théorème du point fixe de Tychonoff, il existe au moins un point $\bar{\xi} \in \mathcal{E}_{x_0}$ tel que $\bar{\xi} = \mathbf{A}_{x_0,\mu,\bar{\xi}}$. Cet élément $\bar{\xi}$ est une solution de l'équation intégrale (2), et la première partie du théorème est démontrée.

e) Supposons f continûment différentiable. Alors, quels que soit $x_0 \in A$ et $\mu \in Z_T$, il existe un élément $\xi_{x_0,\mu} \in \mathcal{E}$ (d'après *d*) et un seul (d'après 1°) tel que $\xi_{x_0,\mu} = \mathbf{A}_{x_0,\mu,\xi_{x_0,\mu}}$. Le graphe de l'application

$$(x_0, \mu) \to \xi_{x_0,\mu}$$

de $A \times Z_T$ dans $\mathcal{E}$ est l'ensemble des triplets (x_0, μ, ξ) appartenant à $A \times Z_T \times \mathcal{E}$ tels que $\xi = \mathbf{A}_{x_0,\mu,\xi}$: ce graphe est fermé. Comme $\mathcal{E}$ est compact, il en résulte que l'application $(x_0, \mu) \to \xi_{x_0,\mu}$ est continue. Or $\xi_{x_0,\mu}$ n'est autre que l'application $t \to X[x_0, \mu, t]$. On voit ainsi que l'application $(x_0, \mu, t) \to X[x_0, \mu, t]$ de $A \times Z_T \times [0, T]$ dans $\mathbf{R}^n$ est continue [1]. C.Q.F.D.

§ 3. EXISTENCE D'UNE COMMANDE OPTIMALE

Soient un compact $K \subset \mathbf{R}^n$ et un nombre T vérifiant $0 \leqslant T \leqslant \theta_K$. Appelons *état accessible à partir de K à l'instant T* tout point de la forme $X[x_0, \mu, T]$ avec $x_0 \in K$ et $\mu \in Q_T$, et soit $\mathcal{X}[K, T]$ l'ensemble des points de cette forme. Désignons par $\mathcal{X}_i[K, T]$ l'ensemble des points de la forme $X[x_0, \mu, T]$ avec $\mu \in Q_T (i = 0, 1, 2)$: on a

$$\mathcal{X}_0[K, T] \subset \mathcal{X}_1[K, T] \subset \mathcal{X}_2[K, T] \subset \mathcal{X}[K, T]$$

Corollaire 1. — $\mathcal{X}_0[K, T]$ *est partout dense dans* $\mathcal{X}[K, T]$.

Corollaire 2. — $\mathcal{X}[K, T]$ *est compact.*

Corollaire 3. — *Si K est connexe,* $\mathcal{X}[K, T]$ *est connexe.*

Corollaire 4. — *Soit* $(F_t)_{t\in[0,T]}$ *une famille quelconque de fermés de* $\mathbf{R}^n$, *et soit g une fonction numérique continue définie dans* $\mathbf{R}^n$. *S'il existe un point* $x_0 \in K$ *et une commande* $\mu \in Q_T$ *tels que*

$$X[x_0, \mu, t] \in F_t \qquad \text{pour} \qquad 0 \leqslant t \leqslant T,$$

alors il existe un point $x_0 \in K$, *et une commande* $\mu \in Q_T$ *tels que*

$$X[x_0, \mu, t] \in F_t \qquad \text{pour} \qquad 0 \leqslant t \leqslant T$$

et tel que $g(X[x_0, \mu, T])$ *soit minimal.*

---

(1) L'auteur démontre, d'une façon plus précise, la continuité de l'application $(x_0, \mu) \to X(x_0, \mu,.)$ de $A \times Z_T$ dans l'ensemble des fonctions continues sur $[0, T]$ muni de la topologie de la convergence uniforme. *(Note de la Rédaction.)*

Corollaire 5. — *Soient F et G deux fermés de $\mathbf{R}^n$, et soit g une fonction numérique continue définie dans $\mathbf{R}^n \times \mathbf{R}^+$. S'il existe un point $x_0 \in K$, une commande $\mu \in Q_T$ et un nombre $\tau \in [0, T]$ tels que $X[x_0, \mu, \tau] \in G$ et $X[x_0, \mu, t] \in F$ pour $0 \leqslant t \leqslant \tau$, alors il existe un triplet $[x_0, \mu, \tau]$ ayant ces propriétés et tel que $g[X[x_0, \mu, \tau], \tau]$ soit minimal.*

§ 4. CAS CONVEXE. SYSTEME CONVEXE ASSOCIE

Théorème 3. — *Si $\mathcal{U}$ est métrisable, et si, quels que soient $x \in \mathbf{R}^n$ et $t \geqslant 0$, l'ensemble $f(x, \mathcal{U}, t)$ est convexe, alors tout point ξ de la forme*

$$\xi = X[x_0, \mu, T],$$

avec $x_0 \in \mathbf{R}^n$, $0 \leqslant T < \theta_{x_0}$ et $\mu \in Q_T$, peut se mettre sous la forme

$$\xi = X[x_0, \nu, T],$$

avec $\nu \in Q_T^2$ (1).

En effet (cf. [1], chap. 6, § 3, n° 1, théorème 1), il existe une application scalairement mesurable $t \to \mu_t$ de $[0, T]$ dans l'ensemble des mesures de Radon positives de norme égale à 1 sur $\mathcal{U}$, telle que, pour toute application continue φ de $[0, T] \times \mathcal{U}$ dans $\mathbf{R}$, on ait :

$$\int \varphi(t, u)\mu^{t,u} = \int_0^T dt \int_{\mathcal{U}} \varphi(t, u)\mu_t^u.$$

Posons alors $\xi(t) = X[x_0, \mu, t]$ pour $0 \leqslant t \leqslant T$. On a :

$$\xi(t) = x_0 + \int_0^t ds \int_{\mathcal{U}} f[\xi(s), u, s]\mu_s^u \qquad \text{pour} \qquad 0 \leqslant t \leqslant T.$$

Posons :

$$g(t) = \int_{\mathcal{U}} f[\xi(t), u, t]\mu_t^u \qquad \text{pour} \qquad 0 \leqslant t \leqslant T.$$

L'application g est une application mesurable de $[0, T]$ dans $\mathbf{R}^n$. Comme $f(x, \mathcal{U}, t)$ est convexe quels que soient $x \in \mathbf{R}^n$ et $t \geqslant 0$ on a

$$g(t) \in f[\xi(t), \mathcal{U}, t].$$

Signalons maintenant un lemme important dû à Wazewski [8].

Lemme. — *Soient un espace compact métrisable $\mathcal{U}$, un intervalle $[a, b] \subset \mathbf{R}$, une application continue $\varphi : [a, b] \times \mathcal{U} \to \mathbf{R}^n$, et une application mesurable $g : [a, b] \to \mathbf{R}^n$. Si on a*

$$g(t) \in \varphi(t, \mathcal{U}) \qquad \textit{pour} \qquad a \leqslant t \leqslant b,$$

(1) On retrouve ainsi un résultat de A. F. Filippov affirmant l'existence d'une commande mesurable optimale dans le cas considéré [2].

alors il existe une application mesurable U de $[a, b]$ dans $\mathcal{U}$ telle que

$$g(t) = \varphi[t, U(t)] \qquad \textit{pour} \qquad a \leqslant t \leqslant b.$$

D'après ce lemme, il existe une application mesurable $t \to U(t)$ de $[0, T]$ dans $\mathcal{U}$ telle que

$$g(t) = f[\xi(t), U(t), t].$$

On a alors :

$$\xi(t) = x_0 + \int_0^t f[\xi(s), U(s), s]\, ds \qquad \text{pour} \qquad 0 \leqslant t \leqslant T,$$

ce qui démontre le théorème.

Si la condition du théorème 3 est vérifiée, nous dirons que le système guidable considéré est *convexe.*

Désignons maintenant par S un système guidable quelconque. Désignons par Σ le système guidable défini par l'espace de commande

$$\mathcal{U}_1 = \mathbf{\Lambda}_{n+1} \times \mathcal{U}^{n+1}$$

(en désignant par $\mathbf{\Lambda}_{n+1}$ l'ensemble des points $\lambda = (\lambda_1, \ldots, \lambda_{n+1}) \in \mathbf{R}^{n+1}$ vérifiant $\sum_{i=1}^{n+1} \lambda_i = 1$ et $\lambda_i \geqslant 0$ pour $1 \leqslant i \leqslant n+1$) et par l'application f_1 ainsi définie :

$$f_1(x\,;\, \lambda, u_1, u_2, \ldots, u_{n+1}\,;\, t) = \sum_{i=1}^{n+1} \lambda_i f(x, u_i, t)$$

Σ est un système convexe : nous dirons que Σ est le *système guidable convexe associé à S.* Quels que soient $x_0 \in \mathbf{R}^n$ et T vérifiant $0 \leqslant T < \theta_{x_0}$, on a, d'après le théorème 3,

$$\mathcal{X}_2^\Sigma(x_0, T) = \mathcal{X}^\Sigma(x_0, T).$$

Corollaire. — *Si $\mathcal{U}$ est métrisable, on a*

$$\mathcal{X}^S(x_0, T) = \mathcal{X}_2^\Sigma(x_0, T) = \mathcal{X}^\Sigma(x_0, T) \text{ (1)}$$

On a évidemment

$$\mathcal{X}_2^S(x_0, T) \subset \mathcal{X}_2^\Sigma(x_0, T) \subset \mathcal{X}^S(x_0, T).$$

Comme $\mathcal{X}_2^\Sigma(x_0, T) = \mathcal{X}^\Sigma(x_0, T)$ est compact, et que $\mathcal{X}_2^S(x_0, T)$ est partout dense dans $\mathcal{X}^S(x_0, T)$, on a $\mathcal{X}_2^\Sigma(x_0, T) = \mathcal{X}^S(x_0, T)$.

(1) On retrouve ainsi un résultat de R. V. Gamkrelidze affirmant que $\mathcal{X}_2{}^S(x_0, T)$ est dense dans $\mathcal{X}_2^\Sigma(x_0, T)$: R. V. Gamkrelidze, « Régimes optimaux glissants », DAN USSR, *143*, 1962, pp. 1243-1245.

Remarque. — Les résultats qui précèdent montrent que les trajectoires X correspondant à des commandes de S peuvent être obtenues de trois manières différentes. En effet, les trois propositions suivantes sont équivalentes.

(1) Il existe une commande $\mu \in Q_T(S)$ telle que $X(t) = X(x_0, \mu, t]$

(2) Il existe une commande mesurable $U \in Q_T^2(\Sigma)$ telle que $X = X[x_0, U, t]$

(3) Il existe une application mesurable φ de $[0, T]$ dans $\mathbf{R}^n$ telle que $X(t) = x_0 + \int_0^t \varphi(s)\, ds$ pour $0 \leqslant t \leqslant T$, et telle que $\varphi(t) \in \Gamma[f[X(t), \mathcal{U}, t]]$ pour $0 \leqslant t \leqslant T$, où $\Gamma[f(x, \mathcal{U}, t)]$ désigne l'enveloppe convexe de $f(x, \mathcal{U}, t)$.

§ 5. DIFFERENTIABILITE DE LA SOLUTION

Dans ce qui suit, x_0 est un point de $\mathbf{R}^n$, ω un voisinage de x_0, T un nombre vérifiant $0 < T < \theta_\omega$; x_0' est un point quelconque de ω ; $\mu_0, \mu_1, \mu_2, \ldots, \mu_r$ sont des éléments de Z_T ; $\lambda_0(t), \lambda_1(t), \ldots, \lambda_r(t)$ sont des applications numériques mesurables positives définies dans $[0, T]$ et vérifiant

$$\sum_{i=0}^{r} \lambda_i(t) \leqslant 1 \qquad \text{pour} \qquad 0 \leqslant t \leqslant T.$$

On désigne par μ l'élément $\sum_{i=0}^{r} \lambda_i(\cdot)\mu_i$ de Z_T : μ est défini par

$$\int \varphi(t, u)\mu^{t,u} = \sum_{i=0}^{r} \int \lambda_i(t)\varphi(t, u)\mu_i^{t,u}$$

quelle que soit φ.

D'autre part, on désigne par $\mathbf{X}$ l'application continue de $[0, T]$ dans l'espace des matrices $n \times n$ définie de manière unique par l'équation intégrale

$$\mathbf{X}(t) = \mathbf{1} + \int_{[t,T]\times\mathcal{U}} \mathbf{X}(s) \cdot f_x'[X[x_0, \mu_0, s], u, s] \cdot \mu_0^{s,u} \qquad (4)$$

pour $0 \leqslant t \leqslant T$.

Nous supposons, bien entendu, que f est continûment différentiable par rapport à x.

Théorème 4. — *On a la formule :*

$\mathbf{X}(\tau) \cdot [X[x_0', \mu, \tau] - X[x_0, \mu_0, \tau]] =$

$$\begin{aligned}\mathbf{X}(0)\cdot(x'_0 - x_0) &+ \sum_{i=1}^{r}\int_{[0,T]\times\mathcal{U}} \lambda_i(t)\mathbf{X}(t)f(X[x_0, \mu_0, t], u, t)\mu_i^{t,u} \\ &- \int_{[0,T]\times\mathcal{U}}[1-\lambda_0(t)]\mathbf{X}(t)f(X[x_0, \mu_0, t], u, t)\mu_0^{t,u} \\ &+ o\left(\|x'_0 - x_0\| + \int_0^T [1-\lambda_0(t)]\, dt\right)\end{aligned} \tag{5}$$

où

$$\frac{\|o(\eta)\|}{\eta} \to 0 \quad \textit{quand} \quad \eta \to 0.$$

Démonstration.[1] — Posons :

$$\xi_0(t) = X[x_0, \mu_0, t], \qquad \xi(t) = X(x'_0, \mu, t], \qquad \zeta(t) = \xi(t) - \xi_0(t)$$

et

$$\eta = \|x'_0 - x_0\| + \int_0^T [1-\lambda_0(t)]\, dt$$

Comme

$$\operatorname*{Max}_{0\leqslant t\leqslant T} \|\zeta(t)\| \to 0 \quad \text{quand} \quad \eta \to 0,$$

on a :

$$f[\xi(s), u, s] = f[\xi_0(s), u, s] + f'_x[\xi_0(s), u, s]\cdot\zeta(s) + \|\zeta(s)\|\, \varepsilon(s, u)$$

avec

$$\varepsilon = \operatorname*{Sup}_{\substack{0\leqslant s\leqslant T\\ u\in\mathcal{U}}} \|\varepsilon(s, u)\| \to 0 \quad \text{quand} \quad \eta \to 0.$$

On en déduit :

$$\begin{aligned}\zeta(t) &= \xi(t) - \xi_0(t) \\ &= x'_0 + \int_{[0,t]\times\mathcal{U}} (f[\xi_0(s), u, s] + f'_x[\xi_0(s), u, s]\zeta(s) + \|\zeta(s)\|\, \varepsilon(s, u))\mu^{s,u} \\ &\qquad - x_0 - \int_{[0,t]\times\mathcal{U}} f[\xi_0(s), u, s]\mu_0^{s,u} \\ &= x'_0 - x_0 + \int_{[0,t]\times\mathcal{U}} f'_x[\xi_0(s), u, s]\cdot\zeta(s)\mu_0^{s,u} \\ &\qquad + \sum_{i=1}^{r}\int_{[0,t]\times\mathcal{U}} \lambda_i(s)f[\xi_0(s), u, s]\mu_i^{s,u}\end{aligned} \tag{6}$$

(1) La rédaction de cette démonstration est due à M. Étienne Lanery.

$$- \int_{[0,t]\times\mathcal{U}} [1 - \lambda_0(s)] f[\xi_0(s), u, s] \mu_0^{s,u} + \varepsilon_1(t)$$

avec

$$\|\varepsilon_1(t)\| \leqslant \int_0^t (2k'[1 - \lambda_0(s)] + \varepsilon) \, \|\zeta(s)\| \, ds \tag{7}$$

où :

$$k' = \underset{\substack{0 \leqslant s \leqslant T \\ u \in \mathcal{U}}}{\mathrm{Max}} \|f'_x[\xi_0(s), u, s]\|$$

En posant :

$$\varphi_1(t) = \sum_{i=1}^{r} \int_{[0,t]\times\mathcal{U}} \lambda_i(s) f[\xi_0(s), u, s] \mu_i^{s,u}$$

$$\varphi_2(t) = \int_{[0,t]\times\mathcal{U}} [1 - \lambda_0(s)] f[\xi_0(s), u, s] \mu_0^{s,u}$$

$$\varphi(t) = \varphi_1(t) - \varphi_2(t) + \varepsilon_1(t)$$

et :

$$\zeta_0 = x'_0 - x_0, \qquad \mathbf{A}(t, u) = f'_x[\xi_0(t), u, t]$$

on obtient :

$$\zeta(t) = \zeta_0 + \int_{[0,t]\times\mathcal{U}} \mathbf{A}(s, u) \cdot \zeta(s) \quad \mu_0^{s,u} + \varphi(t) \tag{8}$$

Étant donné un nombre τ, avec $0 \leqslant \tau \leqslant T$, on a :

$$\int_{[0,\tau]\times\mathcal{U}} \mathbf{X}(t) \cdot \mathbf{A}(t, u) \cdot \zeta(t) \mu_0^{t,u} = \left[\int_{[0,\tau]\times\mathcal{U}} \mathbf{X}(t) \cdot \mathbf{A}(t, u) \mu_0^{t,u}\right] \cdot \zeta_0$$
$$+ \int_{\substack{0 \leqslant t \leqslant \tau \\ 0 \leqslant s \leqslant t \\ u,v \in \mathcal{U}}} \mathbf{X}(t) \cdot \mathbf{A}(t, u) \cdot \mathbf{A}(s, v) \cdot \zeta(s) \quad \mu_0^{t,u} \mu_0^{s,v} \tag{9}$$
$$+ \int_{[0,\tau]\times\mathcal{U}} \mathbf{X}(t) \cdot \mathbf{A}(t, u) \cdot \varphi(t) \quad \mu_0^{t,u}$$

Par ailleurs la relation (4) peut s'écrire :

$$\mathbf{X}(s) = \mathbf{1} + \int_{[s,T]\times\mathcal{U}} \mathbf{X}(t) \cdot \mathbf{A}(t, u) \mu_0^{t,u} \tag{10}$$

ce qui donne :

$$\int_{[0,\tau]\times\mathcal{U}} \mathbf{X}(s) \cdot \mathbf{A}(s, u) \cdot \zeta(s) \quad \mu_0^{s,u} = \int_{[0,\tau]\times\mathcal{U}} \mathbf{A}(s, v) \cdot \zeta(s) \quad \mu_0^{s,v}$$
$$+ \int_{\substack{0 \leqslant s \leqslant \tau \\ s \leqslant t \leqslant T \\ u,v \in \mathcal{U}}} \mathbf{X}(t) \cdot \mathbf{A}(t, u) \cdot \mathbf{A}(s, v), \zeta(s) \quad \mu_0^{t,u} \mu_0^{s,v} \tag{11}$$

En comparant les relations (9) et (11), on obtient :

$$\left[\int_{[0,\tau]\times\mathcal{U}} \mathbf{X}(t) \cdot \mathbf{A}(t, u)\mu_0^{t,u}\right] \cdot \zeta_0$$

$$+ \int_{[0,\tau]\times\mathcal{U}} \mathbf{X}(t) \cdot \mathbf{A}(t, u) \cdot \varphi(t) \quad \mu_0^{t,u} \tag{12}$$

$$- \int_{[0,\tau]\times\mathcal{U}} \mathbf{A}(s, v) \cdot \zeta(s) \quad \mu_0^{s,v}$$

$$= \int_{\substack{\tau\leqslant t\leqslant T\\ 0\leqslant s\leqslant\tau\\ u,v\in\mathcal{U}}} \mathbf{X}(t) \cdot \mathbf{A}(t, u) \cdot \mathbf{A}(s, v) \cdot \zeta(s) \quad \mu_0^{t,u}\mu_0^{s,v}$$

Cette relation (12) peut encore s'écrire, en remarquant que le second membre est égal au produit de deux intégrales, et en tenant compte de relations (8) et (10) :

$$[\mathbf{X}(0) - \mathbf{X}(\tau)] \cdot \xi_0 + \int_{[0,\tau]\times\mathcal{U}} \mathbf{X}(t) \cdot \mathbf{A}(t, u) \cdot \varphi(t)\mu_0^{t,u} + \zeta_0 + \varphi(\tau) - \zeta(\tau)$$
$$= [\mathbf{X}(\tau) - \mathbf{1}][\zeta(\tau) - \zeta_0 - \varphi(\tau)].$$

On obtient ainsi :

$$\mathbf{X}(\tau) \cdot \zeta(\tau) = \mathbf{X}(0) \cdot \zeta_0 + \mathbf{X}(\tau) \cdot \varphi(\tau)$$
$$+ \int_{[0,\tau]\times\mathcal{U}} \mathbf{X}(t) \cdot \mathbf{A}(t, u) \cdot \varphi(t)\mu_0^{t,u} \tag{13}$$

Or on a :

$$\mathbf{X}(\tau) \cdot \varphi_1(\tau) + \int_{[0,\tau]\times\mathcal{U}} \mathbf{X}(t) \cdot \mathbf{A}(t, u) \cdot \varphi_1(t)\mu_0^{t,u}$$

$$= \mathbf{X}(\tau) \cdot \varphi_1(\tau) + \int_{[0,\tau]\times\mathcal{U}} \mathbf{X}(t) \cdot \mathbf{A}(t, u)$$
$$\cdot \left[\sum_{i=1}^{r} \int_{[0,t]\times\mathcal{U}} \lambda_i(s) f[\xi_0(s), v, s]\mu_i^{s,v}\right]\mu_0^{t,u}$$

$$= \mathbf{X}(\tau) \cdot \varphi_1(\tau) + \sum_{i=1}^{r} \int_{[0,\tau]\times\mathcal{U}} \lambda_i(s)\left[\int_{[s,\tau]\times\mathcal{U}} \mathbf{X}(t) \cdot \mathbf{A}(t, u)\mu_0^{t,u}\right]$$
$$\cdot f[\xi_0(s), v, s]\mu_i^{s,v}$$

$$= \mathbf{X}(\tau) \cdot \varphi_1(\tau) + \sum_{i=1}^{r} \int_{[0,\tau]\times\mathcal{U}} \lambda_i(s)[\mathbf{X}(s) - \mathbf{X}(\tau)] \cdot f[\xi_0(s), v, s]\mu_i^{s,v}$$

$$= \sum_{i=1}^{r} \int_{[0,\tau]\times\mathcal{U}} \lambda_i(s)\, \mathbf{X}(s) \cdot f[\xi_0(s), v, s]\mu_i^{s,v} \tag{14}$$

De la même manière, on a :

$$\mathbf{X}(\tau) \cdot \varphi_2(\tau) + \int_{[0,\tau]\times\mathcal{U}} \mathbf{X}(t) \cdot \mathbf{A}(t, u) \cdot \varphi_2(t)\mu_0^{t,u}$$

$$= \int_{[0,\tau]\times\mathcal{U}} [1 - \lambda_0(s)]\, \mathbf{X}(s) \cdot f[\xi_0(s), v, s]\mu_0^{s,v} \qquad (15)$$

En posant :

$$\mathbf{X}(\tau) \cdot \varepsilon_1(\tau) + \int_{[0,\tau]\times\mathcal{U}} \mathbf{X}(t) \cdot \mathbf{A}(t, u) \cdot \varepsilon_1(t)\mu_0^{t,u} = \varepsilon_2(\tau) \qquad (16)$$

on obtient finalement :

$$\mathbf{X}(\tau)\zeta(\tau) = \mathbf{X}(0) \cdot \zeta_0 + \psi(\tau) + \varepsilon_2(\tau)$$

avec :

$$\psi(\tau) = \sum_{i=1}^{r} \int_{[0,\tau]\times\mathcal{U}} \lambda_i(s)\, \mathbf{X}(s) f[\xi_0(s), u, s]\mu_i^{s,u}$$

$$- \int_{[0,\tau]\times\mathcal{U}} [1 - \lambda_0(s)]\, \mathbf{X}(s) f[\xi_0(s), u, s]\mu_0^{s,u}$$

Par conséquent :

$$\|\mathbf{X}(\tau)\zeta(\tau) - \mathbf{X}(0)\zeta_0 - \psi(\tau)\| = \|\varepsilon_2(\tau)\|$$

et il ne reste donc plus qu'à démontrer que $\dfrac{\|\varepsilon_2(\tau)\|}{\eta}$ tend vers 0 quand $\eta \to 0$.

Or, si on pose : $k = \sup\limits_{\substack{s\in[0,T]\\ u\in\mathcal{U}}} \|f(\xi_0(s), u, s)\|$, il résulte des relations (6) et (7) que :

$$\|\zeta(t)\| \leqslant \|x_0 - x'_0\| + \int_0^t k'\|\zeta(s)\|\, ds + 2\int_0^t [1 - \lambda_0(s)]k\, ds$$

$$+ \int_0^t (2k'[1 - \lambda_0(s)] + \varepsilon)\|\zeta(s)\|\, ds.$$

En prenant η suffisamment petit pour que ε soit inférieur à k', on a :

$$2k'[1 - \lambda_0(s)] + \varepsilon \leqslant 3k',$$

et dans ces conditions en remplaçant au besoin k par Max $(k, 1/2)$, on obtient :

$$\|\zeta(t)\| \leqslant 2k\eta + 4k' \int_0^t \|\zeta(s)\|\, ds.$$

Comme la fonction $z(t) = 2k\eta\, e^{4k't}$ vérifie

$$z(t) = 2k\eta + 4k' \int_0^t z(s)\, ds,$$

on a : $\|\zeta(t)\| \leqslant z(t) \leqslant 2k\eta\, e^{4k'T} \qquad \forall\, t \in [0, T]$.

Par conséquent, d'après la relation (7) :

$$\|\varepsilon_1(t)\| \leqslant 2k\eta\, e^{4k'T} \int_0^T (2k'[1 - \lambda_0(s)] + \varepsilon)\, ds, \qquad \forall t \in [0, T].$$

Dans ces conditions, si on pose : $k_1 = \operatorname*{Max}_{o \leqslant t \leqslant T} \|\mathbf{X}(t)\|$, on déduit de la relation (16) :

$$\begin{aligned}\|\varepsilon_2(\tau)\| &\leqslant k_1 \operatorname*{Sup}_{0 \leqslant t \leqslant T} \|\varepsilon_1(t)\| + k_1 k' T \operatorname*{Sup}_{0 \leqslant t \leqslant T} \|\varepsilon_1(t)\| \\ &\leqslant k_1(1 + k'T) 2k\eta\, e^{4k'T} \int_0^T (2k'[1 - \lambda_0(s)] + \varepsilon)\, ds,\end{aligned}$$

d'où il résulte bien que $\dfrac{\|\varepsilon_2(\tau)\|}{\eta} \to 0$ quand $\eta \Rightarrow 0$, puisque ε tend vers zéro avec η.

§ 6. CONDITION NECESSAIRE D'OPTIMALITE

Étant donné que les problèmes d'optimisation admettent en général une solution, mais que cette solution n'est pas toujours une commande mesurable, il est bon d'étendre aux commandes-limites les conditions nécessaires d'optimalité de Pontrjagin. Nous ne traiterons pas ici tous les types de problèmes rencontrés habituellement, mais seulement deux problèmes. L'espace $\mathcal{U}$ sera toujours supposé métrisable.

Problème 1. — *Étant donné un point $x_0 \in \mathbf{R}^n$, un nombre $T > 0$ (avec $T < \theta_{x_0}$) et une fonction différentiable g définie dans $\mathbf{R}^n$, on se propose de trouver $\mu \in Q_T$ tel que $g[X[x_0, \mu, T]]$ soit minimal.*

Désignons par $\bar{\mu}$ une solution de ce problème, et posons

$$\bar{\xi}(t) = X[x_0, \bar{\mu}, t] \qquad \text{pour} \qquad 0 \leqslant t \leqslant T.$$

Soit $\nu \in Q_T$, soit λ une application mesurable de $[0, T]$ dans $[0, 1]$, et soit un nombre α avec $0 < \alpha < 1$. Posons :

$$\mu = \alpha\lambda(\cdot)\nu + [1 - \alpha\lambda(\cdot)]\bar{\mu}.$$

On doit avoir :

$$\lim_{\alpha \to 0} \frac{1}{\alpha}\, g'_x[\bar{\xi}(T)][X[x_0, \mu, T] - \bar{\xi}(T)] \geqslant 0,$$

ce qui entraîne, d'après le théorème 4,

$$g'_x[\bar{\xi}(T)] \cdot \left[\int_{[0,T]\times\mathcal{U}} \lambda(t)\, \mathbf{X}(t) \cdot f[\bar{\xi}(t), u, t]\, \nu^{t,u} - \int_{[0,T]\times\mathcal{U}} \lambda(t)\, \mathbf{X}(t) \cdot f[\bar{\xi}(t), u, t]\bar{\mu}^{t,u}\right] \geqslant 0.$$

Posons alors :

$$\bar{\psi}(t) = -\, g'_x[\bar{\xi}(T)] \cdot \mathbf{X}(t), \qquad \text{pour} \qquad 0 \leqslant t \leqslant T.$$

$\bar{\psi}$ est définie de façon unique par

$$\bar{\psi}(t) = -\, g'_x[\bar{\xi}(T)] + \int_{[t,T]\times\mathcal{U}} \bar{\psi}(s) \cdot f'_x[\bar{\xi}(s), u, s]\bar{\mu}^{s,u} \tag{17}$$

et on a

$$\int_{[0,T]\times U} \lambda(t)\bar{\psi}(t) f[\bar{\xi}(t), u, t][\bar{\mu}^{t,u} - \nu^{t,u}] \geqslant 0$$

quels que soient $\nu \in Q_T$ et λ. On en déduit immédiatement

$$\int_{\mathcal{U}} \bar{\psi}(t) \cdot f[\bar{\xi}(t), u, t]\bar{\mu}_t^u = \operatorname*{Max}_{u\in\mathcal{U}} [\bar{\psi}(t) \cdot f[\bar{\xi}(t), u, t]] \tag{18}$$

presque partout.

On peut donc énoncer :

Théorème 5. — *Pour que $\bar{\mu}$ soit solution de problème* 1, *il est nécessaire que la fonction $\bar{\psi}$ définie par la relation* (17) *vérifie la relation* (18).

Examinons maintenant le cas particulier où le système est stationnaire, c'est-à-dire où $f(x, u, t) = f(x, u)$. Soit $\bar{\mu}$ une solution du problème 1 : posons $\bar{\xi}(t) = X[x_0, \bar{\mu}, t]$. Soit λ une application mesurable de $[0, T]$ dans $[0, 1]$; posons

$$\int_0^t \lambda(s)\, ds = \Lambda(t) \qquad \text{et} \qquad \int_0^T \lambda(t)\, dt = \theta.$$

Soit un élément quelconque $u_0 \in \mathcal{U}$, et soit un nombre quelconque $t_0 \in [0, T]$. Désignons par μ_{λ, u_0, t_0} l'élément de Q_T défini par

$$\int \varphi(t, u)\mu^{t,u}_{\lambda, u_0, t_0} = \int_{[0,t_0]\times\mathcal{U}} \varphi[t - \Lambda(t), u][1 - \lambda(t)]\bar{\mu}^{t,u} + \int_{t_0-\Lambda(t_0)}^{t_0-\Lambda(t_0)+\theta} \varphi(t, u_0)\, dt + \int_{[t_0,T]} \varphi[t - \Lambda(t) + \theta, u][1 - \lambda(t)]\bar{\mu}^{t,u}$$

Posons $\xi(t) = \mathbf{X}[x_0, \mu_{\lambda, u_0, t_0}, t]$. Posons pour $t, \tau \in [0, T]$:

$$\chi(\tau, t) = \begin{cases} 1 & \text{si} \quad 0 \leqslant t \leqslant \tau \\ 0 & \text{si} \quad \tau < t \leqslant T. \end{cases}$$

On a

$$\xi(\tau) = x_0 + \int_{[0,T]\times\mathcal{U}} \chi(\tau, t) f[\xi(t), u] \mu_{\lambda, u_0, t_0}^{t,u} \qquad \text{pour} \qquad 0 \leqslant \tau \leqslant T.$$

Pour $0 \leqslant \tau \leqslant t_0 - \Lambda(t_0)$, on obtient

$$\xi(\tau) = x_0 + \int_{[0,t_0]\times\mathcal{U}} \chi(\tau, t - \Lambda(t)) f[\xi(t - \Lambda(t)), u][1 - \lambda(t)] \bar{\mu}^{t,u}$$

Pour $0 \leqslant t' \leqslant t_0$, on obtient ainsi

$$\xi[t' - \Lambda(t')] = x_0 + \int_{[0,t']\times\mathcal{U}} f[\xi(t - \Lambda(t)), u][1 - \lambda(t)] \mu^{t,u}$$

Si on désigne par μ_λ l'élément $[1 - \lambda(.)]\bar{\mu}$ de Z_T, on obtient

$$\xi[t' - \Lambda(t')] = X[x_0, \mu_\lambda, t'],$$

d'où en particulier

$$\xi[t_0 - \Lambda(t_0)] = X[x_0, \mu_\lambda, t_0].$$

On a alors (cf. le théorème 4) :

$$\mathbf{X}(t_0) \cdot [\xi(t_0 - \Lambda(t_0)) - \bar{\xi}(t_0)] = - \int_{[0,t_0]\times\mathcal{U}} \lambda(t) \mathbf{X}(t) f[\bar{\xi}(t), u] \bar{\mu}^{t,u} + o(\theta).$$

Par ailleurs, on a

$$\begin{aligned} &\xi[t_0 - \Lambda(t_0) + \theta] - \xi[t_0 - \Lambda(t_0)] = \\ &\quad = \int_{[0,T]\times\mathcal{U}} [\chi(t_0 - \Lambda(t_0) + \theta, t) - \chi(t_0 - \Lambda(t_0), t)] f[\xi(t), u] \mu_{\lambda, u_0, t_0}^{t,u} \\ &\quad = \int_{t_0 - \Lambda(t_0)}^{t_0 - \Lambda(t_0) + \theta} f[\xi(t), u_0]\, dt = \theta f[\bar{\xi}(t_0), u_0] + o(\theta) \end{aligned}$$

On obtient ainsi

$$\begin{aligned} \mathbf{X}(t_0) \cdot [\xi(t_0 - \Lambda(t_0) + \theta) - \xi(t_0)] = - \int_{[0,t_0]\times\mathcal{U}} \lambda(t) \mathbf{X}(t) \cdot f[\bar{\xi}(t), u] \bar{\mu}^{t,u} \\ + \theta \mathbf{X}(t_0) f[\bar{\xi}(t_0), u_0] + o(\theta). \end{aligned}$$

Enfin on a, pour $\tau \geqslant t_0 - \int_0^{t_0} \lambda(s)\, ds + \theta$,

$$\begin{aligned} &\xi(\tau) - \xi(t_0 - \Lambda(t_0) + \theta) \\ &\quad = \int_{[0,T]\times\mathcal{U}} [\chi(\tau, t) - \chi(t_0 - \Lambda(t_0) + \theta, t)] f[\xi(t), u] \mu_{\lambda, u_0, t_0}^{t,u} \end{aligned}$$

$$= \int_{[t_0, T] \times \mathcal{U}} \chi(\tau, t - \Lambda(t) + \theta) f[\xi(t - \Lambda(t) + \theta, u][1 - \lambda(t)]\bar{\mu}^{t,u}$$

Ainsi, pour $t' \geqslant t_0$, on a, en posant $\tau = t' - \Lambda(t') + \theta$,

$$\xi(t' - \Lambda(t') + \theta) =$$
$$= \xi(t_0 - \Lambda(t_0) + \theta) + \int_{[t_0, t'] \times \mathcal{U}} f[\xi(t - \Lambda(t) + \theta), u][1 - \lambda(t)]\bar{\mu}^{t,u}.$$

On obtient ainsi $\xi(t' - \Lambda(t') + \theta) = \zeta(t')$ pour $t' \geqslant t_0$, où ζ est définie par

$$\zeta(t') = \zeta(t_0) + \int_{[t_0, t'] \times \mathcal{U}} f[\zeta(t), u][1 - \lambda(t)]\bar{\mu}^{t,u} \qquad (t_0 \leqslant t' \leqslant T)$$

Comme $\int_0^T \lambda(s)\, ds = \theta$, on a $\xi(T) = \zeta(T)$, ce qui donne, d'après le théorème 4 :

$$\xi(T) - \bar{\xi}(T) = \mathbf{X}(t_0)[\xi(t_0 - \Lambda(t_0) + \theta) - \bar{\xi}(t_0)]$$
$$- \int_{[t_0, T] \times \mathcal{U}} \lambda(t)\mathbf{X}(t) f[\bar{\xi}(t), u]\bar{\mu}^{t,u} + o(\theta),$$

c'est-à-dire :

$$\xi(T) - \bar{\xi}(T) = \theta \mathbf{X}(t_0) \cdot f[\bar{\xi}(t_0), u_0]$$
$$- \int_{[0, T] \times \mathcal{U}} \lambda(t)\mathbf{X}(t) f[\bar{\xi}(t), u]\bar{\mu}^{t,u} + o(\theta) \quad (19)$$

On doit avoir, quels que soient λ, u_0 et t_0, $g(\xi(T) - g(\bar{\xi}(T)) \geqslant 0$. En posant $\lambda(t) = \alpha\lambda_0(t)$, $\theta = \alpha\theta_0$, et en faisant tendre α vers 0, on obtient :

$$- \theta_0 \bar{\psi}(t_0) \cdot f[\bar{\xi}(t_0), u_0] + \int_{[0, T] \times \mathcal{U}} \lambda_0(t)\bar{\psi}(t) f[\bar{\xi}(t), u]\bar{\mu}^{t,u} \geqslant 0.$$

On peut donc énoncer :

Théorème 5 *bis*. — *Dans le cas stationnaire, pour que $\bar{\mu}$ soit solution du problème 1, il est nécessaire que la fonction $\bar{\psi}$ définie par*

$$\bar{\psi}(t) = - g'_x[\bar{\xi}(T)] + \int_{[t, T] \times \mathcal{U}} \bar{\psi}(s) \cdot f'_x[\bar{\xi}(s), u]\bar{\mu}^{s,u}$$

vérifie presque partout

$$\int_{\mathcal{U}} \bar{\psi}(t) \cdot f[\bar{\xi}(t), u]\bar{\mu}_t^u = \operatorname*{Max}_{u \in \mathcal{U}} [\bar{\psi}(t) \cdot f[\bar{\xi}(t), u] = H_0, \qquad (20)$$

ou H_0 est une constante.

Problème 2. — *Étant donné un point $x_0 \in \mathbf{R}^n$, et une fonction différentiable g définie dans $\mathbf{R}^n \times \mathbf{R}^+$, on se propose de trouver $T > 0$ (avec $T < \theta_{x_0}$) et $\mu \in Q_T$ tels que $g[X[x_0, \mu, T], T]$ soit minimal.*

Désignons par $(\bar{\mu}, \bar{T})$ une solution de ce problème ; et posons $\bar{\xi}(t) = X[x_0, \bar{\mu}, t]$. Il est évident que la condition nécessaire du théorème 5 est vérifiée. Mais il y a ici une condition supplémentaire. En effet, quel que soit θ avec $0 < \theta < \bar{T}$, on doit avoir

$$g[\bar{\xi}(\bar{T} - \theta), \bar{T} - \theta] - g[\bar{\xi}(\bar{T}), \bar{T}] \geqslant 0,$$

ce qui entraîne que

$$- g'_t[\bar{\xi}(\bar{T}), \bar{T}] - g'_x[\bar{\xi}(\bar{T}), \bar{T}] \cdot \left[\frac{1}{\theta}\int_{[\bar{T}-\theta, \bar{T}]\times\mathfrak{U}} f[\bar{\xi}(t), u, t]\bar{\mu}^{t,u}\right]$$

tend vers une valeur positive quand $\theta \to 0$.

Or on a $- g'_x[\bar{\xi}(\bar{T}), \bar{T}] = \bar{\psi}(\bar{T})$ et d'après (18),

$$\lim_{\theta\to 0}\frac{1}{\theta}\int_{[\bar{T}-\theta, \bar{T}]\times\mathfrak{U}} \bar{\psi}(\bar{T}) \cdot f[\bar{\xi}(t), u, t]\bar{\mu}^{t,u} = \operatorname*{Max}_{u\in\mathfrak{U}} \bar{\psi}(\bar{T}) \cdot f[\bar{\xi}(\bar{T}), u, \bar{T}]$$

On obtient ainsi $\operatorname*{Max}_{u\in\mathfrak{U}} [\bar{\psi}(\bar{T}) \cdot f[\bar{\xi}(\bar{T}), u, \bar{T}] \geqslant g'_t[\bar{\xi}(\bar{T}), \bar{T}]$.

Par ailleurs, quel que soit $u \in \mathfrak{U}$, on doit avoir :

$$g'_t[\bar{\xi}(\bar{T}), \bar{T}] + g'_x[\bar{\xi}(\bar{T}), \bar{T}]f[\bar{\xi}(\bar{T}), u, \bar{T}] \geqslant 0,$$

cela équivaut à

$$\operatorname*{Max}_{u\in\mathfrak{U}} \bar{\psi}(\bar{T}) \cdot f[\bar{\xi}(\bar{T}), u, \bar{T}] \leqslant g'_t[\bar{\xi}(\bar{T}), \bar{T}].$$

En définitive, on peut énoncer :

Théorème 6. — *Pour que $(\bar{\mu}, \bar{T})$ soit solution du problème 2, il est nécessaire que la fonction $\bar{\psi}$ définie par*

$$\bar{\psi}(t) = - g'_x[\bar{\xi}(\bar{T}), \bar{T}] + \int_{[t, \bar{T}]\times\mathfrak{U}} \bar{\psi}(s) \cdot f'_x[\bar{\xi}(s), u, s]\bar{\mu}^{s,u} \quad (21)$$

vérifie

$$\int_{\mathfrak{U}} \bar{\psi}(t) \cdot f[\bar{\xi}(t), u, t]\bar{\mu}_t^u = \operatorname*{Max}_{u\in\mathfrak{U}} [\bar{\psi}(t) \cdot f[\bar{\xi}(t), u, t]] \quad (22)$$

presque partout et

$$\operatorname*{Max}_{u\in\mathfrak{U}} [\bar{\psi}(\bar{T}) \cdot f[\bar{\xi}(\bar{T}), u, \bar{T}]] = g'_t[\bar{\xi}(\bar{T}), \bar{T}] \quad (23)$$

Remarque. — Bien entendu, si le système est stationnaire, on doit avoir presque partout :

$$\int_{\mathfrak{U}} \bar{\psi}(t) \cdot f[\bar{\xi}(t), u]\bar{\mu}_t^u = \operatorname*{Max}_{u\in\mathfrak{U}} \bar{\psi}(t) \cdot f[\bar{\xi}(t), u] = g'_t[\bar{\xi}(\bar{T}), \bar{T}]$$

§ 7. UNE METHODE DIRECTE DE RESOLUTION DU PROBLEME 1 DANS LE CAS STATIONNAIRE

Nous allons exposer une méthode permettant de construire, à partir d'une commande mesurable $V_r \in Q_T^2$, une nouvelle commande mesurable $V_{r+1} \in Q_T^2$ vérifiant $g(X[x_0, V_{r+1}, T]) \leqslant g(X[x_0, V_r, T])$. Nous supposerons que le système est *stationnaire*, c'est-à-dire que $f(x, u, t) = f(x, u)$.

Désignons par ψ^r la solution de l'équation intégrale

$$\psi^r(t) = -g'_x(X[x_0, V_r, T]) + \int_t^T \psi^r(s) \cdot f'_x[X[x_0, V_r, s], V_r(s)]\, ds \qquad (0 \leqslant t \leqslant T)$$

Soient $t_r \in [0, T]$ et $u_r \in \mathcal{U}$ tels que

$$\psi^r(t_r) \cdot f[X[x_0, V_r, t_r], u_r] = \underset{\substack{t \in [0,T] \\ u \in \mathcal{U}}}{\operatorname{Max}} \psi^r(t) \cdot f[X[x_0, V_r, t], u].$$

Soit un nombre quelconque θ avec $0 \leqslant \theta \leqslant T$. Désignons par I_r^θ un ensemble mesurable de $[0, T]$, de mesure de Lebesgue égale à θ, et vérifiant

$$t \in I_r^\theta \text{ et } t' \notin I_r^\theta \Rightarrow \psi^r(t) \cdot f[X[x_0, V_r, t], V_r(t)] \leqslant \psi^r(t') \cdot f[X[x_0, V_r, t'], V_r(t')].$$

Quel que soit $t \in [0, T]$, désignons par $\tau_r^\theta(t)$ la mesure de l'ensemble $[0, t] \cap \complement I_r^\theta$. Soit $V_r^\theta \in Q_T^2$ définie par

$$\begin{aligned}
V_r^\theta[\tau_r^\theta(t)] &= V_r(t) && \text{pour} \quad 0 \leqslant t < t_r. \\
V_r^\theta(t) &= u_r && \text{pour} \quad \tau_r^\theta(t_r) \leqslant t < \tau_r^\theta(t_r) + \theta \\
V_r^\theta[\tau_r^\theta(t) + \theta] &= V_r(t) && \text{pour} \quad t_r \leqslant t \leqslant T.
\end{aligned}$$

Pour chaque valeur de θ, calculons $g(X[x_0, V_r^\theta, T])$, et désignons par θ_r la valeur pour laquelle $g(X[x_0, V_r^\theta, T])$ atteint son minimum. Posons alors $V_{r+1} = V_r^{\theta_r}$. On a :

$$g(X[x_0, V_{r+1}, T]) \leqslant g(X[x_0, V_r, T]).$$

Remarque. — Si $V_r \in Q_T^1$, alors $V_{r+1} \in Q_T^1$. Si $V_r \in Q_T^0$, alors $V_{r+1} \in Q_T^0$.

Avec la méthode que nous avons exposée, on peut construire une suite $V_0, V_1, \ldots, V_r, \ldots$ de commandes mesurables. Nous allons montrer que $g[X[x_0, V_r, T]]$ converge, par valeurs décroissantes, vers

$g[X[x_0, \bar{\mu}, T]]$, où $\bar{\mu} \in Q_T$ est une commande vérifiant les conditions nécessaires du théorème 5 *bis*.

Posons

$$\lambda_r^\theta(t) = \begin{cases} 1 & \text{si} \quad t \in I_r^\theta \\ 0 & \text{si} \quad t \notin I_r^\theta \end{cases}$$

et

$$\Lambda_r^\theta(t) = \int_0^t \Lambda_r^\theta(s)\, \mathrm{d}s$$

Nous identifions λ_r^θ avec la mesure de Radon sur $[0, T]$ dont elle est la densité. Désignons par λ_r l'application $\theta \to \lambda_r^\theta$ de $[0, T]$ dans l'ensemble $L(T)$ des mesures de Radon positives de norme inférieure ou égale à T sur $[0, T]$.

Considérons la suite de terme général $(V_r, t_r, u_r, \lambda_r)$, avec $V_r \in Q_T$, $t_r \in [0, T]$, $u_r \in \mathcal{U}$, $\lambda_r \in \mathcal{F}_s[[0, T], L(T)]$, où $\mathcal{F}_s([0, T], L(T))$ désigne l'ensemble des applications de $[0, T]$ dans $L(T)$, avec la topologie de la convergence simple. Cette suite admet au moins une valeur d'adhérence $(\bar{\mu}, \bar{t}, \bar{u}, \bar{\lambda})$. Il nous suffira de montrer que $\bar{\mu}$ vérifie les conditions nécessaires du théorème 5 *bis* : en effet, comme la suite de terme général $g[X[x_0, V_r, T]]$ est décroissante, elle tend vers $g[X[x_0, \bar{\mu}, T]]$.

L'élément $\bar{\lambda}$ est une application $\theta \to \bar{\lambda}^\theta$ de $[0, T]$ dans $L(T)$. Quel que soit θ, $\bar{\lambda}^\theta$ est une mesure de densité inférieure ou égale à 1 par rapport à la mesure de Lebesgue dont nous désignerons aussi par $\bar{\lambda}^\theta$ la densité ; on a $\int_0^T \bar{\lambda}^\theta(t)\, \mathrm{d}t = \theta$. On posera $\int_0^t \bar{\lambda}^\theta(s)\, \mathrm{d}s = \bar{\Lambda}^\theta(t)$.

Désignons par $\bar{\psi}$ la solution de l'équation intégrale

$$\bar{\psi}(t) = -g'_x[X[x_0, \bar{\mu}, T]] + \int_{[t, T] \times \mathcal{U}} \bar{\psi}(s) \cdot f'_x[X[x_0, \bar{\mu}, s], u]\bar{\mu}^{s,u}.$$

Soient $t_0 \in [0, T]$, $u_0 \in \mathcal{U}$, $\theta \in [0, T]$ et λ une application mesurable de $[0, T]$ dans $[0, 1]$, telle que

$$\int_0^T \lambda(t)\, \mathrm{d}t = \theta$$

On a :

$$\psi^r(t_0) \cdot f[[X[x_0, V_r, t_0], u_0] - \frac{1}{\theta}\int_0^T \lambda(t)\psi^r(t) \cdot f[X[x_0, V_r, t], V_r(t)]\, \mathrm{d}t$$

$$\leqslant \psi^r(t_r) \cdot f[[X[x_0, V_r, t_r], u_r] - \frac{1}{\theta}\int_0^T \lambda_r^\theta(t)\psi^r(t) \cdot f[X[x_0, V_r, t], V_r(t)]\, \mathrm{d}t$$

En passant à la valeur d'adhérence, on obtient

$$\bar{\psi}(t_0) \cdot f[X[x_0, \bar{\mu}, t_0], u_0] - \frac{1}{\theta}\int_{[0, T] \times \mathcal{U}} \lambda(t)\bar{\psi}(t) \cdot f[X[x_0, \bar{\mu}, t], u]\bar{\mu}^{t,u}$$

$$\leqslant \bar{\psi}(\bar{t}) \cdot f[X[x_0, \bar{\mu}, \bar{t}], \bar{u}]$$
$$- \frac{1}{\theta} \int_{[0,T]\times \mathcal{U}} \bar{\lambda}^{\theta}(t)\bar{\psi}(t) \cdot f[X[x_0, \bar{\mu}, t], u]\bar{\mu}^{t,u}. \quad (24)$$

Remarquons maintenant que, pour toute fonction continue $\varphi(t, u)$ définie dans $[0, T] \times \mathcal{U}$, on a, quelque soit $\theta \in [0, T]$,

$$\int_0^T \varphi[t, V_r^\theta(t)]\, dt = \int_0^{t_r} \varphi[t - \Lambda_r^\theta(t), V_r(t)][1 - \lambda_r^\theta(t)]\, dt$$
$$+ \int_{t_r - \Lambda_r^\theta(t_r)}^{t_r - \Lambda_r^\theta(t_r) + \theta} \varphi(t, u_r)\, dt + \int_{t_r}^T \varphi[t - \Lambda_r(t) + \theta, V_r(t)][1 - \lambda_r^\theta(t)]\, dt.$$

Par ailleurs on a, par construction, quel que soit $\theta \in [0, T]$,

$$g[X[x_0, V_{r+1}, T]] \leqslant g[X[x_0, V_r^\theta, T]],$$

En passant à la valeur d'adhérence, on obtient

$$g[X[x_0, \bar{\mu}, T]] \leqslant g[X[x_0, \bar{\mu}_0, T]],$$

où $\bar{\mu}_\theta \in Q_T$ est définie par

$$\int_{[0,T]\times \mathcal{U}} \varphi(t, u)\bar{\mu}_\theta^{t,u} = \int_{[0,\bar{t}]\times \mathcal{U}} \varphi[t - \bar{\Lambda}^\theta(t), u][1 - \bar{\lambda}^\theta(t)]\bar{\mu}^{t,u}$$
$$+ \int_{\bar{t} - \bar{\Lambda}^\theta(\bar{t})}^{\bar{t} - \bar{\Lambda}^\theta(\bar{t}) + \theta} \varphi(t, \bar{u})\, dt + \int_{[\bar{t},T]\times \mathcal{U}} \varphi[t - \bar{\Lambda}^\theta(t) + \theta, u][1 - \bar{\lambda}^\theta(t)]\bar{\mu}^{t,u}$$

Or, d'après la formule (19), on a

$$X[x_0, \bar{\mu}_\theta, T] - X[x_0, \bar{\mu}, T] = \theta \mathbf{X}(\bar{t}) f[X[x_0, \bar{\mu}, \bar{t}], \bar{u}]$$
$$- \int_{[0,T]\times \mathcal{U}} \bar{\lambda}^\theta(t)\, \mathbf{X}(t) \cdot f[X[x_0, \bar{\mu}, t], u]\bar{\mu}^{t,u} + o(\theta),$$

où $\mathbf{X}(t)$ est définie par l'équation intégrale

$$\mathbf{X}(t) = \mathbf{1} + \int_{[t,T]\times \mathcal{U}} \mathbf{X}(s) \cdot f'_x[X[x_0, \bar{\mu}, s], u]\bar{\mu}^{s,u}.$$

On obtient ainsi

$$0 \geqslant g[X[x_0, \bar{\mu}, T]] - g[X[x_0, \bar{\mu}_\theta, T]]$$
$$= - g'_x[X[x_0, \bar{\mu}, T]] \cdot [X[x_0, \bar{\mu}_\theta, T] - X[x_0, \bar{\mu}, T]] + o(\theta)$$
$$= \theta \bar{\psi}(\bar{t}) \cdot f[X[x_0, \bar{\mu}, \bar{t}], \bar{u}]$$
$$- \int_{[0,T]\times \mathcal{U}} \bar{\lambda}^\theta(t)\bar{\psi}(t) \cdot f[X[x_0, \bar{\mu}, t], u]\bar{\mu}^{t,u} + o(\theta) \qquad (25)$$

Reprenons $t_0 \in [0, T]$ et $u_0 \in \mathcal{U}$. Soit λ_0 une application mesurable de $[0, T]$ dans $[0, 1]$ et $\theta_0 = \int_0^T \lambda_0(t)\, dt$. Appliquons la relation (24) avec $\lambda = \alpha\lambda_0$ et $\theta = \alpha\theta_0$ où $\alpha \in [0, 1]$. On obtient :

$$\bar{\psi}(t_0) \cdot f[X[x_0, \bar{\mu}, t_0], u_0] - \frac{1}{\theta_0} \int_{[0,T]\times\mathcal{U}} \lambda_0(t)\bar{\psi}(t) \cdot f[X[x_0, \bar{\mu}, t], u]\bar{\mu}^{t,u}$$

$$= \bar{\psi}(t_0) \cdot f[X[x_0, \bar{\mu}, t_0], u_0] - \frac{1}{\theta} \int_{[0,T]\times\mathcal{U}} \alpha\lambda_0(t)\bar{\psi}(t) \cdot f[X[x_0, \bar{\mu}, t], u]\bar{\mu}^{t,u}$$

$$\leqslant \bar{\psi}(\bar{t}) \cdot f[X[x_0, \bar{\mu}, \bar{t}], \bar{u}] - \frac{1}{\theta} \int_{[0,T]\times\mathcal{U}} \bar{\lambda}^{\theta}(t)\bar{\psi}(t) \cdot f[X[x_0, \bar{\mu}, t], u]\bar{\mu}^{t,u}$$

D'après la relation (25), le dernier membre est majoré par une quantité qui tend vers 0 quand θ tend vers 0, c'est-à-dire quand α tend vers 0. On obtient donc la relation

$$\bar{\psi}(t_0) \cdot f[X[x_0, \bar{\mu}, t_0], u_0] - \frac{1}{\theta_0} \int_{[0,T]\times\mathcal{U}} \lambda_0(t)\bar{\psi}(t) \cdot f[X[x_0, \bar{\mu}, t], u]\bar{\mu}^{t,u} \leqslant 0.$$

Comme cette inégalité est vérifiée quels que soient t_0, u_0 et λ_0, on obtient que la fonction

$$\operatorname*{Max}_{u\in\mathcal{U}} \bar{\psi}(t) \cdot f[X[x_0, \bar{\mu}, t], u] = \int_{\mathcal{U}} \bar{\psi}(t) \cdot f[X[x_0, \bar{\mu}, t], u]\bar{\mu}_t^u$$

est constante presque partout. Les conditions nécessaires du théorème 5 *bis* sont donc bien vérifiées.

BIBLIOGRAPHIE

[1] Bourbaki, N., Intégration.

[2] Filippov, A. F., On certain questions in the theory of optimal control, *Journal Siam Control Serie A*, vol. 1, nº 1 (1962). Préalablement publié dans *Vestnik Moskov. Univ. Ser. Mat. Mech. Astr.*, 2 (1959), pp. 25-32.

[3] Gamkrelidze, R. V., Optimal Sliding régimes, Dokl. Akad. Nauk SSSR, 143 (1962).

[4] Ghouila-Houri, A., *Problèmes d'existence en théorie de la commande*, Laboratoire d'Automatique théorique, Faculté des Sciences de Caen, UCAT 65-05 (1965).

[5] Ghouila-Houri, A., *Problèmes d'existence en théorie de la commande*, Congrès d'Automatique théorique (Paris, 1965), Dunod éditeur.

[6] McShane, E., Generalized curves. *Duke Math. J.*, 6, pp. 513-536 (1940).

[7] Warga, J., Relaxed variational Problems, *Journal of Math. Anal. and Appl.*, 4, pp. 111-128 (1962).

[8] Wazewski, T., Sur une condition d'existence des fonctions implicites mesurables. *Bull. Ac. Pol. Sc.*, vol. 9, nº 12 (1961).