

# REVUE FRANÇAISE D'INFORMATIQUE ET DE RECHERCHE OPÉRATIONNELLE

F. LAPSCHER

## **Fonctions booléennes très incomplètes. Représentation par des sommes de monômes**

*Revue française d'informatique et de recherche opérationnelle*,  
tome 1, n° 4 (1967), p. 73-86

[http://www.numdam.org/item?id=M2AN\\_1967\\_\\_1\\_4\\_73\\_0](http://www.numdam.org/item?id=M2AN_1967__1_4_73_0)

© AFCET, 1967, tous droits réservés.

L'accès aux archives de la revue « Revue française d'informatique et de recherche opérationnelle » implique l'accord avec les conditions générales d'utilisation (<http://www.numdam.org/conditions>). Toute utilisation commerciale ou impression systématique est constitutive d'une infraction pénale. Toute copie ou impression de ce fichier doit contenir la présente mention de copyright.

NUMDAM

Article numérisé dans le cadre du programme  
Numérisation de documents anciens mathématiques  
<http://www.numdam.org/>

# FONCTIONS BOOLEENNES TRES INCOMPLETES REPRESENTATION PAR DES SOMMES DE MONOMES

par F. LAPSCHER

*Attaché de Recherche au C.N.R.S. Institut de Mathématiques Appliquées, Grenoble*

## I. — MONOMES PREMIERS D'UNE FONCTION INCOMPLETE

### 1. Fonction booléenne très incomplète

Une fonction incomplète  $f$  est définie par la donnée de deux fonctions complètes comparables  $\underline{f}$  et  $\bar{f}$ , avec  $\underline{f} \leq \bar{f}$ , qui sont ses bornes inférieure et supérieure. Désignons par  $p$  et  $s$  les nombres de points de chacune d'elles et par  $n$  le nombre de variables.

Une donnée équivalente est celle de  $\underline{f}$  et du complément  $\bar{f}'$  contenant  $q = 2^n - s$  points.

La fonction  $f$  vaut 1 sur les  $p$  points de  $\underline{f}$ , 0 sur les  $q$  points de  $\bar{f}'$ . Nous disons qu'elle est très incomplète si le rapport  $\frac{p+q}{2^n}$  du nombre de points où elle est définie au nombre total de points est petit, par exemple inférieur à  $\frac{1}{10}$ .

### 2. Monôme premier d'une fonction incomplète

Tout monôme premier de  $\bar{f}$  dont l'intersection avec  $\underline{f}$  n'est pas vide.

Les monômes premiers sont les monômes maximaux ayant une intersection non vide avec  $\underline{f}$  et vide avec  $\bar{f}'$ .

### 3. Base première d'une fonction incomplète

Toute somme irrédondante de monômes premiers supérieure à  $\underline{f}$ .

#### 4. Coût d'une expression

D'une manière générale, nous mesurons le coût d'une expression en sommes et produits par le nombre de lettres qu'elle contient (différent du nombre de variables).

#### 5. Expression minimale

Une expression représentant une fonction et à laquelle on impose éventuellement certaines conditions, est dite minimale s'il n'en existe pas d'autre, représentant la fonction, satisfaisant les mêmes conditions et d'un coût moindre.

#### 6. Qualité d'une expression

C'est le rapport  $\rho = \frac{m}{l}$  du nombre  $m$  de points de  $\underline{f}$  qu'elle couvre à son coût  $l$ .

CAS D'UN MONÔME. — Pour une fonction de  $n$  variables, si  $\underline{f}$  contient  $p$  points, la qualité de tout monôme est telle que

$$\frac{1}{n} \leq \rho \leq p.$$

#### 7. Monômes premiers équivalents

Il s'agit de monômes premiers  $\mu$  et  $\mu_1$  tels que :

$$\mu \underline{f} = \mu_1 \underline{f}.$$

Nous définissons ainsi une relation d'équivalence entre monômes premiers.

Pour une base, la propriétés d'être première n'est pas modifiée par le remplacement d'un monôme premier par un monôme premier équivalent.

#### 8. Monômes premiers principaux

Ce sont les monômes premiers qui, dans chaque classe d'équivalence, ont un coût minimal.

Toute base première de coût minimal est composée uniquement de monômes premiers principaux.

#### 9. Monôme premier distingué

Tout monôme premier  $\mu$  tel qu'il n'existe aucun autre monôme premier  $\mu_1$  avec

$$\mu_1 \underline{f} \geq \mu \underline{f}$$

$$\text{Coût } [\mu_1] \leq \text{Coût } [\mu]$$

l'une au moins des inégalités étant stricte.

PROPRIÉTÉ 1. — Pour toute partie de  $\underline{f}$ , les monômes premiers distingués sont ceux dont la qualité est maximale.

Cette propriété est caractéristique.

La qualité s'écrit encore

$$\rho = \frac{|\mu f|}{\text{Coût} [\mu]}$$

PROPRIÉTÉ 2. — Tout monôme premier distingué est principal.

PROPRIÉTÉ 3. — A toute base première d'un coût donné correspond une base première de coût au plus égal composée uniquement de monômes premiers distingués.

A tout monôme premier non distingué de la base donnée correspond, en effet, au moins un monôme premier distingué couvrant son intersection avec  $\underline{f}$ . Le remplacement d'un monôme premier par l'autre ne peut que faire diminuer le coût.

### 10. Majorant d'un ensemble de points [2]

THÉORÈME-DÉFINITION. — Soit  $E$  un ensemble de points.

L'ensemble des monômes incluant  $E$  constitue une famille de Moore puisque :

— l'hypercube entier  $\mathcal{E}$  est un monôme incluant  $E$ ,

— l'intersection de deux monômes incluant  $E$  est un monôme incluant  $E$ .

Il existe donc dans la famille de Moore ainsi définie un monôme minimal incluant  $E$ . Nous le nommons majorant de  $E$  et le notons  $M(E)$ .

CALCUL DU MAJORANT. —  $E$  étant donné sous forme  $SP$ ,  $M(E)$  est le « plus grand diviseur commun » des monômes de  $E$ .

### 11. Majorant d'un ensemble dans un autre

Soient deux ensembles  $E$  et  $F$ . L'ensemble des monômes inclus dans  $F$  et incluant  $E$ , s'il n'est pas vide, constitue une famille de Moore dont l'élément minimal est dit majorant de  $E$  dans  $F$ . S'il est vide, nous dirons que le majorant de  $E$  dans  $F$  n'existe pas.

EXEMPLE. —  $ab + ac$  a pour majorant  $a$  dans  $a + b$ , n'a pas de majorant dans  $b + c$ , ni dans  $abc$ .

DÉFINITION. — Nous nommons majorant d'une fonction incomplète  $(\underline{f}, \bar{f})$  tout majorant dans  $\bar{f}$  d'une partie de  $\underline{f}$ .

PROPRIÉTÉ 1. — Pour qu'une partie de  $\underline{f}$  soit couvrable par au moins un monôme de  $\bar{f}$ , il faut et il suffit qu'elle ait un majorant dans  $\bar{f}$ .

PROPRIÉTÉ 2. — Deux monômes premiers équivalents couvrent les mêmes majorants.

La recherche des monômes premiers équivalents peut donc se faire par l'intermédiaire de celle des majorants.

**THÉORÈME.** — Les monômes premiers de coût minimal couvrant un majorant sont principaux.

## 12. Composantes intérieurement connexes

Nous réalisons une partition de la borne inférieure en rangeant dans une même classe tout couple  $(P, Q)$  de points tels qu'il existe au moins une chaîne  $(P_0 = P, P_1, P_2, \dots, P_{n-1}, P_n = Q)$  de points de  $\underline{f}$ , deux points consécutifs de la chaîne admettant un majorant dans  $\underline{f}$ .

Nous nommons composantes intérieurement connexes les classes ainsi obtenues.

La propriété suivante montre que la recherche des monômes premiers de  $(\underline{f}, \bar{f})$  se ramène à celles des monômes premiers de chacune de ses composantes intérieurement connexes.

**PROPRIÉTÉ.** — Soit un ensemble de fonctions incomplètes ayant même borne supérieure et des bornes inférieures disjointes ou non. Considérons la fonction incomplète ayant même borne supérieure et dont la borne inférieure est l'union des bornes inférieures. L'ensemble de ses monômes premiers est la réunion des ensembles de monômes premiers de chacune des fonctions données.

La démonstration se fait très simplement en utilisant la définition du § 2.

### REMARQUES

1. Deux composantes intérieurement connexes distinctes n'ont aucun monôme premier commun.

2. Le consensus de deux monômes appartenant à deux composantes intérieurement connexes distinctes a une intersection vide avec  $\underline{f}$ .

3. Les questions d'équivalence, de principalité et de distinction (§§ 7, 8, 9) peuvent se traiter séparément pour chaque composante intérieurement connexe.

4. Une partie de  $\underline{f}$  n'a de majorant dans  $\bar{f}$  que si tous ses points appartiennent à la même composante intérieurement connexe.

## 13. Partie couvrable de $\underline{f}$

Toute partie de  $\underline{f}$  qui admet un majorant dans  $\bar{f}$ .

## 14. Bornes du coût et de la qualité d'un monôme premier

**MAJORANT DU COÛT.** — Si  $\bar{f}'$  contient  $q$  points, ses formes  $SP$  minimales contiennent au plus  $q$  monômes. En effet, soient  $m_1, m_2, \dots, m_q$  les monômes canoniques et  $\mu_1, \mu_2, \dots, \mu_q$  une base première. On ne peut avoir  $q_1 > q$  car, si à chaque monôme  $m_i$  nous faisons correspondre l'un des monômes  $\mu_j$

qui le couvrent, nous obtenons un ensemble de monômes  $\mu_j$  couvrant la fonction et en nombre au plus égal à  $q$  puisque certains peuvent être répétés.

Pour obtenir tous les monômes premiers de  $\bar{f}$ , parmi lesquels se trouvent ceux de  $(\underline{f}, \bar{f})$ , il suffit d'écrire  $\bar{f}$  sous forme  $PS$  duale de l'une des formes  $SP$  précédentes et de transformer le produit de sommes en somme de produits. Nous voyons qu'aucun monôme premier de  $\bar{f}$  ne peut contenir plus de  $q$  lettres.

Le majorant obtenu est indépendant du nombre  $n$  de variables. Il ne présente évidemment d'intérêt que s'il est inférieur à  $n$ .

MINORANT DU COÛT. — Soit  $l$  le nombre de lettres d'un monôme. Il contient  $2^k$  points avec  $k = n - l$ .

Si  $f$  contient  $s$  points ( $s + q = 2^n$ ), pour tout monôme inclus dans  $\bar{f}$  :

$$2^k \leq s, \quad \text{soit } 2^{n-l} \leq s, \quad \text{ou encore :}$$

$$l \geq n - \text{Log}_2 s.$$

BORNES DE LA QUALITÉ. — Rappelons que  $\rho = \frac{m}{l}$ .

Nous avons :

$$1 \leq m \leq p$$

et 
$$\min(q, n) \geq 1 \geq n - \text{Log}_2 s.$$

d'où : 
$$\frac{1}{\min(q, n)} \leq \rho \leq \frac{p}{n - \text{Log}_2 s}$$

## II. — BASES PREMIERES D'UNE FONCTION INCOMPLETE

### 1. Simplifications préliminaires

1. Les résultats du chapitre précédent montrent que l'on obtient toutes les couvertures de  $\underline{f}$ , à l'aide de sommes de monômes, en couvrant séparément chaque composante intérieurement connexe. On se trouve ainsi ramené à l'étude de plusieurs fonctions ayant même borne supérieure  $\bar{f}$  et des bornes inférieures plus petites que  $\underline{f}$ .

2. Pour la recherche de toutes les couvertures de forme  $SP$  de  $\underline{f}$ , la donnée de  $\bar{f}$  peut comporter une certaine imprécision. Il est possible, en particulier, de réduire  $\bar{f}'$  en ne conservant que ses points-frontière.

On peut au contraire, avoir avantage à réduire  $\bar{f}$  pour obtenir une représentation de forme  $SP$  de  $\bar{f}'$  utilisant des monômes plus grands ou moins nombreux.

### 2. Recherche des bases premières

Remarquons tout d'abord que pour une fonction comportant beaucoup de variables, la recherche de tous les monômes premiers et de toutes

les bases premières, que ce soit à l'aide des méthodes courantes ou de méthodes particulières, est impossible en pratique à cause du nombre excessif d'opérations requises. Kazakov [3] donne l'exemple d'une fonction incomplète symétrique de 15 variables possédant 100100 monômes premiers et pour laquelle l'application de la méthode de Mac Cluskey exigerait environ  $2^{100100}$  opérations élémentaires.

Il peut être possible d'éviter la majeure partie des calculs, selon la nature des résultats recherchés.

1. Si nous voulons toutes les bases premières, nous devons calculer tous les monômes premiers.

2. Pour obtenir les bases premières minimales uniquement, la connaissance des monômes premiers principaux est suffisante.

3. Enfin, si nous ne recherchons qu'une base première minimale, il nous suffit de connaître les monômes premiers distingués et, parmi ceux qui sont équivalents, de n'en conserver qu'un et de supprimer par exemple, en priorité, ceux qui comportent le plus de lettres complémentées. (Propriété 3, § 9, chapitre I.)

### 3. Couverture d'une fonction par des monômes de qualité donnée

Même dans le dernier cas, les calculs peuvent encore être excessivement longs. La méthode suivante, bien que ne conduisant pas toujours à une base première minimale, a l'avantage de permettre l'aboutissement des calculs dans un grand nombre de cas ( $p$ ,  $q$  et  $n$  modérément grands).

Considérons  $\lambda + 1$  valeurs de  $\rho$  telles que (§ 14, chapitre I) :

$$\rho_0 = \frac{p}{n - \text{Log}_2 s} \geq \rho_1 > \rho_2 > \dots > \rho_\lambda = \frac{1}{\min(q, n)}$$

et cherchons d'abord à couvrir  $f$  par des monômes premiers de qualité  $\rho \geq \rho_1$ . Le calcul de ces monômes premiers est particulièrement facile si le calcul préliminaire de tous les majorants de  $(f, \bar{f})$  a été fait. On connaît le nombre  $m$  de points de  $f$  couverts par chaque majorant et on en tire le coût maximal  $l_{max}$  d'un monôme premier le couvrant :

$$\text{entier} \left( \frac{m}{\rho_1} \right) \leq l_{max} < \text{entier} \left( \frac{m}{\rho_1} \right) + 1$$

ce qui permet, au cours des calculs, de négliger les monômes (premiers ou non) dont le coût dépasse  $l_{max}$ .

On peut aussi, pour chaque majorant, se limiter aux monômes premiers de qualité maximale qui sont distingués (propriété 1, § 9, chapitre I).

Il est même possible d'éviter le calcul des majorants qui conduiraient à  $l_{max} < 1$ , donc pour lesquels  $m < \rho_1$ . Ceci est avantageux dans le cas où  $p$  est grand, puisque le nombre de majorants peut atteindre  $2^p$ .

Nous obtenons ainsi un ensemble  $U_1$  de monômes premiers couvrant une partie  $g_1$  de  $\underline{f}$ . Il reste à couvrir  $\underline{f}g_1$ .

Ceci n'est possible qu'avec des monômes de qualité inférieure à  $\rho_1$ . Nous imposons à  $\rho$  les conditions  $\rho_1 > \rho \geq \rho_2$ , la condition  $\rho \geq \rho_2$  étant d'ailleurs suffisante. Ceci conduit à un nouvel ensemble  $U_2$  de monômes premiers couvrant une partie  $g_2$  de  $\underline{f}$ . Remarquons que  $g_1g_2$  n'est pas nécessairement vide. Il reste à couvrir  $\underline{f}g_1g_2$ .

En continuant ainsi, on finira certainement par couvrir  $\underline{f}$  puisque  $\rho_\lambda$  est un minorant de la qualité. Il ne sera pas nécessaire en général, sauf pour le cas de points de  $\underline{f}$  isolés dans  $\bar{f}'$ , d'utiliser toutes les valeurs de la séquence  $(\rho_1, \rho_2, \dots, \rho_\lambda)$ ,  $\underline{f}$  étant alors entièrement couvert par des monômes premiers de qualité au moins égale à  $\rho_\mu$  avec  $\mu < \lambda$ .

Remarquons que, pour  $\rho_1 = \frac{1}{\min(q, n)}$ , le calcul fournit tous les

monômes premiers de la fonction. La méthode est donc très souple, mais le choix de la séquence  $(\rho_1, \rho_2, \dots, \rho_\lambda)$  est primordial,  $\rho_1$  devant être suffisamment grand pour que la méthode soit efficace.

CONTRE EXEMPLE. — Nous allons montrer que pour certains choix de la séquence  $(\rho_1, \rho_2, \dots, \rho_\lambda)$ , on peut perdre les bases minimales.

Considérons la fonction suivante :

	$a$	$b$	$c$	$d$	$e$	$f$	$g$	$h$	
Pour $\rho_1 = 1$ , nous trouvons :	1	1	1	1	1	1	1	1	$\underline{f}$
$bc$ 14	1	1	0	1	1	1	1	1	
$ac$ 13	1	0	1	1	1	1	1	1	
$ab$ 12	0	1	1	1	1	1	1	1	
La fonction est couverte entièrement par ces 3 monômes.	0	0	1	0	1	1	1	1	
	0	0	1	1	0	1	1	1	
	0	0	1	1	1	0	1	1	
Pour $\rho_1 = \frac{1}{2}$ , nous trouvons :	0	0	1	1	1	1	0	1	
$defgh$ 1234	0	0	1	1	1	1	1	0	5
$bc$ 14	0	1	0	0	1	1	1	1	6
$ac$ 13	0	1	0	1	0	1	1	1	7
$ab$ 12	0	1	0	1	1	0	1	1	8
	0	1	0	1	1	1	0	1	9
La fonction est couverte, au choix, par $defgh$ de coût 5 ou par $bc + ac + ab$ de coût 6.	0	1	0	1	1	1	1	0	10
	1	0	0	0	1	1	1	1	11
	1	0	0	1	0	1	1	1	12
	1	0	0	1	1	0	1	1	13
	1	0	0	1	1	1	0	1	14
	1	0	0	1	1	1	1	0	15



4. Remarque

Les bases premières obtenues pour  $(\underline{f}, \bar{f})$  donnent immédiatement pour  $(\bar{f}', f')$  des couvertures de signature  $PS$ , dont la recherche aurait pu être faite directement à l'aide de méthodes duales des précédentes.

III. — EXEMPLES. ORGANIGRAMME DE LA METHODE

Nous illustrerons la méthode à l'aide de l'exemple suivant :

a	b	c	d	e	f	g	
1	0	1	0	0	0	1	1
0	0	0	1	1	1	0	2
1	0	0	1	0	1	1	3
1	1	1	0	1	0	1	4
0	0	1	1	0	1	0	5
0	1	0	1	1	0	1	6
1	1	1	0	0	0	0	7
0	1	1	0	0	1	1	8

1	0	0	0	0	1	0	1
1	1	0	0	1	0	1	2
0	1	1	1	1	1	0	3
1	0	0	1	1	0	0	4
0	1	0	1	0	0	1	5
1	0	1	1	0	1	1	6

$\underline{f}$

$\bar{f}'$

1. Recherche des parties couvrables et des majorants associés

ALGORITHME. — Le graphe des parties couvrables est un arbre (fig. 1) dont nous explorons les branches les unes après les autres. Nous aurons à conserver simultanément  $p$  parties couvrables au plus. Nous procédons de la manière suivante.

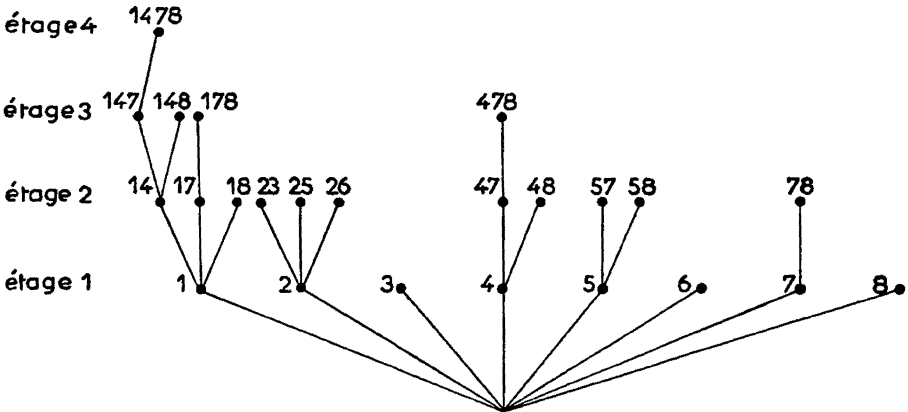


Figure 1

Nous partons du premier point 1, que nous associons à chacun des points suivants jusqu'à l'obtention d'une partie couvrable, ici 14. Nous associons à ce couple chacun des points suivants jusqu'à l'obtention d'une nouvelle partie couvrable (147) et ainsi de suite.

$f$  contenant  $p$  points, nous finirons par envisager, au  $(p - 1)^{eme}$  essai, une partie de  $f$  contenant le point  $p$  (1478).

Il y a deux cas possibles :

— si cette partie est couvrable, comme c'est le cas ici, nous supprimons les deux dernières parties couvrables, 1478 et 147, et pouvons traiter les majorants correspondants en vue de la recherche des monômes premiers ;

— si elle n'est pas couvrable, comme c'est le cas pour 238, nous supprimons la dernière partie couvrable 23, et traitons le majorant correspondant. Nous sommes alors ramenés au dernier nœud, 14, à partir duquel nous reprenons la recherche de nouvelles parties couvrables, ici 148.

L'arbre est parcouru de haut en bas et de gauche à droite ce qui correspond à une ordination lexicographique des parties couvrables : 1478, 147, 148, 14, 178, 17, 18, 1, 23, 25, ...

Parties de $f$ envisagées	Majorants traités
1	
12	
13	
14	
145	
146	
147	
1478	1478,147
148	148,14
15	
16	
17	
178	178,17
18	18,1
2	
23	
234	
235	
236	
237	
238	23
24	
25	
256	
257	
258	25
26	
267	
.	
.	
.	

## REMARQUES

1. Considérons deux parties équivalentes situées sur la même chaîne. Le majorant, rencontré deux fois, ne sera traité qu'une fois, pour la partie la plus grande. Par contre si les parties équivalentes sont situées sur deux chaînes différentes, la première information ayant été effacée, le majorant sera traité deux fois.

On peut essayer de pallier cet inconvénient en retenant dans une liste auxiliaire ceux des majorants traités qui ont le plus de chances de réapparaître un grand nombre de fois c'est-à-dire ceux dont le facteur de qualité est élevé (supérieur à une valeur choisie), de manière à éviter la répétition de calculs inutiles.

2. L'ordre dans lequel sont placés au départ les  $p$  points de  $\underline{f}$  n'est pas indifférent pour le nombre d'opérations effectuées. Si le point 6 avait été placé entre les points 3 et 4 on n'aurait pas effectué les essais inutiles 146, 46, 56.

## 2. Recherche des monômes premiers associés à un majorant

Nous cherchons à couvrir un majorant  $M$  par des monômes maximaux ayant avec  $\bar{f}'$  une intersection vide. Ces monômes doivent contenir le minimum de lettres mais, pour chaque monôme  $Q_j$  de  $\bar{f}'$ , au moins une lettre qui rende nul leur produit avec  $Q_j$ , c'est-à-dire au moins l'une des lettres figurant sous des formes différentes dans  $Q_j$  et dans  $M$ , [6].

EXEMPLE. — Soit à couvrir la partie 147.

Nous obtenons :

$$(c + f')c(a + d' + f')(c + d')(a + c + d')(d' + f') = cd' + cf'.$$

ÉTUDE COMPLÈTE. — Reprenons l'étude en choisissant cette fois-ci  $\rho_1 = 2$ . Il n'y a pas de monôme premier à une lettre puisque chaque lettre figure sous les deux formes dans l'expression unique de signature  $SP$  de  $\bar{f}'$ . Tout monôme premier, ayant donc au moins deux lettres, doit contenir au moins  $2\rho_1 = 4$  points. Seule la partie 1478 peut être couverte par un monôme de qualité supérieure ou égale à 2 et l'est en fait par  $cd'$ .

Il reste à couvrir 2356. Il suffit de construire l'arbre des parties couvrables pour 235678 (fig. 2). Prenons  $\rho_2 = 1$ . Nous ne cherchons à couvrir que des parties contenant au moins  $2\rho_2 = 2$  points. Nous utilisons les remarques simplificatrices du § 3, chapitre II, pour la transformation du produit de sommes en somme de produits : nous éliminons en cours de calcul tout monôme de plus de 2 lettres.

PARTIE COUVRABLE	MAJORANT	PRODUIT DE SOMMES	MONÔMES PREMIERS RETENUS
23	$b'c'df$	$c'df$	$a'b'$
25	$a'b'dfg'$	$(a' + d)b'(a' + f)(a' + g')$	
26	$a'c'de$	$a'c'e$	
57	$ce'g'$	$ce'g'$	
58	$a'ce'f$	$e'(c + f)a'$	

Nous conservons  $a'b'$ . Il reste à couvrir 36 et à construire l'arbre des parties couvrables pour 236 (fig. 3). Prenons  $\rho_3 = \frac{1}{2}$ . Nous cherchons à couvrir toute partie contenant au moins  $2\rho_3 = 1$  point, c'est-à-dire chacune des parties 23, 3, 26, 6. Pour les parties à 2 points nous ne retenons que les monômes de  $\frac{2}{\rho_3} = 4$  lettres au plus ; pour celles à 1 point, les monômes de  $\frac{1}{\rho_3} = 2$  lettres au plus.

PARTIE COUVRABLE	MAJORANT	PRODUIT DE SOMMES	MONÔMES PREMIERS RETENUS
23	$b'c'df$	$c'df$	$c'df$
3	$ab'c'de'fg$	$(d + g)(b' + d + e' + f)(e' + f + g)$	
26	$a'c'de$	$a'c'e$	
6	$a'bc'def'g$	$(a' + d)(c' + f' + g)(a' + b + g)e$	

La borne inférieure est ainsi couverte par la somme :

$$cd' + a'b' + c'df + a'c'e.$$

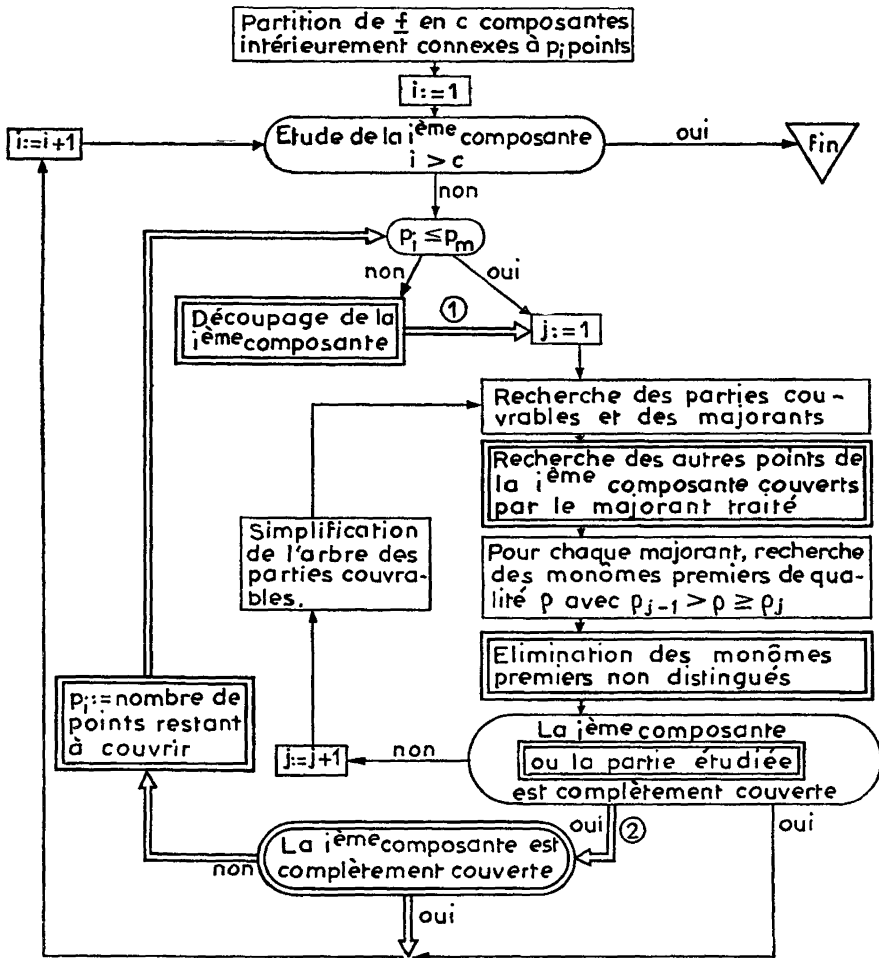
### 3. Organigramme. Résultats obtenus

La méthode présentée dans les chapitres I et II et les algorithmes du chapitre III ont permis l'écriture d'un programme en langage MAP sur ordinateur 7044 IBM. Nous en donnons l'organigramme général. En plus de la description que nous venons d'en faire, il comporte diverses opérations que nous ne détaillons pas ici ayant pour but d'éviter le calcul de certaines parties couvrables.

1) dans le cas où l'on sait qu'elles n'existent pas.

2) dans le cas où leur nombre exagérément grand rendrait la méthode inutilisable. En effet le nombre de parties de  $f$  à envisager pour la construction de l'arbre des parties couvrables et le nombre de majorants retenus, bien qu'inférieurs à  $2^n$ , croissent très vite en fonction de  $p$  et  $n$ .

La connaissance de la valeur moyenne  $P(n, p, q)$  du nombre de majorants en fonction de  $n, p, q$  [5] et de la valeur  $P_m$  maximale admissible de  $P$  permet de déterminer la valeur  $p_m$  maximale admissible de  $p$ .



Le nombre  $P_m$  a été déterminé expérimentalement pour divers exemples avec  $n, p$ , et  $q$  variables. Il dépend des moyens utilisés pour faire les calculs (ordinateur, langage de programmation). Dans le programme cité,  $P_m = 30\ 000$ .

La partition de  $f$  en composantes intérieurement connexes et la simplification de l'arbre des parties couvrables se rapportent au premier cas. Le découpage des composantes intérieurement connexes se rapporte au second.

BORNE INFERIEURE ET COMPLEMENT DE LA BORNE SUPERIEURE

ABCDEFGHIJKLMNPQRSTU

```

010001010000001100111  1
100110101011111110100  2
111001111011110011000  3
101101011100010111100  4
110110000001010100000  5
110110110111100010111  6
110000100011110010001  7
001001000101111101101  8
100100011111000110110  9
100011000110011011110  10
110101000110101100001  11
110110001101101100111  12
010000111001000000001  13
001001100101111110000  14
100100111111001110010  15
000010001110001101101  16
101000010100001110000  17
101000110101010011111  18
101010000001100011001  19
011100111110111101111  20

```

```

100110010111001111101  1
111011111011110111100  2
001010101000111100000  3
001001101100110110001  4
100110010011011001101  5
100101100100110110011  6
001100100110010011011  7
001101100010011011001  8
110110010010001001101  9
100110110010010010011  10
110011011010010001100  11

```

M=4  
C=1

10 HEURES 50 MINUTES 50 SECONDES

6 MONOMES PREMIERS

E'H	1	3	4	9	13	15	17	18	20
N'R'	1	6	9	11	12	13	15	17	
D'I'	1	7	8	10	14	17	18	19	
LR'	2	5	6	7	9	12	13	14	15
E'L	3	7	8	9	13	14	15	18	
G'H'	5	8	10	11	12	16	19		

M=3  
C=1

10 HEURES 51 MINUTES 07 SECONDES

Les flèches et les rectangles doubles correspondant au cas où  $p_i > p_m$ , c'est-à-dire au cas où il faut découper la  $i^{\text{ème}}$  composante. Précisons que si l'entrée dans la boucle de recherche des monômes premiers se fait par la flèche marquée 1, la sortie se fait par la flèche marquée 2.

Le programme, tel qu'il est écrit, permet l'étude de fonctions pour lesquelles  $n$  peut atteindre 36 et  $p$  et  $q$ , plusieurs centaines, avec des temps de travail relativement courts.

Nous reprenons l'exemple proposé par Kazakov [3] qui, avec sa méthode, est conduit à la base première

$$a'b + ei + be' + bk' + bj + a'g' + d'i'$$

de coût 14 tandis que, nous obtenons, pour  $\rho_1 = 4$ , la base première

$$e'h + lr' + g'h'$$

de coût 6. Un raisonnement simple permet de montrer qu'elle est minimale unique.

#### BIBLIOGRAPHIE

- [1] C. BENZAKEN, Algorithme pour le calcul de la duale d'une fonction donnée, *R.F.T.I. Chiffres*, vol. 9, n° 2, pp. 119-128, 2<sup>e</sup> trimestre 1966.
- [2] A. GRASELLI, Un procedimento per la sintesi di reti logiche combinatorie, *Alta Frequenza*, vol. 31, n° 10, pp. 673-84, octobre 1962.
- [3] V. D. KAZAKOV, The minimization of logical functions of a large number of variables. Article original dans *Avtomatika i Telemekhanika*, 11 janvier 1962. Traduction en anglais dans *Automation and Remote Control*, vol. 23, n° 9, pp. 1237-42, septembre 1962.
- [4] J. KUNTZMANN, *Algèbre de Boole*, Éditions Dunod, Paris, 1965.
- [5] F. LAPSCHER, Nombre moyen de majorants d'une fonction booléenne incomplète. Remarques concernant le nombre moyen de monômes premiers. *Calcolo*, vol. 4, fasc. 1, gennaio-marzo 1967, 21-40.
- [6] E. J. MAC CLUSKEY Jr., Minimal sums for boolean functions having many unspecified fundamental products, *Proc. Sec. Annu. Symp. on Switch. Circ. Th. and Log. Des.*, 4 juin 1962.
- [7] F. MILETO et G. PUTZOLU, Average values of quantities appearing in boolean function minimization. *IEEE Trans.*, EC 13, n° 2, pp. 87-92, avril 1964.
- [8] F. MILETO et G. PUTZOLU, Statistical complexity of algorithms for boolean function minimization, *J. Ass. Computg Machin.*, 12, n° 3, pp. 364-75, 1965.
- [9] J. P. ROTH, Algebraic topological methods for the synthesis of switching systems. I, *Trans. Am. Math. Soc.*, 83, pp. 301-26, juillet 1958.
- [10] J. P. ROTH, Algebraic topological methods in synthesis, *IBM Journal*, pp. 57-73, décembre 1960.

Le Directeur de la publication : G. DUNOD. *Imprimé en France.*

Dépôt légal : 4<sup>e</sup> trim. 1967. N° 5350.

IMPRIMERIE NOUVELLE, 8 ter, faubourg Madeleine, ORLÉANS. — 5533-10/1967.