

MARJORY GODIN  
BOUCHAÏB SODAÏGUI

**Classes de Steinitz d'extensions à groupe de Galois  $A_4$**

*Journal de Théorie des Nombres de Bordeaux*, tome 14, n° 1 (2002),  
p. 241-248

[http://www.numdam.org/item?id=JTNB\\_2002\\_\\_14\\_1\\_241\\_0](http://www.numdam.org/item?id=JTNB_2002__14_1_241_0)

© Université Bordeaux 1, 2002, tous droits réservés.

L'accès aux archives de la revue « Journal de Théorie des Nombres de Bordeaux » (<http://jtnb.cedram.org/>) implique l'accord avec les conditions générales d'utilisation (<http://www.numdam.org/conditions>). Toute utilisation commerciale ou impression systématique est constitutive d'une infraction pénale. Toute copie ou impression de ce fichier doit contenir la présente mention de copyright.

NUMDAM

Article numérisé dans le cadre du programme  
Numérisation de documents anciens mathématiques

<http://www.numdam.org/>

## Classes de Steinitz d'extensions à groupe de Galois $A_4$

par MARJORY GODIN et BOUCHAÏB SODAÏGUI

**RÉSUMÉ.** Soient  $k$  un corps de nombres et  $Cl(k)$  son groupe des classes. Une extension de  $k$  à groupe de Galois isomorphe au groupe alterné  $A_4$  est dite alternée. Soit  $E/k$  une extension cyclique de degré 3. On calcule la classe de Steinitz, dans  $Cl(k)$ , de toute extension alternée contenant  $E$ . Sous l'hypothèse que le nombre des classes de  $k$  est impair, on détermine l'ensemble de telles classes et on montre que c'est un sous-groupe de  $Cl(k)$  lorsque l'anneau des entiers de  $E$  est libre sur celui de  $k$  ou 3 ne divise pas l'ordre de  $Cl(k)$ . Ensuite, on montre que l'ensemble des éléments de  $Cl(k)$  qui sont réalisables par des classes de Steinitz d'extensions alternées (resp. alternées et modérées) est le groupe  $Cl(k)$  tout entier.

**ABSTRACT.** Let  $k$  be a number field and  $Cl(k)$  its class group. A Galois extension of  $k$  is called alternating if its Galois group is isomorphic to the alternating group  $A_4$ . Let  $E/k$  be a cyclic extension of degree 3. We calculate the Steinitz class, in  $Cl(k)$ , of every alternating extension containing  $E$ . Under the assumption that the class number of  $k$  is odd, we determine the set of such classes and we prove that it is a subgroup of  $Cl(k)$  when the ring of integers of  $E$  is free over that for  $k$  or the order of  $Cl(k)$  is not divisible by 3. Next, we prove that the subset of  $Cl(k)$  consisting of those classes which are realizable as the Steinitz classes of alternating (resp. tame alternating) extensions is the full group  $Cl(k)$ .

### 1. Introduction

Pour tout corps de nombres  $K$ ,  $O_K$  désigne l'anneau des entiers de  $K$  et  $Cl(K)$  le groupe des classes de  $K$ .

Soient  $K/k$  une extension finie de corps de nombres de degré  $n$ . L'anneau  $O_K$  est un  $O_k$ -module sans torsion de rang  $n$ , donc il existe un idéal  $I$  de  $O_k$  tel que  $O_K \cong O_k^{n-1} \oplus I$  en tant que  $O_k$ -module. La classe de  $I$  dans  $Cl(k)$

est appelée la classe de Steinitz de l'anneau  $O_K$  ou de l'extension  $K/k$ , et on la note  $Cl_k(O_K)$  (voir [FT, Théorème 13, p. 95]).

Maintenant, soient  $\Gamma$  un groupe fini et  $\Delta$  un sous-groupe normal de  $\Gamma$ . On a donc la suite exacte de groupes suivante :

$$\Sigma : 1 \longrightarrow \Delta \longrightarrow \Gamma \longrightarrow \Gamma/\Delta \longrightarrow 1.$$

Fixons  $E/k$  une extension galoisienne dont le groupe de Galois est isomorphe à  $\Gamma/\Delta$ . On désigne par  $R(E/k, \Sigma)$  (resp.  $R_m(E/k, \Sigma)$ ) l'ensemble des classes (réalisables)  $c \in Cl(k)$  telles qu'il existe une extension galoisienne (resp. galoisienne et modérément ramifiée)  $N/k$ , contenant  $E$ , avec un isomorphisme  $\pi$  de  $Gal(N/k)$  dans  $\Gamma$  tel que  $E$  est le sous-corps de  $N$  fixe par  $\pi^{-1}(\Delta)$ , dont la classe de Steinitz est  $c$ .

Lorsque  $\Delta = \Gamma$ ,  $R(E/k, \Sigma)$  (resp.  $R_m(E/k, \Sigma)$ ) est tout simplement l'ensemble des classes de Steinitz des extensions galoisiennes (resp. galoisiennes et modérées) de  $k$ , dont le groupe de Galois est isomorphe à  $\Gamma$  ; on note  $R(k, \Gamma)$  et  $R_m(k, \Gamma)$  au lieu de  $R(E/k, \Sigma)$  et  $R_m(E/k, \Sigma)$ .

Soient  $p, q$  deux nombres premiers impairs. Dans [C1], sous l'hypothèse que  $k$  contient les racines  $p^{\text{ième}}$  de l'unité, on détermine  $R_m(E/k, \Sigma)$  lorsque  $\Gamma$  est un groupe non abélien d'ordre  $p^3$  d'exposant  $p$  et  $\Delta$  un sous-groupe de  $\Gamma$  d'ordre  $p^2$ , et on montre que si  $O_E$  est un  $O_k$ -module libre alors  $R_m(E/k, \Sigma)$  est un sous-groupe de  $Cl(k)$ . Dans [C2] on montre des résultats analogues à ceux de [C1] dans la situation où  $k$  contient les racines  $pq^{\text{ième}}$  de l'unité,  $\Gamma$  est un groupe métacyclique d'ordre  $pq$ , et  $\Delta$  est le sous-groupe de  $\Gamma$  d'ordre  $p$ .

Lorsque  $\Gamma$  est abélien, une conséquence des travaux de McCulloh (voir [Mc]) est :  $R_m(k, \Gamma)$  est un sous-groupe de  $Cl(k)$ . Dans [C3], on montre que  $R_m(k, \Gamma)$  est un sous-groupe de  $Cl(k)$  dans le cas où  $\Gamma$  est un groupe non abélien d'ordre  $p^3$  ( $p$  premier impair), et  $k$  contient les racines  $m^{\text{ième}}$  de l'unité, où  $m$  est l'exposant de  $\Gamma$ . Lorsque  $\Gamma$  est le groupe quaternionien (resp. diédral) d'ordre 8, on montre dans [So1] (resp. [So2]) que si le nombre des classes de  $k$  est impair alors  $R_m(k, \Gamma) = Cl(k)$ .

Dans cet article, on s'intéresse à la situation où  $\Gamma$  est le groupe alterné  $A_4$  défini par la présentation :

$$A_4 = \langle \sigma, \tau, \nu : \sigma^3 = \tau^2 = \nu^2 = 1, \tau\nu = \nu\tau, \sigma\tau\sigma^{-1} = \nu \rangle,$$

et

$$\Delta = \langle \tau, \nu \rangle.$$

On a  $Gal(E/k) \cong \langle \sigma \rangle$ , donc  $E/k$  est une extension cyclique de degré 3.

Dans la section 3, nous démontrerons les principaux résultats suivants :

**Théorème 1.1.** *Soit  $k$  un corps de nombres. Soit  $E/k$  une extension cyclique de degré 3. Supposons le nombre de classes de  $k$  impair. Alors*

$$(i) \quad R(E/k, \Sigma) = Cl_k(O_E)(N_{E/k}(Cl(E)))^3,$$

où  $N_{E/k}$  est la norme dans  $E/k$  et  $(N_{E/k}(Cl(E)))^3$  est le sous-groupe des puissances 3<sup>ème</sup> des éléments du groupe  $N_{E/k}(Cl(E))$ .

De plus, si  $E/k$  est modérée alors

$$R_m(E/k, \Sigma) = R(E/k, \Sigma).$$

$$(ii) \quad R(k, A_4) = R_m(k, A_4) = Cl(k).$$

**Remarque.** L'hypothèse "le nombre des classes de  $k$  est impair" provient d'un problème de plongement et sera utile pour prouver l'inclusion

$$R(E/k, \Sigma) \supset Cl_k(O_E)(N_{E/k}(Cl(E)))^3,$$

l'autre inclusion est vraie sans cette hypothèse.

**Corollaire 1.2.** *Sous les hypothèses et notations du théorème 1.1 on a les assertions suivantes :*

- (1) *Si 3 ne divise pas le nombre des classes de  $k$  alors  $R(E/k, \Sigma) = Cl(k)$  ( $= R_m(E/k, \Sigma)$  si  $E/k$  est modérée).*
- (2) *Si  $O_E$  est un  $O_k$ -module libre alors  $R(E/k, \Sigma)$  est un sous-groupe de  $Cl(k)$  égal à  $(N_{E/k}(Cl(E)))^3$  ( $= R_m(E/k, \Sigma)$  si  $E/k$  est modérée) ; de plus si  $E/k$  est ramifiée alors il est égal à  $Cl(k)^3$ .*

Pour terminer cette section, signalons qu'une autre motivation de cet article est l'étude de l'ensemble des éléments du groupe des classes de l'algèbre de groupe  $O_k[\Gamma]$ , qui sont réalisables par des classes d'anneaux d'entiers d'extensions galoisiennes de  $k$ , modérées et à groupe de Galois isomorphe à  $\Gamma$ , dans la situation où  $\Gamma$  n'est pas abélien (dans cette direction voir [So2] et la bibliographie) ; le cas abélien étant résolu par McCulloh dans [Mc]). On montre qu'il y a un lien étroit entre l'étude de l'ensemble des classes réalisables et le problème de l'étude des classes de Steinitz.

## 2. Classes de Steinitz

Dans cette section,  $N/k$  désigne une extension galoisienne dont le groupe de Galois est isomorphe à  $A_4$ . Si  $\pi$  est un isomorphisme de  $Gal(N/k)$  dans  $A_4$  et  $\gamma \in A_4$ , on identifiera  $\pi^{-1}(\gamma)$  et  $\gamma$ . Soit  $E/k$  la sous-extension de  $N$  fixe par  $\langle \tau, \nu \rangle$  : c'est l'unique sous-extension cyclique de degré 3, et on a  $Gal(E/k) \cong \langle \sigma \rangle$ . L'extension  $N/E$  est biquadratique, elle contient donc trois sous-extensions quadratiques de  $E$  ; si  $L/E$  est l'une d'entre elles alors les deux autres sont  $\sigma(L)$  et  $\sigma^2(L)$ .

**Proposition 2.1.** *On a*

$$Cl_k(O_N) = (Cl_k(O_E))^4 (N_{E/k}(Cl_E(O_L)))^3.$$

Le lemme suivant sera utile pour la preuve de la proposition précédente.

**Lemme 2.2.** *Soient  $K$  un corps de nombres,  $M/K$  une extension bi-quadratique,  $K_i/K$ ,  $1 \leq i \leq 3$ , les trois sous-corps quadratiques de  $M$ . Alors*

$$Cl_K(O_M) = Cl_K(O_{K_1})Cl_K(O_{K_2})Cl_K(O_{K_3}).$$

*Preuve du lemme.* Notons  $\Delta$  le discriminant de  $M/K$  et  $\Delta_i$  les discriminants des  $K_i/K$ . Une conséquence immédiate de la décomposition d'Artin et Hasse du discriminant en un produit de conducteurs et la propriété de ces derniers relative au passage au quotient (voir [Se, Chap. VI, Section 3, Cor. 2 et Prop. 6, p. 111–112]) est  $\Delta = \Delta_1\Delta_2\Delta_3$ . Soient  $m_i$ ,  $1 \leq i \leq 2$ , des éléments de  $K$  tels que  $K_i = K(\sqrt{m_i})$ . Posons  $m_3 = m_1m_2$ , il est clair que  $K_3 = K(\sqrt{m_3})$ . Les familles  $(1, \sqrt{m_1})$ ,  $(1, \sqrt{m_2})$ ,  $(1, \sqrt{m_3})$ ,  $(1, \sqrt{m_1}, \sqrt{m_2}, \sqrt{m_3})$  sont des bases respectives des  $K$ -espaces vectoriels  $K_i$  et  $M$ , dont les discriminants respectifs  $d_i$  et  $d$  sont :  $4m_i$  et  $(16m_3)^2$ . On en déduit que

$$\Delta/d = (\Delta_1/d_1)(\Delta_2/d_2)(\Delta_3/d_3)2^{-2}.$$

On a alors le lemme car d'après Artin (voir [A]),  $Cl_K(O_M) = Cl(\sqrt{\Delta/d})$  et  $Cl_K(O_{K_i}) = Cl(\sqrt{\Delta_i/d_i})$ .  $\square$

*Preuve de la proposition 2.1.* Par la transitivité de la classe de Steinitz dans une tour de corps de nombres (voir [F, Theorem 4.1]) on a :

$$Cl_k(O_N) = (Cl_k(O_E))^4 N_{E/k}(Cl_E(O_N)).$$

Soient  $\sigma^i(L)/E$ ,  $0 \leq i \leq 2$ , les trois sous-corps quadratiques de  $N/E$ . Le lemme 2.2 nous affirme que :

$$Cl_E(O_N) = Cl_E(O_L)Cl_E(O_{\sigma(L)})Cl_E(O_{\sigma^2(L)}).$$

Ecrivons  $L = E(\sqrt{m})$ . Comme  $\sigma^i(L) = E(\sqrt{\sigma^i(m)})$ , et  $\sigma^i(\Delta(L/E)) = \Delta(\sigma^i(L)/E)$ , on a (par Artin [A])

$$Cl_E(O_{\sigma^i(L)}) = \sigma^i(Cl_E(O_L)).$$

D'où

$$N_{E/k}(Cl_E(O_N)) = (N_{E/k}(Cl_E(O_L)))^3.$$

Ce qui termine la preuve de la proposition.  $\square$

### 3. Preuve des résultats principaux

Pour la démonstration du théorème 1.1, nous avons besoin du lemme suivant qui est un critère de plongement d'une extension cubique cyclique dans une extension à groupe de Galois  $A_4$ . Ce lemme est bien connu, il est cité dans ([K] p. 21 de la thèse) mais sans démonstration complète (on peut voir aussi [Ma] p. 365).

**Lemme 3.1.** Soient  $k$  un corps de nombres,  $K/k$  une extension cyclique de degré 3,  $L = K(\sqrt{a})/K$  une extension quadratique de  $K$ . Alors les deux assertions suivantes sont équivalentes :

- (1) La clôture galoisienne de  $L/k$  est une extension  $N/k$  à groupe de Galois isomorphe à  $A_4$ .
- (2)  $N_{K/k}(a)$  est un carré dans  $k$ , où  $N_{K/k}$  est la norme dans  $K/k$ .

De plus si (2) est vérifiée, on peut choisir  $N = K(\sqrt{a}, \sqrt{\sigma(a)})$ .

*Preuve.* L'implication (1)  $\Rightarrow$  (2) résulte immédiatement de la théorie de Kummer. Montrons maintenant que (2)  $\Rightarrow$  (1). Notons par  $\sigma$  un générateur de  $\text{Gal}(K/k)$ . Puisque  $a$  n'est pas un carré dans  $K$ , il en est de même pour  $\sigma(a)$ . Soient  $N$  l'extension biquadratique  $K(\sqrt{a}, \sqrt{\sigma(a)})/K$ ,  $\sigma_1$  et  $\sigma_2$  les générateurs de  $\text{Gal}(N/K)$  définis par  $\sigma_1(\sqrt{a}) = -\sqrt{a}$ , et  $\sigma_2(\sqrt{\sigma(a)}) = -\sqrt{\sigma(a)}$ . Notons  $\bar{\sigma}$  un prolongement de  $\sigma$  à  $N$ . On a  $(\sqrt{a})^2 = a$ , d'où  $(\bar{\sigma}(\sqrt{a}))^2 = \bar{\sigma}(a) = \sigma(a)$ ; par suite  $\bar{\sigma}(\sqrt{a}) = \pm\sqrt{\sigma(a)}$ . De  $(\sqrt{\sigma(a)})^2 = \sigma(a)$  on déduit que  $(\bar{\sigma}(\sqrt{\sigma(a)}))^2 = \sigma^2(a)$ . Soit  $x \in k$  tel que  $N_{K/k}(a) = x^2$ , alors  $\sigma^2(a) = (x/\sqrt{a} \cdot \sqrt{\sigma(a)})^2$ , i.e.  $\sigma^2(a)$  admet une racine carrée dans  $N$ , d'où  $\bar{\sigma}(\sqrt{\sigma(a)}) = \pm\sqrt{\sigma^2(a)}$ . Donc  $\bar{\sigma}(N) \subset N$ , par suite  $N/k$  est galoisienne de degré 12.

On vérifie facilement que  $\text{Gal}(N/k) = \langle \bar{\sigma}, \sigma_1, \sigma_2 \rangle$ , où, par exemple,  $\bar{\sigma}$  est défini par  $\bar{\sigma}(\sqrt{a}) = \sqrt{\sigma(a)}$  et  $\bar{\sigma}(\sqrt{\sigma(a)}) = \sqrt{\sigma^2(a)}$ , et que  $\text{Gal}(N/k) \cong A_4$ .  $\square$

*Preuve de (i) du théorème 1.1* Nous commençons par montrer (pour  $k$  quelconque) l'égalité

$$(3.1) \quad Cl_k(O_E)(N_{E/k}(Cl(E)))^3 = (Cl_k(O_E))^4(N_{E/k}(Cl(E)))^3.$$

Pour cela il suffit de montrer que  $Cl_k(O_E) \in N_{E/k}(Cl(E))$ . Soit  $\Delta(E/k)$  (resp.  $\mathcal{D}(E/k)$ ) le discriminant (resp. la différentielle) de  $E/k$ . Comme  $E/k$  est normale de degré impair, il découle d'un théorème d'Artin (voir [A]) que

$$Cl_k(O_E) = Cl((\Delta(E/k))^{1/2}).$$

La différentielle de  $E/k$  étant un carré (on le voit facilement par la formule de Hilbert, voir [Se, Chap. IV, Prop. 4, p. 72]), on en déduit que

$$Cl_k(O_E) = N_{E/k}(Cl(\mathcal{D}(E/k))^{1/2}).$$

(Notons que puisque la classe de la différentielle d'une extension est toujours un carré (voir [H, Theorem 176]), si le nombre de classes de  $k$  est impair on en déduit l'égalité précédente sans utiliser une expression explicite de la différentielle).

L'inclusion (pour  $k$  quelconque) :

$$(3.2) \quad R(E/k, \Sigma) \subset Cl_k(O_E)(N_{E/k}(Cl(E)))^3,$$

est donc une conséquence de (3.1) et la proposition 2.1. Montrons maintenant qu'on a :

$$(3.3) \quad (Cl_k(O_E))^4 (N_{E/k}(Cl(E)))^3 \subset R(E/k, \Sigma).$$

On suppose que le nombre des classes de  $k$  est impair. Soit  $c \in N_{E/k}(Cl(E))$ .  $N_{E/k}(Cl(E))$  étant un sous-groupe de  $Cl(k)$ , son ordre est impair. Par suite il existe  $c' \in N_{E/k}(Cl(E))$  telle que  $c = c'^2$ . Soit  $C \in Cl(E)$  telle que  $c' = N_{E/k}(C)$ .

Notons  $Cl(E, 4O_E)$  le groupe des classes de rayon modulo  $4O_E$ . D'après la surjection canonique de  $Cl(E, 4O_E)$  sur  $Cl(E)$  et le théorème de densité de Tchebotarev (voir [N, Chap.V, Theorem 6.4, p.132]) : il existe  $m \in E^\times$ , un idéal fractionnaire  $I$  de  $O_E$  et un idéal premier  $\mathfrak{P}$  de  $O_E$  satisfaisant  $\mathfrak{P} \cap O_k$  totalement décomposé dans  $E/k$  tels que :

$$mO_E = I^2\mathfrak{P}, \quad m \equiv 1 \pmod{*} 4O_E, \quad \text{et } Cl(I^{-1}) = C,$$

où  $\pmod{*}$  est la notation usuelle de la théorie du corps de classes (voir [N]). On a :

$$m\sigma(m)O_E = (I\sigma(I))^2\mathfrak{P}\sigma(\mathfrak{P}).$$

Il est clair que  $m\sigma(m)$  n'est pas un carré dans  $E$  ( $v_{\mathfrak{P}}(m\sigma(m)) \equiv 1 \pmod{2}$ ). On considère l'extension quadratique  $L = E(\sqrt{m\sigma(m)})/E$ . On a

$$N_{E/k}(m\sigma(m)) = (N_{E/k}(m))^2.$$

D'après le lemme 3.1,  $E/k$  est plongeable dans l'extension

$$N = E(\sqrt{m\sigma(m)}, \sqrt{\sigma(m\sigma(m))})/k$$

qui a un groupe de Galois isomorphe à  $A_4$ . De  $m \equiv 1 \pmod{*} 4O_E$  on déduit  $\sigma(m) \equiv 1 \pmod{*} 4O_E$ , par suite  $m\sigma(m) \equiv 1 \pmod{*} 4O_E$ . Par la théorie de Kummer (voir [H, Section 39])  $\Delta(L/E) = \mathfrak{P}\sigma(\mathfrak{P})$ . D'après Artin,  $Cl_E(O_L) = Cl(I\sigma(I))^{-1}$ , d'où

$$Cl_E(O_L) = C\sigma(C).$$

La proposition 2.1 nous donne :

$$Cl_k(O_N) = (Cl_k(O_E))^4 (N_{E/k}(C\sigma(C)))^3.$$

Par suite

$$Cl_k(O_N) = (Cl_k(O_E))^4 (c'^2)^3 = (Cl_k(O_E))^4 c^3.$$

On conclut qu'on a (3.3). On a donc la première partie de (i) du théorème 1.1 grâce à (3.1), (3.2) et (3.3).

Il est clair que  $E(\sqrt{m\sigma(m)})/E$  et  $E(\sqrt{\sigma(m\sigma(m))})/E$  sont modérées. Il s'ensuit que  $N/E$  est modérée. Si  $E/k$  est modérée alors  $N/k$  l'est aussi et donc

$$(Cl_k(O_E))^4 (N_{E/k}(Cl(E)))^3 \subset R_m(E/k, \Sigma).$$

D'où  $R(E/k, \Sigma) = R_m(E/k, \Sigma)$ . Ce qui termine la preuve de (i) du théorème 1.1.  $\square$

*Preuve de (ii) du théorème 1.1.* Soient  $C_3$  un groupe cyclique d'ordre 3,  $j$  une racine primitive 3<sup>ième</sup> de l'unité. Alors  $R(k, C_3)$  ([L, Theorem 4.7, p. 97]) est le sous-groupe de  $Cl(k)$  engendré par  $N_{k(j)/k}(Cl(k(j)))$  et les classes des idéaux premiers de  $O_k$  au dessus de 3. Sous l'hypothèse que le nombre des classes de  $k$  est impair on a  $N_{k(j)/k}(Cl(k(j))) = Cl(k)$  grâce à [W, Theorem 10.1, p.400], en effet : si  $j$  n'appartient pas à  $k$ ,  $k(j)/k$  est de degré 2, donc elle est ramifiée au moins en une place de  $k$ . Par suite

$$R(k, C_3) = Cl(k).$$

Soit  $c \in Cl(k)$ , il existe donc une extension  $E/k$  cyclique de degré 3 telle que  $c = Cl_k(O_E)$ . D'autre part, d'après (i) du théorème 1.1,  $Cl_k(O_E) \in R(E/k, \Sigma)$  donc appartient à  $R(k, A_4)$ , d'où  $R(k, A_4) = Cl(k)$ . L'égalité  $R(k, A_4) = R_m(k, A_4)$  provient du fait qu'on a ([L, Theorem 2.6, p. 90]) :  $R_m(k, C_3) = N_{k(j)/k}(Cl(k(j)))$ , donc égal à  $Cl(k)$ .  $\square$

*Preuve du corollaire 1.2.* (1) Si 3 ne divise pas le nombre des classes de  $k$  alors  $(N_{E/k}(Cl(E)))^3 = N_{E/k}(Cl(E))$ . D'autre part  $E/k$  est nécessairement ramifiée au moins en une place de  $k$  ; comme  $E$  est la seule sous-extension abélienne non triviale de  $E/k$ ,  $N_{E/k} : Cl(E) \rightarrow Cl(k)$  est surjective (voir [W, Theorem 10.1, p. 400]), et donc  $N_{E/k}(Cl(E)) = Cl(k)$ .

(2) Par définition de la classe de Steinitz, on a  $O_E$  est un  $O_k$ -module libre si et seulement si  $Cl_k(O_E) = 1$ . Si  $E/k$  est ramifiée, comme ci-dessus on a  $N_{E/k}(Cl(E)) = Cl(k)$ . Donc on a (2).  $\square$

## Bibliographie

- [A] E. ARTIN *Questions de base minimale dans la théorie des nombres algébriques*. Dans : Colloq. Internat. CNRS 24, Paris, 1950, 19–20.
- [C1] J. E. CARTER, *Steinitz classes of a nonabelian extension of degree  $p^3$* . Colloq. Math. **71** (1996), 297–303
- [C2] J. E. CARTER, *Module structure of integers in metacyclic extensions*. Colloq. Math. **76** (1998), 191–199.
- [C3] J. E. CARTER, *Steinitz classes of nonabelian extensions of degree  $p^3$* . Acta Arith. **78** (1997), 297–303.
- [F] A. FRÖHLICH, *The discriminant of relative extensions and the existence of integral bases*. Mathematika **7** (1960), 15–22.
- [FT] A. FRÖHLICH, M. J. TAYLOR, *Algebraic number theory*. Cambridge University Press, 1991.
- [H] E. HECKE *Lectures on the theory of algebraic numbers*. Graduate Texts Math. **77**, Springer-Verlag, New York, 1981.
- [K] S.-H. KWON, *Extensions à groupes de Galois  $A_4$* . Thèse, Université de Bordeaux I, 1984. *Corps de nombres de degré 4 de type alterné*. C.R.Acad.Sci. **299** (2) (1984), 41–43.
- [L] R. LONG, *Steinitz classes of cyclic extensions of prime degree*. J. Reine Angew. Math. **250** (1971), 87–98.
- [Ma] J. MARTINET, *Discriminants and permutation groups*. Number Theory, Walter de Gruyter (Richard A. Molin, ed.), Berlin - New York, 1990, 359–385



- [Mc] L. R. MCCULLOH, *Galois module structure of abelian extensions*. J. Reine Angew. Math. **375/376** (1987), 259–306.
- [N] J. NEUKIRCH *Class field theory*. Springer-Verlag, Berlin, 1986.
- [Se] J.-P. SERRE, *Corps Locaux*, 3ème édition. Hermann, Paris, 1980
- [So1] B. SODAÏGUI, *Classes de Steinitz d'extensions galoisiennes relatives de degré une puissance de 2 et problème de plongement*. Illinois J. Math. **43** (1999), 47–60.
- [So2] B. SODAÏGUI, *Relative Galois module structure and Steinitz classes of dihedral extensions of degree 8*. J. Algebra **223** (1999), 367–378.
- [So3] B. SODAÏGUI, *Realizables Classes of quaternion extensions of degree 4l*. J. Number Theory **80** (2000), 304–315.
- [W] L. C. WASHINGTON, *Introduction to cyclotomic fields*, 2nd edition. Springer-Verlag, Berlin, 1996.

Marjory GODIN, Bouchaïb SODAÏGUI

Département de Mathématiques

Le Mont Houy

59313 Valenciennes cedex 9, France

*E-mail* : [marjory.godin@univ-valenciennes.fr](mailto:marjory.godin@univ-valenciennes.fr)

[Bouchaib.Sodaigui@univ-valenciennes.fr](mailto:Bouchaib.Sodaigui@univ-valenciennes.fr)