

EMMANUEL ULLMO

**Sur la constante de Hida des courbes modulaires
et des courbes de Shimura**

Journal de Théorie des Nombres de Bordeaux, tome 13, n° 1 (2001),
p. 325-337

http://www.numdam.org/item?id=JTNB_2001__13_1_325_0

© Université Bordeaux 1, 2001, tous droits réservés.

L'accès aux archives de la revue « Journal de Théorie des Nombres de Bordeaux » (<http://jtnb.cedram.org/>) implique l'accord avec les conditions générales d'utilisation (<http://www.numdam.org/conditions>). Toute utilisation commerciale ou impression systématique est constitutive d'une infraction pénale. Toute copie ou impression de ce fichier doit contenir la présente mention de copyright.

NUMDAM

Article numérisé dans le cadre du programme
Numérisation de documents anciens mathématiques

<http://www.numdam.org/>

Sur la constante de Hida des courbes modulaires et des courbes de Shimura

par EMMANUEL ULLMO

RÉSUMÉ. La correspondance de Shimizu et Jacquet-Langlands donne des relations entre les quotients de la partie nouvelle de la jacobienne $J_0(N)$ de $X_0(N)$ et ceux de la partie nouvelle de la jacobienne de certaines courbes de Shimura associées. Nous comparons dans ce texte les congruences entre formes modulaires pour des quotients qui sont associés dans cette correspondance.

ABSTRACT. We compare the “modules of congruences between modular forms” of quotients of the new part of the Jacobian $J_0(N)$ of $X_0(N)$ and quotients of the new part of the Jacobian of some Shimura curves which are associated in the correspondance of Shimizu and Jacquet-Langlands.

1. Introduction

Soit N un entier sans facteurs carrés, $X_0(N)$ la compactification de l'espace de module grossier des courbes elliptiques munies d'un sous groupe cyclique d'ordre N et $J_0(N)$ la jacobienne de $X_0(N)$. Pour toute décomposition de N sous la forme

$$N = N^+ N^-,$$

où N^- est le produit d'un nombre pair de nombres premiers, on définit la courbe de Shimura X_{N^+, N^-} . Cette courbe admet un modèle sur \mathbb{Q} et est obtenue sur \mathbb{C} comme quotient du demi-plan de Poincaré par le sous-groupe $\Gamma_0^{N^+}(N^-)$ du groupe des unités de norme 1 dans un ordre d'Eichler de niveau N^+ de l'algèbre de quaternion rationnelle (indéfinie) de discriminant N^- [18] [2]. La correspondance de Shimizu et Jacquet-Langlands relie les formes nouvelles de poids deux pour $X_0(N)$ à celles de X_{N^+, N^-} qui ne sont bien définies qu'à la multiplication par une constante près.

L'étude arithmétique des courbes X_{N^+, N^-} est limitée par l'absence de développement de Fourier des formes différentielles due à l'absence de pointes. En particulier la théorie des congruences entre formes modulaires développée par Hida [7, 8] et Ribet [14, 15] ne s'étend pas dans cette situation.

Soit K un corps de caractéristique 0 et A une variété abélienne sur K . En reprenant la terminologie de Mazur [10], on dit qu’une variété abélienne A' définie sur K est un quotient optimal de A s’il existe une sous-variété abélienne A'' de A définie sur K et une suite exacte de variétés abéliennes

$$0 \rightarrow A'' \rightarrow A \rightarrow A' \rightarrow 0.$$

On a défini dans [17] la constante de Hida d’un quotient optimal de la jacobienne d’une courbe. Rappelons brièvement cette définition et quelques propriétés.

On suppose que J est la jacobienne d’une courbe C projective, lisse, irréductible de genre $g \geq 1$ sur \mathbb{C} . On fixe un plongement ϕ de C dans J , on a un isomorphisme ϕ^* entre $H^0(J, \Omega^1)$ et $H^0(C, \Omega^1)$. On notera de la même manière deux éléments de $H^0(J, \Omega^1)$ et $H^0(C, \Omega^1)$ qui se correspondent par ϕ^* . Pour toute variété abélienne A , de dimension a , quotient de J , $H^0(A, \Omega^1)$ est un sous espace vectoriel de $H^0(J, \Omega^1)$. Pour toute base $(\alpha_1, \dots, \alpha_a)$ de $H^0(A, \Omega^1)$, on pose

$$c(\alpha_1, \dots, \alpha_a) = \left| \frac{\det(\int_C \alpha_i \wedge \overline{\alpha_j})}{\int_A \alpha_1 \wedge \dots \wedge \alpha_a \wedge \overline{\alpha_1} \wedge \dots \wedge \overline{\alpha_a}} \right|.$$

Soit $\zeta : J \rightarrow A$ qui fait de A un quotient de J . On voit facilement que $c(\alpha_1, \dots, \alpha_a)$ est indépendant de la base $(\alpha_1, \dots, \alpha_a)$ choisie et ne dépend que de ζ . On notera $c_\zeta = c(\alpha_1, \dots, \alpha_a)$. Si il n’y a pas d’ambiguïté sur la structure de quotient, on posera $c_A = c_\zeta$.

On montre que c_A est un entier qui vaut 1 si $A = J$. On suppose maintenant que A est un quotient optimal de J . Soit $\zeta^\vee : A^\vee \rightarrow J$ le morphisme donné par dualité. On dispose alors d’une isogénie $\zeta\zeta^\vee : A^\vee \rightarrow A$. On note H le noyau de cette isogénie, on a alors [17]

$$(1) \quad c_A = \sqrt{|H|}.$$

Pour un quotient optimal A de la partie nouvelle $J_0(N)^{new}$ de la jacobienne $J_0(N)$ de $X_0(N)$ (notons que $J_0(N)^{new}$ est défini comme un quotient optimal de $J_0(N)$), la définition précédente est dû à Hida. Pour cette raison nous dirons que c_A est la constante de Hida de A et nous renvoyons aux papiers de Hida [7] [8] pour les liens entre cette constante et les congruences entre formes modulaires (voir aussi [17] pour une interprétation en termes de formes différentielles). L’avantage de la définition de Hida est qu’elle garde un sens pour tout quotient de la jacobienne d’une courbe. Elle est en particulier bien définie pour un quotient optimal de la jacobienne $J_0(N^+, N^-)$.

En utilisant les résultats de Faltings (ou de Ribet dans ce cas particulier), on montre qu’un de tel quotient A' de la partie nouvelle $J_0(N^+, N^-)^{new}$ (encore une fois définie comme un quotient) de $J_0(N^+, N^-)$ est isogène à un quotient A de la partie nouvelle $J_0(N)^{new}$ de $J_0(N)$. Notons que dans

cette situation par les théorèmes de multiplicité 1, il n’y a pas d’ambiguïté sur la structure de quotient, on parlera donc de la constante de Hida A ou de A' sans référence à la structure de quotient.

Pour toute variété abélienne A sur \mathbb{Q} et tout nombre premier l , on note $\phi(A, l)$ le groupe des composantes de la fibre géométrique en l du modèle de Néron de A . Si $\zeta : A \rightarrow B$ est un morphisme de variétés abéliennes définies sur \mathbb{Q} , on note ζ_{l*} le morphisme induit de $\phi(A, l)$ dans $\phi(B, l)$. On montre dans ce texte le résultat suivant :

Théorème 1.1. *Soit $J_1 = J_0(N^+, N^-)$. Soit p et q deux nombres premiers divisant N^- et $J_2 = J_0(N^+pq, \frac{N^-}{pq})$. Soient A_i des quotients optimaux de la partie nouvelles J_i^{new} de J_i ($i = 1$ ou $i = 2$) qui sont isogènes. Soit $\zeta_i : J_i \rightarrow A_i$ les morphismes donnant la structure de quotient optimal. On a la relation*

$$(2) \quad c_{A_2} = c_{A_1} \frac{|\phi(A_1, p)| |\phi(A_2, q)|}{|\text{coker } \zeta_{1,p*}|^2 |\text{Im } \zeta_{2,q*}|^2}.$$

Dans [17] une expression pour la hauteur de Faltings d’un quotient optimal A de la partie nouvelle de $J_0(N)$ est donné et elle fait intervenir la constante de Hida c_A .

Quand les A_i sont des courbes elliptiques, le théorème précédent est dû à Ribet et Takahashi [16] et les méthodes de ce texte sont inspirés de leurs travaux. Donnons une application de ce théorème. On suppose que

$$N = \prod_{i=1}^r p_i q_i$$

est un produit d’un nombre pair de facteurs premiers. On pose $D_i = \prod_{j=1}^i p_j q_j$ et $N_i = \frac{N}{D_i}$. On pose $J'_i = J_0(N_i, D_i)$ et $J_i = J_i^{new}$ la partie nouvelle de J'_i . Par convention $J_0 = J_0(N)^{new}$ et $J'_0 = J_0(N)$. Les variétés abéliennes J_i sont toutes dans la même classe d’isogénie. On note

$$\zeta_i : J'_i \longrightarrow J_i$$

l’application qui fait de J_i un quotient optimal de J'_i . On note $c_0 = c_{J_0(N)^{new}}$ la constante de Hida de $J_0 = J_0(N)^{new}$. Cette constante mesure les congruences entre l’espace des formes nouvelles et celui des formes anciennes sur $J_0(N)$. Quand on a remarqué que $J_r = J'_r$ et donc que la constante de Hida de J_r vaut 1, une application répétée du théorème donne :

Théorème 1.2. *On a la relation :*

$$(3) \quad c_{J_0(N)^{new}} = \prod_{i=0}^{r-1} \frac{|\phi(J_{i+1}, p_{i+1})| |\phi(J_i, q_{i+1})|}{|\text{coker } \zeta_{i+1, p_{i+1}*}|^2 |\text{Im } \zeta_{i, q_{i+1}*}|^2}.$$

On peut bien sûr permuter les p_i et les q_i dans les formules précédentes ou choisir une autre décomposition de N en un produit de nombres premiers ; c'est une conséquence du théorème précédent que toutes les expressions que l'on peut former de cette manière coïncident.

Quand $N = pq$ est un produit de deux nombres premiers on peut encore préciser les résultats précédents : Soit $S_2(pq, \mathbb{Z})$ l'espace des formes modulaires cuspidales de poids 2 sur $J_0(pq)$ à coefficients dans \mathbb{Z} . On désigne par S^{new} (resp S^{old}) le sous \mathbb{Z} -module de $S_2(pq, \mathbb{Z})$ engendré par les formes nouvelles (resp anciennes). On obtient alors

Théorème 1.3. *Soit l un nombre premier ne divisant pas $6p(p+1)q(q-1)$ et divisant $|J_0(q)(\mathbb{F}_{p^2})|$. Il existe alors une forme $f \in S^{\text{new}}$ et une forme $g \in S^{\text{old}}$ telle que f soit congrue à g modulo l . On a de plus la minoration*

$$(4) \quad \log c_{J_0(pq)^{\text{new}}} \geq \max \left(\frac{q-1}{6} \log(p-1), \frac{p-1}{6} \log(q-1) \right) - O(\log pq).$$

Indiquons brièvement le plan de ce texte : Dans la section 2, nous donnons les préliminaires de géométrie algébrique qui nous serviront à calculer la constante de Hida d'un quotient optimal de la jacobienne J d'une courbe de genre $g \geq 2$ définie et semi-stable sur \mathbb{Q} en fonction des fibres de mauvaise réduction du modèle de Néron de J . Ces résultats sont donnés dans la section 3. On prouve les théorèmes 1.1 et 1.2 dans la section 4. Le théorème 1.3 est démontré dans la dernière partie en utilisant les résultats de Mazur [9] et de Jordan-Livné [6].

Remerciements Je tiens à remercier chaleureusement le rapporteur de ce texte pour de multiples remarques pertinentes qui m'ont permis de corriger de nombreuses imprécisions. C'est aussi un plaisir de remercier les organisateurs des journées arithmétiques de Rome pour leur invitation et la qualité de l'organisation de cette conférence.

2. Isogénies autoduales

Soit \mathcal{O} un anneau de valuation discrète de corps des fractions K et de corps résiduel k de caractéristique $p > 0$. Soit A_K une variété abélienne sur K . On note A son modèle de Néron, A^0 la composante connexe de l'élément neutre, A_k et A_k^0 les fibres spéciales de A et A^0 et $\phi(A, k)$ le groupe des composantes de A_k . On suppose que A_K a réduction semi-stable sur \mathcal{O} . On a donc une suite exacte pour la topologie fppf :

$$(5) \quad 0 \rightarrow T_k \rightarrow A_k^0 \rightarrow A_k^* \rightarrow 0$$

où A_k^* est une variété abélienne sur k et T_k est un tore.

Soit u_K une isogénie $A_K \rightarrow B_K$ de noyau G_K . Soit u son extension au modèle de Néron et u^0 son extension au modèle de Néron connexe. On a

alors une suite exacte pour la topologie fppf :

$$(6) \quad 0 \rightarrow G \rightarrow A^0 \rightarrow B^0 \rightarrow 0$$

où G est un schéma en groupe quasi-fini et plat sur $S = \text{Spec}(\mathcal{O})$ de fibre générique G_K . On note G^f la partie finie de G (la complétion de G le long de sa fibre spéciale), G^t sa partie torique et G_K^f (resp G_K^t) la fibre générique de G^f (resp G^t).

Pour tout schéma noethérien S et tout schéma en groupe commutatif L , fini et plat sur S on note L^\vee le dual de Cartier de L . On a donc un accouplement de dualité sur $L \times L^\vee$. Pour tout sous-schéma en groupe L' de L , on note L'^\perp le sous-schéma en groupe de L^\vee orthogonal à L' .

Soit A_K^\vee la variété abélienne duale de A_K . Soit

$$\lambda : A_K \rightarrow A_K^\vee$$

une isogénie. En identifiant $(A_K^\vee)^\vee$ à A_K , on dispose d'une isogénie

$$\lambda^\vee : A_K \rightarrow A_K^\vee.$$

On dit que λ est autoduale si $\lambda = \lambda^\vee$.

Le but de cette partie est de montrer le résultat suivant qui nous sera utile dans la suite de ce texte :

Proposition 2.1. *On suppose que A_K est une variété abélienne sur K à réduction purement torique. Soit A_K^\vee la variété abélienne duale et*

$$\lambda : A_K \rightarrow A_K^\vee$$

une isogénie autoduale de noyau H_K . Alors $|(H_K)|$ est un carré et

$$|(H_K^f)| = \sqrt{|(H_K)|}.$$

Pour toute variété abélienne B_K sur K , on note ${}_n B_K$ le noyau de l'isogénie n_{B_K} multiplication par n sur B_K . On sait que l'on a la relation

$$({}_n B_K)^\vee = {}_n B_K^\vee.$$

Lemme 2.2. *Soit a la dimension de A_K . Pour tout entier n on a :*

$$(7) \quad |({}_n A_K^f)| = n^a$$

Preuve. L'isogénie n_{A_K} induit la multiplication par n sur la composante neutre de la fibre spéciale. Comme la réduction de A_K est purement torique, le noyau de la multiplication par n est de cardinal n^a . On obtient le lemme en utilisant la définition de ${}_n A_K^f$. □

Lemme 2.3. *Soit n un entier. La restriction à ${}_n A_K^f \times {}_n A_K^{\vee f}$ de l'accouplement de dualité sur ${}_n A_K \times {}_n A_K^\vee$ est triviale.*

Preuve. En passant aux composantes l -primaires, on se ramène au cas où $n = l^r$ pour un nombre premier l . On note $T_l(A_K)$ le module de Tate de A_K . On a une filtration

$$0 \subset T_l(A_K)^t \subset T_l(A_K)^f \subset T_l(A_K)$$

où

$$T_l(A_K)^f = \varprojlim_{\leftarrow} {}_l A_K^f(\overline{K})$$

et

$$T_l(A_K)^t = T_l(A_K)^f$$

car A est à réduction purement torique (ce qui nous dispense d'en donner une définition). Le théorème d'orthogonalité de Grothendieck ([5] théorème 5-2) nous assure que la restriction à $T_l(A_K)^t \times T_l(A_K^\vee)^f$ de l'accouplement sur $T_l(A_K) \times T_l(A_K^\vee)$ est triviale. Le lemme s'obtient alors en remarquant que l'accouplement sur ${}_l A_K^f \times {}_l A_K^{\vee f}$ est induit par celui sur $T_l(A_K)^t \times T_l(A_K^\vee)^f$. \square

Lemme 2.4. *Soit n un entier. On a un isomorphisme*

$$(8) \quad {}_n A_K^{\vee f} \simeq ({}_n A_K / {}_n A_K^f)^\vee.$$

Preuve. On a deux suites exactes :

$$(9) \quad 0 \longrightarrow {}_n A_K^f \longrightarrow {}_n A_K \longrightarrow {}_n A_K / {}_n A_K^f \longrightarrow 0$$

et

$$(10) \quad 0 \longrightarrow ({}_n A_K / {}_n A_K^f)^\vee \longrightarrow ({}_n A_K)^\vee \longrightarrow ({}_n A_K^f)^\vee \longrightarrow 0.$$

La dualité parfaite sur ${}_n A_K \times {}_n A_K^\vee$ est triviale sur

$${}_n A_K^f \times ({}_n A_K / {}_n A_K^f)^\vee$$

et induit la dualité de Cartier sur ${}_n A_K^f \times ({}_n A_K^f)^\vee$. On a donc

$$({}_n A_K / {}_n A_K^f)^\vee = ({}_n A_K^f)^\perp.$$

Mais d'après le lemme 2.3, on a :

$${}_n A_K^{\vee f} \subset ({}_n A_K^f)^\perp,$$

mais d'après le lemme 2.2, pour une raison de cardinalité, on a

$${}_n A_K^{\vee f} = ({}_n A_K^f)^\perp.$$

Ceci termine la preuve du lemme 2.4. \square

Lemme 2.5. *La restriction à $H_K^f \times H_K^f$ de l'accouplement de dualité sur $H_K \times H_K$ est triviale.*

Preuve. Soit n le cardinal de H_K . Soit $\delta : A_K^\vee \rightarrow A_K$ l'isogénie telle que $\delta \circ \lambda = n_{A_K}$. Soit I_K son noyau. On a la relation :

$$I_K = \lambda(nA_K)$$

et δ est une isogénie autoduale. On a donc deux suites exactes :

$$(11) \quad 0 \rightarrow H_K \rightarrow nA_K \rightarrow I_K \rightarrow 0$$

et

$$(12) \quad 0 \rightarrow I_K \rightarrow nA_K^\vee \rightarrow H_K \rightarrow 0.$$

Dans cette dernière suite exacte H_K est réalisé comme l'image par δ de nA_K^\vee . On peut donc appliquer le lemme 4.4.5 de [11] et on obtient les deux suites exactes suivantes :

$$(13) \quad 0 \rightarrow H_K^f \rightarrow nA_K^f \rightarrow I_K^f \rightarrow 0$$

et

$$(14) \quad 0 \rightarrow I_K^f \rightarrow nA_K^{\vee f} \rightarrow H_K^f \rightarrow 0.$$

L'accouplement sur $H_K^f \times H_K^f$ est trivial car il se déduit de l'accouplement sur $nA_K^f \times nA_K^{\vee f}$ qui est trivial d'après le lemme 2.3. \square

Lemme 2.6. *On a l'inégalité :*

$$(15) \quad |(H_K^f)^2| \leq |(H_K)|.$$

Preuve. C'est une conséquence immédiate de la relation

$$|(H_K^f)| |((H_K^f)^\perp)| = |(H_K)|$$

et du lemme 2.5 qui nous assure que $H_K^f \subset (H_K^f)^\perp$. \square

Lemme 2.7. *On a une inclusion naturelle de K -schéma en groupe :*

$$(16) \quad (H_K/H_K^f)^\vee \subset H_K^f.$$

Preuve. On a un diagramme commutatif à lignes exactes :

$$\begin{array}{ccccccc} 0 & \rightarrow & H_K^f & \rightarrow & H_K & \rightarrow & H_K/H_K^f & \rightarrow & 0 \\ & & \downarrow & & \downarrow & & \downarrow & & \\ 0 & \rightarrow & nA_K^f & \rightarrow & nA_K & \rightarrow & nA_K/nA_K^f & \rightarrow & 0. \end{array}$$

On en déduit après passage au dual et en utilisant le lemme 2.4 le diagramme commutatif à ligne exactes :

$$\begin{array}{ccccccc} 0 & \rightarrow & nA_K^{\vee f} & \rightarrow & nA_K^\vee & \rightarrow & (nA_K^f)^\vee & \rightarrow & 0 \\ & & \downarrow & & \downarrow & & \downarrow & & \\ 0 & \rightarrow & (H_K/H_K^f)^\vee & \rightarrow & H_K & \rightarrow & (H_K^f)^\vee & \rightarrow & 0. \end{array}$$

Le lemme s'obtient à partir de ce diagramme en utilisant l'équation (14) qui nous assure que l'image de ${}_n A_K^{\vee f}$ dans H_K est H_K^f . \square

Preuve de la proposition 2.1. Le lemme 2.7 prouve que

$$|(H_K/H_K^f)| \leq |(H_K^f)|.$$

La proposition 2.1 est donc conséquence du lemme 2.6. \square

3. Constante de Hida et monodromie

Soit X une surface de Riemann et J sa jacobienne. Rappelons que l'on a définie pour tout quotient optimal A de J la constante de Hida c_A de A [17]. Soit $\zeta : J \rightarrow A$ le morphisme de variété abélienne donnant la structure de quotient. Soit $\zeta^\vee : A^\vee \rightarrow J$ le morphisme dual. On dispose alors d'une isogénie autoduale $\zeta\zeta^\vee : A^\vee \rightarrow A$ de noyau H avec

$$(17) \quad c_A = \sqrt{|H|}.$$

Notons que la constante de Hida dépend en général du morphisme ζ . La notation c_A présuppose donc que A est donné avec sa structure de quotient optimal. Nous pensons que cet abus de notation ne devrait pas poser de problème au lecteur. Dans les applications cette structure sera en fait unique par les théorèmes de multiplicité 1.

Soit maintenant V une variété abélienne sur \mathbb{Q} de dimension r . On suppose que V a réduction semi-stable sur \mathbb{Q} . Soit l une place de mauvaise réduction de V . On note $T(V, l)$ la partie torique de la composante neutre de la réduction du modèle de Néron de V en l , $H(V, l)$ le groupe des caractères de $T(V, l)$ et $\phi(V, l)$ le groupe des composantes. On rappelle ([5, Théorème 10.4]) que l'on a un accouplement de monodromie canonique non dégénéré :

$$(18) \quad u_V : H(V, l) \times H(V^\vee, l) \rightarrow \mathbb{Z}$$

et une suite exacte induite

$$(19) \quad 0 \rightarrow H(V^\vee, l) \rightarrow \text{Hom}_{\mathbb{Z}}(H(V, l), \mathbb{Z}) \rightarrow \phi(V, l) \rightarrow 0.$$

Soit t la dimension de $T(V, l)$. On note encore u_V l'accouplement induit sur $\wedge^t H(V, l) \times \wedge^t H(V^\vee, l)$. On en déduit le lemme suivant qui nous sera utile dans la suite de ce papier.

Lemme 3.1. *Soient x et y des générateurs de $\wedge^t H(V, l)$ et $\wedge^t H(V^\vee, l)$. On a alors*

$$|u_V(x, y)| = |\phi(V, l)|.$$

On suppose maintenant que X , J et A sont définis sur \mathbb{Q} que J et A sont à réduction purement torique en une place l . Soit a la dimension de A . On dispose des morphismes induit

$$\zeta^* : H(A, l) \rightarrow H(J, l)$$

et

$$\zeta^{\vee*} : H(J, l) \longrightarrow H(A^\vee, l).$$

On pose alors :

$$(20) \quad \Theta(A, l) = \zeta^* H(A, l) \otimes_{\mathbb{Z}} \mathbb{Q} \cap H(J, l).$$

Proposition 3.2. *On a $c_A = |(\text{coker}(\zeta^{\vee*}\zeta^*))|$*

Preuve. Soient \mathcal{A} et \mathcal{A}^\vee les modèles de Néron de A et A^\vee . Soient \mathcal{A}^0 et $\mathcal{A}^{\vee 0}$ les composantes neutres de \mathcal{A} et \mathcal{A}^\vee . L'isogénie $\lambda = \zeta\zeta^\vee$ se prolonge au modèles de Néron connexe et on a une suite exacte pour la topologie fppf :

$$0 \longrightarrow H \longrightarrow \mathcal{A}^{\vee 0} \longrightarrow \mathcal{A}^0 \longrightarrow 0.$$

Le noyau de l'isogénie induite sur les tores est alors $H^f \otimes \mathbb{Z}/l\mathbb{Z}$. On en déduit alors que

$$|(\text{coker}(\zeta^{\vee*}\zeta^*))| = |H_f|.$$

La proposition résulte alors de l'équation (17) et de la proposition 2.1. \square

On note u_J l'accouplement de monodromie induit sur

$$\bigwedge^a \Theta(A, l) \times \bigwedge^a \Theta(A, l).$$

Soit e un générateur du \mathbb{Z} -module libre de rang 1, $\bigwedge^a \Theta(A, l)$ et $\tau = u_J(e, e)$.

Proposition 3.3. *On a la relation :*

$$(21) \quad c_A |(\phi(A, l))| = [\Theta(A, l) : \zeta^* H(A, l)]^2 \tau.$$

Preuve. Soit x et y des générateurs de $\bigwedge^a H(A, l)$ et de $\bigwedge^a H(A^\vee, l)$. D'après le lemme 3.1, on a

$$|u_A(x, y)| = |(\phi(A, l))|.$$

D'après la proposition 3.2, x étant fixé, on peut choisir $y = \zeta^{\vee*}\zeta^*x$. On en déduit que

$$(22) \quad |u_A(x, \zeta^{\vee*}\zeta^*x)| = c_A |u_A(x, y)| = c_A |(\phi(A, l))|.$$

D'autre part, on a la relation

$$(23) \quad |u_A(x, \zeta^{\vee*}\zeta^*x)| = |u_J(\zeta^*x, \zeta^*x)| = [\Theta(A, l) : \zeta^* H(A, l)]^2 \tau.$$

(Remarquer que τ est positif) Ceci termine la preuve de la proposition. \square

Lemme 3.4. *Soit $\zeta_* : \phi(J, l) \longrightarrow \phi(A, l)$ le morphisme induit par ζ . On a la relation :*

$$(24) \quad [\Theta(A, l) : \zeta^* H(A, l)] = |(\text{coker}\zeta_*)|$$

Preuve. Comme $[\Theta(A, l) : \zeta^*H(A, l)]$ est le cardinal de la partie de torsion du conoyau de l'application $\zeta^* : H(A, l) \rightarrow H(J, l)$, on peut aussi le calculer comme le cardinal du conoyau de l'application

$$\text{Hom}(\zeta^*, \mathbb{Z}) : \text{Hom}_{\mathbb{Z}}(H(J, l), \mathbb{Z}) \rightarrow \text{Hom}_{\mathbb{Z}}(H(A, l), \mathbb{Z}).$$

On obtient alors le lemme quand on applique le lemme du serpent au diagramme commutatif à lignes exactes

$$\begin{array}{ccccccc} 0 \rightarrow & H(J, l) & \rightarrow & \text{Hom}_{\mathbb{Z}}(H(J, l), \mathbb{Z}) & \rightarrow & \phi(J, l) \rightarrow & 0 \\ & \downarrow & & \downarrow & & \downarrow & \\ 0 \rightarrow & H(A^\vee, l) & \rightarrow & \text{Hom}_{\mathbb{Z}}(H(A, l), \mathbb{Z}) & \rightarrow & \phi(A, l) \rightarrow & 0 \end{array}$$

quand on a remarqué que la flèche verticale de gauche est surjective puisque l'application ζ^* induit une immersion fermée sur les modèles de Néron connexe de A^\vee et J . (Noter que si $l > 2$, on a même une immersion fermée au niveau des modèles de Néron d'après [1, Théorème 4, p. 186].

Le rapporteur m'a fait remarquer qu'il est difficile de donner une référence pour la commutativité du carré de droite dans le diagramme commutatif précédent. Nous espérons que le lecteur courageux écrira une preuve de ce fait.

4. Quotients de jacobienes de courbes de Shimura

Soit N un entier sans facteurs carrés. Soit $N = N^+N^-$ une décomposition de N avec N^- un produit d'un nombre pair de nombres premiers. Soit X_{N^+, N^-} la courbe de Shimura définie dans l'introduction et $J_0(N^+, N^-)$ sa jacobienne. Soit p et q deux facteurs premiers de N^- . On pose alors

$$J_1 = J_0(N^+, N^-), \quad J_2 = J_0(N^+pq, \frac{N^-}{pq}) \quad \text{et} \quad J_3 = J_0(N^+p, \frac{N^-}{pq}).$$

On a alors la proposition suivante ([16, proposition 1]), obtenue par Ribet [13] quand $N^- = pq$ (ie $J_2 = J_0(N)$) et qui se généralise grâce aux travaux de Buzzard [3] :

Proposition 4.1. *On a une suite exacte canonique :*

$$0 \rightarrow H(J_1, p) \xrightarrow{i} H(J_2, q) \rightarrow H(J_3, q) \times H(J_3, q) \rightarrow 0.$$

Cette suite est compatible à l'action des opérateurs de Hecke T_l , $(l, N) = 1$, sur chacun des termes de la suite. De plus l'application i est compatible avec l'accouplement de monodromie : pour tout $(x, y) \in H(J_1, p)$ on a

$$(25) \quad u_{J_1}(x, y) = u_{J_2}(i(x), i(y)).$$

Soit A un quotient optimal de la partie nouvelle $J_0^{new}(N)$ de $J_0(N)$. Par la correspondance de Jacquet-Langlands, il existe des quotients optimaux A_1, A_2 de J_1 et J_2 qui sont isogène à A . Pour $i = 1$ ou $i = 2$, on note ζ_i l'application de J_i vers A_i qui s'en déduit.

Lemme 4.2. *On a la relation*

$$(26) \quad i(\Theta(A_1, p)) = \Theta(A_2, q)$$

Pour tout nombre premier l divisant N , le modèle de Néron de $J_0^{new}(N)$ est à réduction purement torique. Si $N = l$ cela résulte de la description de Mazur de la jacobienne $J_0(l)$ en l . Sinon soit l' tel que ll' divise N . Par Jacquet-Langlands, on sait que $J_0^{new}(N)$ est isogène à la partie nouvelle $J_{ll', \frac{N}{ll'}}^{new}$ de $J_{ll', \frac{N}{ll'}}$. Le théorème de Cerednik-Drinfeld assure que $J_{ll', \frac{N}{ll'}}$ est à réduction purement torique en l . On obtient le résultat car la propriété d'être à réduction purement torique est stable par isogénies et par passages au quotient. On déduit de cela que A_1 et A_2 sont à réduction purement torique en p et q et que $H(A_1, p)$ et $H(A_2, q)$ sont des \mathbb{Z} -modules libres de rang $a = \dim(A)$. Soit (f_1, f_2, \dots, f_r) les formes nouvelles de poids 2 sur A . Pour tout entier n , on écrit $T_n f_i = a_n(f_i) f_i$. On a alors

$$\Theta(A_1, p) = H(J_1, p) \cap \bigoplus_{i=1}^r (H(J_1, p) \otimes \mathbb{R})_{f_i}$$

où

$$(H(J_1, p) \otimes \mathbb{R})_{f_i} = \{x \in H(J_1, p) \otimes \mathbb{R} \mid \forall n \in \mathbb{N}, (N, n) = 1, T_n \cdot x = a_n(f_i) \cdot x\}.$$

On finit la preuve du lemme en utilisant une description analogue pour $\Theta(A_2, q)$ et le fait que i a un conoyau sans torsion et est compatible à l'action des opérateurs de Hecke pour n premier à N .

Pour tout nombre premier l divisant N , on note

$$(27) \quad \zeta_{i, l*} : \phi(J_i, l) \longrightarrow \phi(A_i, l)$$

le morphisme induit par ζ_i . On obtient alors en utilisant les équations (21,24,25,26) la relation

$$(28) \quad \frac{c_{A_1} |\phi(A_1, p)|}{|\text{coker } \zeta_{1, p*}|^2} = \frac{c_{A_2} |\phi(A_2, q)|}{|\text{coker } \zeta_{2, q*}|^2}.$$

Ceci termine la preuve du théorème 1.1.

5. La courbe modulaire $J_0(pq)$

Quand $N = pq$, le théorème 1.2 prend la forme très simple suivante :
Soit

$$\zeta : J_0(pq) \rightarrow J_0(pq)^{new}$$

le morphisme donnant la structure de quotient optimal de $J_0(pq)^{new}$. On a la relation

$$(29) \quad c_0 = c_{J_0(N)^{new}} = \frac{|\phi(J_0(1, pq), p)| |\phi(J_0(pq)^{new}, q)|}{|\text{Im}(\zeta_{q*})|^2}$$

Pour expliciter cette relation nous utiliserons le fait que $\phi(J_0(pq)^{new}, q)$ et c_0 sont des entiers, la description de $\phi(J_0(pq), q)$ dû à Mazur (qui permet de majorer le terme $|\text{Im}(\zeta_{q*})|^2$) [9] (voir aussi [12]) et la description

de $\phi(J_0(1, pq), p)$ dû à Jordan et Livné [6]. Décrivons brièvement leurs résultats. Pour simplifier les énoncés nous ne donnerons que les parties premières à 6 de ces groupes. Pour des nombres rationnels a et b , on écrit $a \simeq b$ si leurs parties première à 6 coïncident. Mazur ([9, p. 174–175]) prouve que l'on a

$$(30) \quad |\phi(J_0(pq), q)| \simeq (q-1)(p+1)$$

et

$$(31) \quad |\phi(J_0(pq), q)| = O(pq).$$

On en déduit que $|\text{Im}(\zeta_{q^*})| = O(pq)$.

Soit \mathbb{B} l'algèbre de quaternion indéfinie de discriminant pq et $\widehat{\mathbb{B}}$ l'algèbre de quaternion définie de discriminant q . Soit $B(p)$ la matrice de Brandt de degré p pour $\widehat{\mathbb{B}}$ relative aux classe d'idéaux de $\widehat{\mathbb{B}}$ [4]. C'est une matrice carré d'ordre h où

$$(32) \quad h = \frac{1}{4} \left(1 - \left(\frac{-4}{q} \right) \right) + \frac{1}{3} \left(1 - \left(\frac{-3}{q} \right) \right) + \frac{q-1}{12}.$$

(avec les conventions $\left(\frac{-4}{2} \right) = 0 = \left(\frac{-3}{3} \right)$.) Soit $g(n)$ le genre de $X_0(n)$, on a alors $h = g(q) + 1$. On peut écrire le polynôme caractéristique $P(x)$ de B sous la forme

$$P(x) = (x - p - 1) \prod_{i=2}^h (x - \lambda_i)$$

où les λ_i sont les valeurs propres de l'opérateur de Hecke agissant sur l'espace des formes modulaires cuspidales de poids 2 sur $X_0(q)$ [4]. Comme une base de cette espace est donnée par les new-forms, on dispose de la majoration

$$(33) \quad |\lambda_i| \leq 2\sqrt{p}.$$

On a alors le résultat suivant dû à Jordan et Livné [6]

$$(34) \quad |\phi(J_0(1, pq), p)| \simeq \frac{p+1}{q-1} \left| \prod_{i=2}^h (p+1)^2 - \lambda_i^2 \right|$$

On déduit des deux dernières équations (plus précisément de la forme donnée dans [6] de l'équation (34)) et de la valeur de h donnée par (32) que l'on a l'estimation suivante :

$$(35) \quad \log \left(|\phi(J_0(1, pq), p)| \right) \geq \frac{q-1}{6} \log(p-1) - O(\log(pq)).$$

Par ailleurs un calcul simple prouve que l'on a l'égalité

$$(36) \quad \left| \prod_{i=2}^h (p+1)^2 - \lambda_i^2 \right| = |J_0(q)(\mathbb{F}_{p^2})|.$$

On obtient alors la preuve de la première partie du théorème 1.3 en utilisant les équations (29) (30) et (34) et le théorème 5-2 de [17] qui nous assure qu'un nombre premier l ne divisant pas $2pq$ mais divisant la constante de Hida $c_{J_0(pq)}^{new}$ à la propriété de l'énoncé du théorème 1.3. La deuxième partie est une simple conséquence des équations (29), (31) et (35) éventuellement en inversant le rôle de p et q .

Bibliographie

- [1] S. BOSCH, W. LUTKEBOHMERT, M. RAYNAUD, *Néron models*. Springer-Verlag New York, 1990.
- [2] M. BERTOLINI, H. DARMON, *Heegner points on Mumford-Tate curves*. Invent. Math **126** (1996), no. 3, 413–456.
- [3] K. BUZZARD, *Integral models of certain Shimura curves*. Duke. Math. Journ. **87** (1997), 591–612.
- [4] B. GROSS, *Heights and the Special values of L-series*. Canadian Math. Soc. Conf. Proc. **7** (1997), 115–187.
- [5] A. GROTHENDIECK, *Groupe de Monodromie en Géométrie Algébrique*. SGA 7 I, Lecture notes in Math. **288**, Springer Verlag, 1972.
- [6] B. JORDAN, R. LIVNE, *On the Néron Model of Jacobian of Shimura Curves*. Compositio Math. **60** (1986), 227–236
- [7] H. HIDA, *Congruences for cusps forms and special values of their zeta functions*. Invent. Math **63** (1981), 225–261.
- [8] H. HIDA, *On congruence divisors of cusp forms as factors of the special values of their zeta functions*. Invent. Math **64** (1981), 225–261.
- [9] B. MAZUR, *Modular Curves and the Eisenstein Ideal*. Pub. Math. IHES **47** (1977), 33–186.
- [10] B. MAZUR, *Rational isogenies of prime degree*. Invent. Math **44** (1978), 129–162.
- [11] M. RAYNAUD, *Hauteurs et isogénies*. Astérisque **127** (1985), 199–234.
- [12] M. RAYNAUD, *Jacobienne des courbes modulaires*. Astérisque **196-197** (1991), 9–25.
- [13] K. RIBET, *On modular representations of $\mathrm{Gal}(\overline{\mathbb{Q}}/\mathbb{Q})$ arising from modular forms*. Invent. Math. **100** (1990), 431–471.
- [14] K. RIBET, *Congruence relation between modular forms*. Proc. Int. Congr. Math. (1983), 503–514.
- [15] K. RIBET, *Mod p Hecke operators and congruences between modular forms*. Invent. Math. (1983), 193–205.
- [16] K. RIBET, S. TAKAHASHI, *Parametrisation of elliptic curves by Shimura curves and by classical modular curves*. Proc. Natl. Acad. Sci. USA **94** (1997), 11110–11114.
- [17] E. ULLMO, *Hauteur de Faltings de quotients de $J_0(N)$, discriminants d'algèbres de Hecke et congruences entre formes modulaires*. Amer. J. of Math. **122** (2000), 83–115.
- [18] M.-F. VIGNÉRAS, *Arithmétique des algèbres de quaternions*. Lect. Notes. Maths **800**, Springer-Verlag New-York, 1980.

Emmanuel ULLMO
 Princeton University
 Departement of Maths. Fine Hall
 08540 Princeton NJ
 USA
E-mail : eullmo@math.Princeton.edu