

GRÉGORY BERHUY

## Réalisation de formes $\mathbb{Z}$ -bilinéaires symétriques comme formes trace hermitiennes amplifiées

*Journal de Théorie des Nombres de Bordeaux*, tome 12, n° 1 (2000), p. 25-36

[http://www.numdam.org/item?id=JTNB\\_2000\\_\\_12\\_1\\_25\\_0](http://www.numdam.org/item?id=JTNB_2000__12_1_25_0)

© Université Bordeaux 1, 2000, tous droits réservés.

L'accès aux archives de la revue « Journal de Théorie des Nombres de Bordeaux » (<http://jtnb.cedram.org/>) implique l'accord avec les conditions générales d'utilisation (<http://www.numdam.org/conditions>). Toute utilisation commerciale ou impression systématique est constitutive d'une infraction pénale. Toute copie ou impression de ce fichier doit contenir la présente mention de copyright.

NUMDAM

Article numérisé dans le cadre du programme  
Numérisation de documents anciens mathématiques

<http://www.numdam.org/>

## Réalisation de formes $\mathbb{Z}$ -bilinéaires symétriques comme formes trace hermitiennes amplifiées

par GRÉGORY BERHUY

**RÉSUMÉ.** Dans cet article, on montre de manière explicite que toute forme  $\mathbb{Z}$ -bilinéaire symétrique non dégénérée de rang pair, et non  $\mathbb{Q}$ -isomorphe au plan hyperbolique, se réalise comme forme trace hermitienne amplifiée d'une algèbre  $\mathbb{Z}[\alpha]$ , où  $\alpha$  est un entier algébrique. Plus précisément, on montre que pour tout  $S \in M_{2n}(\mathbb{Z})$  symétrique, avec  $\det S \neq 0$  (et  $\det S \not\equiv -1 \pmod{\mathbb{Q}^{*2}}$  si  $n = 1$ ), il existe un entier algébrique  $\alpha$ , une involution  $\mathbb{Q}$ -linéaire  $\sigma$  de  $\mathbb{Q}(\alpha)$ ,  $\lambda \in \mathbb{Q}(\alpha)$   $\sigma$ -symétrique et une  $\mathbb{Z}$ -base  $v_1, \dots, v_{2n}$  d'un idéal de  $\mathbb{Z}[\alpha]$  tels que  $S = (\text{Tr}_{\mathbb{Q}(\alpha)/\mathbb{Q}}(\lambda v_i v_j^\sigma))$ .

**ABSTRACT.** In this paper, we show by an explicit method that every non degenerate symmetric  $\mathbb{Z}$ -bilinear form of even rank, which is not  $\mathbb{Q}$ -isomorphic to the hyperbolic plane, can be realized as a hermitian scaled trace form of some algebra  $\mathbb{Z}[\alpha]$ , where  $\alpha$  is an algebraic integer. More precisely, we show that for every symmetric matrix  $S \in M_{2n}(\mathbb{Z})$ , with  $\det S \neq 0$  (and  $\det S \not\equiv -1 \pmod{\mathbb{Q}^{*2}}$  if  $n = 1$ ), there exist an algebraic integer  $\alpha$ , a  $\mathbb{Q}$ -linear involution  $\sigma$  of  $\mathbb{Q}(\alpha)$ , a  $\sigma$ -symmetric element  $\lambda \in \mathbb{Q}(\alpha)$  and a  $\mathbb{Z}$ -basis  $v_1, \dots, v_{2n}$  of some ideal of  $\mathbb{Z}[\alpha]$  such that  $S = (\text{Tr}_{\mathbb{Q}(\alpha)/\mathbb{Q}}(\lambda v_i v_j^\sigma))$ .

**Introduction.** Krüskemper a prouvé dans [2] que toute forme  $\mathbb{Z}$ -bilinéaire symétrique et non dégénérée peut se réaliser comme une forme trace amplifiée d'une algèbre  $\mathbb{Z}[\alpha]$ , où  $\alpha$  est un entier algébrique. Le but de cet article est de montrer un résultat similaire concernant les formes trace hermitiennes amplifiées. Je remercie vivement Eva Bayer-Fluckiger, ma directrice de thèse, pour l'aide qu'elle m'a apporté dans la réalisation de ce travail.

**Définitions et notations.** Dans ce qui suit, l'expression *forme  $\mathbb{Z}$ -bilinéaire* désigne un couple  $(M, b)$ , où  $M$  est un  $\mathbb{Z}$ -module libre de type fini et où  $b : M \times M \rightarrow \mathbb{Z}$  est une forme bilinéaire. On dit qu'elle est non dégénérée si elle est non dégénérée lorsqu'elle est vue comme forme  $\mathbb{Q}$ -bilinéaire.

Soit  $\alpha$  un entier algébrique. Si  $I$  est un idéal de  $\mathbb{Z}[\alpha]$ , on note

$$I^\sharp = \{x \in \mathbb{Q}(\alpha) / \text{Tr}_{\mathbb{Q}(\alpha)/\mathbb{Q}}(xI) \subset \mathbb{Z}\}.$$

Soit  $\mathcal{J}$  un idéal de  $\mathbb{Z}[\alpha]$ , et soit  $\lambda$  un élément de  $\mathbb{Q}(\alpha)$  tel que  $\lambda \in (\mathcal{J}^2)^\sharp$ . La forme  $\mathbb{Z}$ -bilineaire symétrique  $\mathcal{J} \times \mathcal{J} \rightarrow \mathbb{Z}$ ,  $(x, y) \mapsto \text{Tr}_{\mathbb{Q}(\alpha)/\mathbb{Q}}(\lambda xy)$  est appelée *forme trace amplifiée de  $\mathbb{Z}[\alpha]$*  et notée  $(\mathcal{J}, \text{Tr}_\lambda)$ .

Si de plus  $\sigma$  est une involution  $\mathbb{Q}$ -linéaire non triviale de  $\mathbb{Q}(\alpha)$ , et si  $\mu$  est un élément de  $\mathbb{Q}(\alpha)$  fixé par  $\sigma$  tel que  $\mu \in (\mathcal{J}\mathcal{J}^\sigma)^\sharp$ , la forme  $\mathbb{Z}$ -bilineaire symétrique  $\mathcal{J} \times \mathcal{J} \rightarrow \mathbb{Z}$ ,  $(x, y) \mapsto \text{Tr}_{\mathbb{Q}(\alpha)/\mathbb{Q}}(\mu xy^\sigma)$  est appelée *forme trace hermitienne amplifiée de  $\mathbb{Z}[\alpha]$*  par rapport à  $\sigma$ , et notée  $(\mathcal{J}, \sigma, \text{Tr}_\mu)$ .

On notera  $\mathbb{H}$  le plan hyperbolique  $\langle 1, -1 \rangle$ . Enfin, si  $M$  est une matrice carrée, on note  $\chi_M$  son polynôme caractéristique.

**Réalisation de formes  $\mathbb{Z}$ -bilineaires comme formes traces amplifiées.** Kruskemper a montré dans [2] le résultat suivant :

**Théorème 1.** *Toute forme  $\mathbb{Z}$ -bilineaire symétrique non dégénérée peut être réalisée comme forme trace amplifiée d'une algèbre  $\mathbb{Z}[\alpha]$ , pour un certain entier algébrique  $\alpha$ .*

**Réalisation de formes  $\mathbb{Z}$ -bilineaires comme formes traces hermitiennes amplifiées.** Dans la suite, on s'attachera à montrer le résultat suivant :

**Théorème 2.** *Toute forme  $\mathbb{Z}$ -bilineaire symétrique non dégénérée de rang pair, et non  $\mathbb{Q}$ -isomorphe à  $\mathbb{H}$ , peut être réalisée comme forme trace hermitienne amplifiée d'une algèbre  $\mathbb{Z}[\alpha]$ , où  $\alpha$  est un entier algébrique.*

**Preuve.** Dans ce qui suit,  $S \in M_{2n}(\mathbb{Z})$  désignera la matrice de la forme bilinéaire considérée. On traite d'abord le cas  $n = 1$ ,  $\det S \in \mathbb{Q}^{*2}$ , qui ne peut pas se résoudre par la méthode générale utilisée dans la suite. Remarquons qu'une forme trace hermitienne amplifiée d'une extension quadratique de  $\mathbb{Q}$  est  $\mathbb{Q}$ -isométrique à  $\langle 2\lambda, -2\lambda d \rangle$ , où  $d \in \mathbb{Q}^* - \mathbb{Q}^{*2}$ , et donc le discriminant de cette forme est différent de  $-1$ . Ainsi, une forme  $\mathbb{Q}$ -isomorphe à  $\mathbb{H}$  ne peut se réaliser comme une forme trace hermitienne amplifiée.

Supposons maintenant que  $n = 1$  et  $\det S \in \mathbb{Q}^{*2}$ . Alors  $S$  est congruente sur  $\mathbb{Q}$  à  $sI_2$  où  $s \in \mathbb{Q}^*$ , et donc il existe  $U \in GL_n(\mathbb{Q})$  tel que  $S = sU^tU$ .

On peut supposer que  $U$  est à coefficients entiers. Sinon, il existe  $r \in \mathbb{Z} - \{0\}$  tel que  $rU$  soit à coefficients entiers, et  $S = \frac{s}{r^2}(rU)^t(rU)$ .

Soit donc  $U = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$ . Posons alors  $m = \det U$ ,  $z_1 = m(ai + c)$ ,  $z_2 = m(bi + d)$ , et  $\mathcal{J} = \mathbb{Z}z_1 \oplus \mathbb{Z}z_2$ . Montrons que  $\mathcal{J}$  est un idéal de  $\mathbb{Z}[mi]$ . Pour cela, il suffit de vérifier que  $(mi)z_1$  et  $(mi)z_2$  sont dans  $\mathcal{J}$ . On vérifie aisément que



omet les paramètres  $s_i$ . Si  $m = 2$ , on a facilement

$$\Delta_4(T_4, X) = -(s_2^{-1}s_1^{-1}X^2 - 1)T_4^2 + s_4^{-1}s_3^{-1}X^2(s_2^{-1}s_1^{-1}X^2 - 1) - s_4^{-1}s_1^{-1}X^2.$$

On considère ce polynôme comme un élément de  $\mathbb{Q}[X][T_4]$ , et on montre qu'il est irréductible. Pour cela, il suffit de montrer son irréductibilité dans  $\mathbb{Q}(X)[T_4]$ . Supposons qu'il existe  $R(X) \in \mathbb{Q}(X)$  tel que  $\Delta_4(R(X), X) = 0$ . On a alors

$$-(s_2^{-1}s_1^{-1}X^2 - 1)R^2(X) + s_4^{-1}s_3^{-1}X^2(s_2^{-1}s_1^{-1}X^2 - 1) = s_4^{-1}s_1^{-1}X^2.$$

Soit  $I(X)$  un facteur irréductible de  $s_2^{-1}s_1^{-1}X^2 - 1$ . Si  $v_I$  désigne la valuation par rapport à  $I$ , on obtient

$$\begin{aligned} v_I(s_2^{-1}s_1^{-1}X^2 - 1) + 2v_I(R(X)) = \\ v_I(s_4^{-1}s_1^{-1}X^2 - s_4^{-1}s_3^{-1}X^2(s_2^{-1}s_1^{-1}X^2 - 1)) = 0. \end{aligned}$$

Il est clair que  $s_2^{-1}s_1^{-1}X^2 - 1$  n'est pas un carré, donc  $v_I(s_2^{-1}s_1^{-1}X^2 - 1) = 1$ . On obtient donc  $1 + 2v_I(R(X)) = 0$ , ce qui est absurde, car  $v_I(R(X)) \in \mathbb{Z}$ . Comme le degré en  $X$  de  $\Delta_4$  est égal à 2, cela montre son irréductibilité dans  $\mathbb{Q}(X)[T_4]$ , donc dans  $\mathbb{Q}[X, T_4]$ . Supposons avoir montré l'irréductibilité de  $\Delta_{2m-2}(T_4, \dots, T_{2m-2}, X)$  pour  $m > 2$ . Notons  $P_{2m-2}$  le déterminant de la matrice obtenue en ôtant la première ligne et la première colonne de  $B_{2m-2} - XD_{2m-2}^{-1}$ . Remarquons que  $\deg P_{2m-2} < \deg \Delta_{2m-2}$ , et donc  $\Delta_{2m-2}$  ne divise pas  $P_{2m-2}$ . En développant le déterminant, on obtient

$$\Delta_{2m} = -s_{2m}^{-1}XP_{2m} - T_{2m}^2\Delta_{2m-2}.$$

On a ensuite  $\Delta_{2m} = -s_{2m}^{-1}X(-s_{2m-1}^{-1}X\Delta_{2m-2} - P_{2m-2}) - T_{2m}^2\Delta_{2m-2}$ . Considérons ce polynôme comme un élément de  $\mathbb{Q}[T_4, \dots, T_{2m-2}, X][T_{2m}]$ . Il suffit de montrer son irréductibilité dans  $\mathbb{Q}(T_4, \dots, T_{2m-2}, X)[T_{2m}]$  pour avoir le résultat voulu. Supposons qu'il existe  $R \in \mathbb{Q}(T_4, \dots, T_{2m-2}, X)$  tel que  $\Delta_{2m}(R, X) = 0$ . On a alors

$$R^2\Delta_{2m-2} = -s_{2m}^{-1}X(-s_{2m-1}^{-1}X\Delta_{2m-2} - P_{2m-2}).$$

Considérons la valuation  $v_{\Delta_{2m-2}}$  par rapport à  $\Delta_{2m-2}$ . Les propriétés élémentaires des valuations donnent immédiatement

$$v_{\Delta_{2m-2}}(-s_{2m}^{-1}X(-s_{2m-1}^{-1}X\Delta_{2m-2} - P_{2m-2})) = v_{\Delta_{2m-2}}(P_{2m-2}) = 0.$$

En appliquant  $v_{\Delta_{2m-2}}$  à l'égalité précédente, on obtient  $1 + 2v_{\Delta_{2m-2}}(R) = 0$ . Le même raisonnement que celui du cas précédent nous permet alors d'achever la récurrence. Bref,  $\Delta_{2n}$  est irréductible dans  $\mathbb{Q}[T_4, \dots, T_{2n}, X]$ .

Montrons qu'il est irréductible dans  $\mathbb{Q}(T_4, \dots, T_{2n})[X]$ . Pour cela, il suffit de le montrer pour  $s_1 \cdots s_{2n}\Delta_{2n}$ . Or ce dernier polynôme est unitaire en  $X$  et irréductible dans  $\mathbb{Q}[T_4, \dots, T_{2n}][X]$ , donc dans  $\mathbb{Q}(T_4, \dots, T_{2n})[X]$ . Le théorème d'irréductibilité de Hilbert nous donne alors le résultat voulu.

D'autre part, nous avons les relations  $P_{2m} = -s_{2m-1}^{-1}X\Delta_{2m-2} - P_{2m-2}$  et

$\Delta_{2m} = -s_{2m}^{-1}XP_{2m} - t_{2m}^2\Delta_{2m-2}$ . Une récurrence immédiate nous montre alors que  $P_{2m}$  est impair et que  $\Delta_{2m}$  est pair pour tout  $m$ .

Pour simplifier les notations, on note encore  $B_{2n}$  et  $\Delta_{2n}$  la matrice et le polynôme obtenus en spécialisant.

Alors  $\det(DB_{2n} - XI_{2n}) = \det D \det(B_{2n} - XD_{2n}^{-1})$  est irréductible et pair, d'après ce qui précède. Soit  $a_{2n} \in \mathbb{Z} - \{0\}$  tel que  $A_{2n} = a_{2n}DB_{2n}$  soit à coefficients entiers. Alors  $\chi_{A_{2n}}(X) = a_{2n}^{2n}\chi_{DB_{2n}}(\frac{X}{a_{2n}})$  est encore irréductible pair. De plus,  $D^{-1}A_{2n}D = a_{2n}B_{2n}D = a_{2n}B_{2n}^tD^t = (a_{2n}DB_{2n})^t = A_{2n}^t$ .

• Soit  $\alpha \in \mathbb{C}$  une valeur propre de  $A_{2n}$ . Par construction, c'est un entier algébrique. D'après [3, Th. 1], on peut choisir un vecteur propre  $\mathbf{v}_\alpha =$

$$\begin{pmatrix} v_1 \\ \vdots \\ v_{2n} \end{pmatrix} \text{ de } A_{2n} \text{ associé à } \alpha, \text{ avec } v_i \in \mathbb{Z}[\alpha] \text{ pour tout } i, \text{ tel que } (v_1, \dots, v_{2n})$$

est une  $\mathbb{Z}$ -base d'un idéal de  $\mathbb{Z}[\alpha]$ .

On prend en effet pour  $v_j$  le  $j$ -ième cofacteur de  $A_{2n} - \alpha I_{2n}$  dans une ligne fixée. Le fait que l'on obtienne un vecteur propre provient de la formule de développement du déterminant par rapport à une ligne. Les relations  $\alpha v_i = a_{i1}v_1 + \dots + a_{in}v_{2n}$  suffisent à montrer que l'on obtient bien un idéal, car les coefficients  $a_{ij}$  sont entiers.

De même, d'après [4, première preuve du Th. 1], il existe un vecteur propre

$$\mathbf{v}'_\alpha = \begin{pmatrix} v'_1 \\ \vdots \\ v'_{2n} \end{pmatrix} \text{ de } A_{2n}^t \text{ associé à } \alpha, \text{ avec } v'_i \in \mathbb{Q}(\alpha), \text{ tel que } (v'_1, \dots, v'_{2n}) \text{ et}$$

$(v_1, \dots, v_{2n})$  sont deux bases de  $\mathbb{Q}(\alpha)$  duales par rapport à  $\text{Tr}_{\mathbb{Q}(\alpha)/\mathbb{Q}}$ .

Rappelons brièvement sa construction. Notons  $\sigma_1, \dots, \sigma_{2n}$  les  $2n$   $\mathbb{Q}$ -plongements de  $\mathbb{Q}(\alpha)$  dans une clôture séparable, avec  $\sigma_1 = \text{Id}$ . Posons  $v_j^{(i)} =$

$\sigma_i(v_j)$  et soit  $M = (v_j^{(i)})$ . Dans toute la suite, on notera  $\mu_{ij}$  le mineur associé à  $v_j^{(i)}$  et  $\text{com}(M)$  désignera la matrice des cofacteurs. Alors soit

$$v'_i = \frac{(-1)^{i+1}\mu_{i1}}{\det(M)}. \text{ On peut montrer que c'est un élément de } \mathbb{Z}[\alpha]. \text{ Le}$$

vecteur défini par ces  $2n$  éléments possède alors les propriétés voulues (cela provient la formule de développement par rapport à une ligne, et de la relation  $\det(M)I_{2n} = (\text{com}(M))^t M$ ).

La relation  $D^{-1}A_{2n}D = A_{2n}^t$  entraîne que  $D^{-1}\mathbf{v}_\alpha$  est un vecteur propre de  $A_{2n}^t$ , Puisque  $\chi_{A_{2n}^t} = \chi_{A_{2n}}$  est irréductible sur  $\mathbb{Q}$ , il est séparable, et donc les sous-espaces propres associés à  $A_{2n}^t$  sont de dimension 1. et donc il existe  $\lambda \in \mathbb{Q}(\alpha)$  tel que  $\lambda D^{-1}\mathbf{v}_\alpha = \mathbf{v}'_\alpha$ .

- Rappelons que la  $j$ -ième composante de  $\mathbf{v}_\alpha$  est

$$v_j = (-1)^{j+1} \delta_{1j}(A_{2n} - \alpha I_{2n})$$

où  $\delta_{1j}(A_{2n} - \alpha I_{2n})$  est le déterminant obtenu en ôtant la première ligne et la  $j$ -ième colonne de  $A_{2n} - \alpha I_{2n}$  (cf [3, preuve du Th. 1]). On va montrer que  $v_{2j-1}$  est un polynôme impair en  $\alpha$  et que  $v_{2j}$  est pair en  $\alpha$ , pour  $1 \leq j \leq n$ . C'est vrai pour  $n = 1$  et  $n = 2$ . Supposons maintenant  $n \geq 3$ . On voit facilement que

$$A_{2n} = a_{2n} \begin{pmatrix} 0 & s_{2n} t_{2n} & 0 & 0 & \cdots & 0 \\ s_{2n-1} t_{2n} & 0 & s_{2n-1} & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & s_{2n-2} & & & & \\ 0 & 0 & & & a_{2n-2}^{-1} A_{2n-2} & \\ \vdots & \vdots & & & & \\ 0 & 0 & & & & \end{pmatrix}.$$

On peut supposer sans perte de généralité que  $a_{2m} = 1$  pour tout  $m \geq 2$ . Un simple calcul de déterminants nous donne alors

$$\delta_{11}(A_{2n} - \alpha I_{2n}) = -\alpha \det(A_{2n-2} - \alpha I_{2n-2}) - s_{2n-1} s_{2n-2} \delta_{11}(A_{2n-2} - \alpha I_{2n-2}).$$

Mais  $\det(A_{2n-2} - \alpha I_{2n-2}) = \chi_{A_{2n-2}}(\alpha)$  est pair en  $\alpha$ . Par hypothèse de récurrence,  $\delta_{11}(A_{2n-2} - \alpha I_{2n-2})$  est impair en  $\alpha$ . Le résultat est donc montré si  $j = 1$ .

Si  $j = 2$ , on a  $\delta_{12}(A_{2n} - \alpha I_{2n}) = s_{2n-1} t_{2n} \det(A_{2n-2} - \alpha I_{2n-2})$ , et si  $j > 2$ ,  $\delta_{1j}(A_{2n} - \alpha I_{2n}) = s_{2n-1} t_{2n} \delta_{1(j-2)}(A_{2n-2} - \alpha I_{2n-2})$ , et en utilisant l'hypothèse de récurrence, on a le résultat.

- On montre maintenant que  $\lambda \in \mathbb{Q}(\alpha^2)$ . On a  $\mathbf{v}_\alpha = \begin{pmatrix} I_1(\alpha) \\ E_1(\alpha) \\ \vdots \\ I_n(\alpha) \\ E_n(\alpha) \end{pmatrix}$ , où les

$E_i$  et les  $I_i$  sont des polynômes à coefficients entiers respectivement pairs et impairs. Comme  $\text{Irr}(\alpha, \mathbb{Q}) = \chi_{A_{2n}}$  est pair, les conjugués de  $\alpha$  s'écrivent  $\pm\alpha, \pm\alpha_2, \dots, \pm\alpha_n$ .

Soient  $\sigma_1 : \alpha \mapsto \alpha, \sigma_2 : \alpha \mapsto -\alpha, \dots, \sigma_{2n-1} : \alpha \mapsto \alpha_n, \sigma_{2n} : \alpha \mapsto -\alpha_n$  les  $2n$   $\mathbb{Q}$ -plongements de  $\mathbb{Q}(\alpha)$ . Comme précédemment, notons  $M$  la matrice dont le coefficient à l'intersection de la ligne  $i$  et de la colonne  $j$  est le  $i$ -ème conjugué de  $v_j$ . Autrement dit,  $M = (\sigma_i(v_j))$ . On rappelle alors que  $v'_i = (-1)^{i+1} \frac{\mu_{i1}}{\det M}$  (cf. [4, première preuve du Th. 1]). On va montrer que  $\alpha v'_1 \in \mathbb{Q}(\alpha^2)$ . Pour cela, on montre que cette quantité est invariante par les éléments du groupe de Galois de la clôture galoisienne de  $\mathbb{Q}(\alpha)$  qui

fixent  $\mathbb{Q}(\alpha^2)$ . Ces automorphismes  $\tau$  envoient  $\alpha$  sur  $\pm\alpha$  et induisent une permutation  $s_\tau$  de l'ensemble  $\{\pm\alpha_2, \dots, \pm\alpha_n\}$ . On a

$$\det M = \begin{vmatrix} I_1(\alpha) & E_1(\alpha) & I_2(\alpha) & E_2(\alpha) & \cdots & I_n(\alpha) & E_n(\alpha) \\ -I_1(\alpha) & E_1(\alpha) & -I_2(\alpha) & E_2(\alpha) & \cdots & -I_n(\alpha) & E_n(\alpha) \\ \vdots & & & & & & \vdots \\ \vdots & & & & & & \vdots \\ I_1(\alpha_n) & E_1(\alpha_n) & I_2(\alpha_n) & E_2(\alpha_n) & \cdots & I_n(\alpha_n) & E_n(\alpha_n) \\ -I_1(\alpha_n) & E_1(\alpha_n) & -I_2(\alpha_n) & E_2(\alpha_n) & \cdots & -I_n(\alpha_n) & E_n(\alpha_n) \end{vmatrix}$$

Notons  $\varepsilon(s_\tau)$  la signature de la permutation  $s_\tau$ . Par échange des lignes deux à deux, on voit que  $\tau(\det M) = \begin{cases} \varepsilon(s_\tau) \det M & \text{si } \tau(\alpha) = \alpha \\ -\varepsilon(s_\tau) \det M & \text{si } \tau(\alpha) = -\alpha \end{cases}$ , d'où  $\tau(\alpha^{-1} \det M) = \varepsilon(s_\tau) \alpha^{-1} \det M$ , pour tout  $\tau$ . On veut montrer que la valeur de  $\mu_{11}$  ne change pas lorsque l'on remplace  $\alpha$  par  $-\alpha$ . Or on a

$$\mu_{11}(-\alpha) = \begin{vmatrix} E_1(\alpha) & I_2(\alpha) & E_2(\alpha) & \cdots & I_n(\alpha) & E_n(\alpha) \\ E_1(\alpha_2) & I_2(\alpha_2) & E_2(\alpha_2) & \cdots & I_n(\alpha_2) & E_n(\alpha_2) \\ E_1(\alpha_2) & -I_2(\alpha_2) & E_2(\alpha_2) & \cdots & I_n(\alpha_2) & E_n(\alpha_2) \\ \vdots & & & & & \vdots \\ \vdots & & & & & \vdots \\ E_1(\alpha_n) & I_2(\alpha_n) & E_2(\alpha_n) & \cdots & I_n(\alpha_n) & E_n(\alpha_n) \\ E_1(\alpha_n) & -I_2(\alpha_n) & E_2(\alpha_n) & \cdots & -I_n(\alpha_n) & E_n(\alpha_n) \end{vmatrix}$$

$$= (-1)^{n-1} \begin{vmatrix} E_1(\alpha) & -I_2(\alpha) & E_2(\alpha) & \cdots & -I_n(\alpha) & E_n(\alpha) \\ E_1(\alpha_2) & -I_2(\alpha_2) & E_2(\alpha_2) & \cdots & -I_n(\alpha_n) & E_n(\alpha_n) \\ E_1(\alpha_2) & I_2(\alpha_2) & E_2(\alpha_2) & \cdots & I_n(\alpha_2) & E_n(\alpha_n) \\ \vdots & & & & & \vdots \\ \vdots & & & & & \vdots \\ E_1(\alpha_n) & -I_2(\alpha_n) & E_2(\alpha_n) & \cdots & -I_n(\alpha_n) & E_n(\alpha_n) \\ E_1(\alpha_n) & I_2(\alpha_n) & E_2(\alpha_n) & \cdots & I_n(\alpha_n) & E_n(\alpha_n) \end{vmatrix}$$

En procédant à l'échange des lignes deux à deux, on en déduit que ce déterminant est égal à  $\mu_{11}$ , ce qu'on voulait montrer. On obtient donc  $\tau(\mu_{11}) = \varepsilon(s_\tau) \mu_{11}$  pour tout  $\tau$ . Finalement,  $\tau(\alpha \frac{\mu_{11}}{\det M}) = \alpha \frac{\mu_{11}}{\det M}$ , donc

$$\alpha v'_1 \in \mathbb{Q}(\alpha^2) \text{ et } \lambda = s_{2n} \frac{v'_1}{I_1(\alpha)} = s_{2n} \frac{\alpha v'_1}{\alpha I_1(\alpha)} \in \mathbb{Q}(\alpha^2).$$

Puisqu'on a  $\lambda D^{-1} \mathbf{v}_\alpha = \mathbf{v}'_\alpha$ , on a  $\lambda \mathbf{v}_\alpha = D \mathbf{v}'_\alpha$ , soit  $\lambda v_j = s_{2n+1-j} v'_j$  et donc  $\text{Tr}_{\mathbb{Q}(\alpha)/\mathbb{Q}}(\lambda v_i v_j) = s_{2n+1-j} \delta_{ij}$ . On en déduit que  $D = (\text{Tr}_{\mathbb{Q}(\alpha)/\mathbb{Q}}(\lambda v_i v_j))$ .



• On montre enfin que l'on peut choisir  $\alpha$  tel que  $\alpha^2 \not\equiv -1 \pmod{\mathbb{Q}(\alpha^2)^*}$ . Puisque  $\Delta_{2m}$  est pair, on peut écrire

$$\Delta_{2m}(T_4, \dots, T_{2m}, X) = U_{2m}(T_4, \dots, T_{2m}, X^2).$$

On peut aisément montrer (comme pour  $\Delta_{2m}$ ) que le polynôme

$$F_{2m}(T_4, \dots, T_{2m}, X) = U_{2m}(T_4, \dots, T_{2m}, -X^2)$$

est irréductible pour tout  $m$ . D'après le critère d'irréductibilité de Hilbert, on peut trouver une spécialisation des  $T_i$  telle que les polynômes spécialisés  $\Delta_{2n}$  et  $F_{2n}$  sont irréductibles.

Soit  $\alpha \in \mathbb{C}$  une racine de  $\Delta_{2n}$ . Par définition,  $F_{2n}(\sqrt{-\alpha^2}) = \Delta_{2n}(\alpha) = 0$ . Puisque  $(-1)^n \det DF_{2n}$  est irréductible et unitaire, on a  $\text{Irr}(\sqrt{-\alpha^2}, \mathbb{Q}) = (-1)^n \det DF_{2n}$ . Ainsi  $[\mathbb{Q}(\sqrt{-\alpha^2}) : \mathbb{Q}] = 2n$  et  $[\mathbb{Q}(\sqrt{-\alpha^2}) : \mathbb{Q}(\alpha^2)] = 2$ , ce qui signifie que  $-\alpha^2$  n'est pas un carré dans  $\mathbb{Q}(\alpha^2)$ . Ceci achève la preuve de la proposition.

### Fin de la preuve du théorème 2.

• Soit  $S \in M_{2n}(\mathbb{Z})$ , telle que  $\det S \neq 0$ . Si  $n = 1$ , on suppose de plus que  $\det S \not\equiv \pm 1 \pmod{\mathbb{Q}^{*2}}$ . On a  $S = U^t D U$ , où  $U \in GL_{2n}(\mathbb{Q})$  et  $D$  vérifie les hypothèses de la proposition. On peut supposer  $U$  à coefficients dans  $\mathbb{Z}$ , sinon il existe  $a \in \mathbb{Z} - \{0\}$  tel que  $aU$  est à coefficients entiers, et  $S = (aU)^t \frac{1}{a^2} D (aU)$ .

On considère alors les éléments  $A_{2n}, \mathbf{v}_\alpha, \mathbf{v}'_\alpha$  et  $\lambda$  associés à  $D$  grâce à la proposition précédente. On a  $D = (U^t)^{-1} S U^{-1}$ , et donc  $D^{-1} = U S^{-1} U^t$ . Alors  $\lambda U S^{-1} U^t \mathbf{v}_\alpha = \mathbf{v}'_\alpha$ , c'est-à-dire  $\lambda S^{-1} U^t \mathbf{v}_\alpha = U^{-1} \mathbf{v}'_\alpha$ .

Posons  $C = m U^t A_{2n} (U^t)^{-1}$ , avec  $m \in \mathbb{Z} - \{0\}$  tel que  $C$  est à coefficients

entiers,  $\mathbf{w}_\alpha = m^{2n-1} U^t \mathbf{v}_\alpha = \begin{pmatrix} w_1 \\ \vdots \\ w_{2n} \end{pmatrix}$ ,  $\mathbf{w}'_\alpha = \frac{1}{m^{2n-1}} U^{-1} \mathbf{v}'_\alpha = \begin{pmatrix} w'_1 \\ \vdots \\ w'_{2n} \end{pmatrix}$ .

On a alors  $m^{-4n+2} \lambda S^{-1} \mathbf{w}_\alpha = \mathbf{w}'_\alpha$ . On va montrer que  $\mathfrak{A} = \mathbb{Z} w_1 \oplus \dots \oplus \mathbb{Z} w_{2n}$  est un idéal de  $\mathbb{Z}[m\alpha]$ . On voit facilement que  $w_i \in \mathbb{Z}[m\alpha]$  pour tout  $i$ . On a d'autre part  $m\alpha \mathbf{w}_\alpha = C \mathbf{w}_\alpha$ . Comme  $C$  est à coefficients entiers, cela suffit à montrer que  $\mathbb{Z} w_1 \oplus \dots \oplus \mathbb{Z} w_{2n}$  est un idéal.

De plus, on a  $m^{-4n+2} \lambda \mathbf{w}_\alpha = S \mathbf{w}'_\alpha = \left( \sum_{j=1}^{2n} s_{ij} w'_j \right)_{1 \leq i \leq 2n}$ , d'où  $m^{-4n+2} \lambda w_i w_k =$

$$\sum_{j=1}^{2n} s_{ij} w_k w'_j.$$

Notons  $U = (u_{ij})$  et  $U^{-1} = (u'_{ij})$ . Alors  $w_i = m^{2n-1} \sum_{j=1}^{2n} u_{ji} v_j$  et  $w'_i = \frac{1}{m^{2n-1}} \sum_{j=1}^{2n} u'_{ij} v'_j$ . Donc  $w_k w'_j = \sum_{i,l} u_{ik} u'_{jl} v_i v'_l$ . On a alors

$$\mathrm{Tr}_{\mathbb{Q}(m\alpha)/\mathbb{Q}}(w_k w'_j) = \sum_{i,l} u_{ik} u'_{jl} \delta_{il} = \sum_{i=1}^{2n} u_{ik} u'_{ji} = \delta_{kj}.$$

D'où  $s_{ik} = \mathrm{Tr}_{\mathbb{Q}(m\alpha)/\mathbb{Q}}(m^{-4n+2} \lambda w_i w_k)$ . De plus,  $m^{-4n+2} \lambda \in \mathbb{Q}(\alpha^2) = \mathbb{Q}((m\alpha)^2)$ .

On vient donc de montrer que  $S = (\mathrm{Tr}_{\mathbb{Q}(m\alpha)/\mathbb{Q}}(m^{-4n+2} \lambda w_i w_j))$ , où  $\alpha$  est un entier algébrique  $\alpha$  tel que  $\alpha^2 \not\equiv -1 \pmod{\mathbb{Q}(\alpha^2)}$ ,  $\lambda \in \mathbb{Q}((m\alpha)^2)$ ,  $m$  est un entier, égal à 1 si  $S$  est diagonale, et  $\mathbb{Z}w_1 \oplus \cdots \oplus \mathbb{Z}w_{2n}$  est un idéal de  $\mathbb{Z}[m\alpha]$ .

• Par construction de  $\alpha$ ,  $[\mathbb{Q}(\alpha) : \mathbb{Q}(\alpha^2)] = 2$ , et  $w_i$  s'écrit alors de manière unique sous la forme  $w_i = x_i + m\alpha y_i$ , où  $x_i, y_i \in \mathbb{Z}[(m\alpha)^2]$ .

Posons  $z_i = x_i + m y_i \beta$ , avec  $\beta = \sqrt{-\alpha^2}$ , et notons  $\mathbf{z}_\beta$  le vecteur de composantes  $z_i$ .

Soit enfin  $\sigma$  l'involution  $\mathbb{Q}$ -linéaire de  $\mathbb{Q}(m\beta)$  définie par  $\beta \mapsto -\beta$ ,  $\sigma|_{\mathbb{Q}(\alpha^2)} = \mathrm{Id}$ . On vérifie que

$$\begin{aligned} & \mathrm{Tr}_{\mathbb{Q}(m\alpha)/\mathbb{Q}}(m^{-4n+2} \lambda w_i w_j) \\ &= \mathrm{Tr}_{\mathbb{Q}(\alpha^2)/\mathbb{Q}}(2\lambda(x_i x_j + m^2 \alpha^2 y_i y_j)) = \mathrm{Tr}_{\mathbb{Q}(m\beta)/\mathbb{Q}}(m^{-4n+2} \lambda z_i z_j^\sigma). \end{aligned}$$

Il reste à montrer que  $\mathcal{J} = \mathbb{Z}z_1 \oplus \cdots \oplus \mathbb{Z}z_{2n}$  est un idéal de  $\mathbb{Z}[m\beta]$ . Rappelons tout d'abord que la  $i$ -ème composante de  $\mathbf{v}_\alpha$  est un polynôme en  $\alpha$  de la parité de  $i$ . On peut donc poser  $v_{2i} = x'_{2i}$  et  $v_{2i-1} = \alpha y'_{2i-1}$ , où  $x'_{2i}, y'_{2i-1} \in \mathbb{Z}[\alpha^2]$ , pour  $i = 1, \dots, n$ . Soit  $\mathbf{t}_\beta$  le vecteur défini par  $t_{2i} = x'_{2i}$ , et  $t_{2i-1} = \beta y'_{2i-1}$  pour  $i = 1, \dots, n$ . On va montrer l'existence d'une matrice à coefficients entiers, qui admet  $\mathbf{t}_\beta$  comme vecteur propre associé à la valeur propre  $\beta$ . Par définition,  $\mathbf{v}_\alpha$  est un vecteur propre de  $A_{2n}$ . Par construction même de  $A_{2n} = (a_{ij})$ , on a  $a_{2i-1, 2j-1} = a_{2i, 2j} = 0$  pour  $1 \leq i, j \leq n$ .

On a  $\alpha v_{2i-1} = \sum_{j=1}^n a_{2i-1, 2j} v_{2j}$ , et  $\alpha v_{2i} = \sum_{j=1}^n a_{2i, 2j-1} v_{2j-1}$ . On en déduit

$\alpha^2 y'_{2i-1} = \sum_{j=1}^n a_{2i-1, 2j} x'_{2j}$  et  $x'_{2i} = \sum_{j=1}^n a_{2i, 2j-1} y'_{2j-1}$ . On a alors

$$\beta t_{2i-1} = \beta^2 y'_{2i-1} = -\alpha^2 y'_{2i-1} = -\sum_{j=1}^n a_{2i-1, 2j} x'_{2j} = -\sum_{j=1}^n a_{2i-1, 2j} t_{2j}.$$

On a aussi

$$\begin{aligned} \beta^2 t_{2i} &= \beta^2 x'_{2i} = \beta^2 \sum_{j=1}^n a_{2i,2j-1} y_{2j-1}' = \sum_{j=1}^n a_{2i,2j-1} \beta^2 y'_{2j-1} \\ &= \sum_{j=1}^n a_{2i,2j-1} \beta t_{2j-1}. \end{aligned}$$

D'où  $\beta t_{2i} = \sum_{j=1}^n a_{2i,2j-1} t_{2j-1}$ . Les relations précédentes nous assurent l'existence d'une matrice  $B \in M_{2n}(\mathbb{Z})$  telle que  $Bt_\beta = \beta t_\beta$ . Il est clair que  $z_\beta = m^{2n-1} U^t B t_\beta$ , car  $t_\beta$  a été défini à partir de  $v_\alpha$  de la même manière que  $z_\beta$  a été défini à partir de  $w_\alpha$ , c'est-à-dire en laissant fixe les polynômes en  $\alpha^2$ , et en remplaçant  $\alpha$  par  $\beta$  (on peut également faire un calcul pour s'en convaincre). Par construction de  $B = (b_{ij})$ , on a  $b_{ij} = \pm a_{ij}$ , ce qui entraîne facilement que  $m^{2n-1} U^t B$  est à coefficients entiers. Comme précédemment, cela suffit pour conclure. Remarquons que  $m^{-4n+2} \lambda \in (\mathcal{J}\mathcal{J}^\sigma)^\sharp$ , puisque la matrice de la forme trace hermitienne amplifiée dans la base  $(z_1, \dots, z_{2n})$  est par construction la matrice  $S$ , qui est à coefficients entiers. Enfin, il est bien clair que  $\beta$  est un entier algébrique. On a finalement montré que  $S$  est la matrice de  $(\mathcal{J}, \sigma, \text{Tr}_{m^{-4n+2}\lambda})$ .

On remarque que le théorème et sa démonstration restent valables si on remplace  $\mathbb{Q}$  et  $\mathbb{Z}$  par un corps de nombres et son anneau des entiers, puisque tout corps de nombres est hilbertien.

### Remarques sur l'effectivité de la méthode et calcul pratique.

La méthode décrite dans la preuve permet de trouver explicitement les éléments définissant la forme trace hermitienne amplifiée. En effet, on diagonalise  $S$  en s'arrangeant pour avoir une matrice de changement de base à coefficients entiers. Ensuite, on calcule  $A_{2n}$ . Il n'y a aucune difficulté à trouver une matrice de polynôme caractéristique irréductible, car en choisissant  $t_2, \dots, t_{2n}$  au hasard, on trouve presque sûrement une matrice qui convient. On calcule ensuite les  $v_i$ . Ce sont des polynômes en  $\alpha$  de degrés inférieurs ou égaux à  $2n - 1$ .

Il n'est donc pas nécessaire d'utiliser la relation  $\chi_{A_{2n}}(\alpha) = 0$  pour calculer l'expression finale, et donc cela ne dépend pas de la nature de  $\alpha$ . Autrement dit,  $\alpha$  peut être considéré dans ce calcul comme une indéterminée, et donc un logiciel de calcul formel effectuera ceci sans aucun problème. La difficulté réside a priori dans la détermination des  $v_i'$  (indispensable pour calculer  $\lambda$ ), car l'expression donnée dans la preuve dépend des conjugués de  $\alpha$ , et une fois le calcul des déterminants effectués, il faut manipuler l'expression obtenue de manière à obtenir un résultat ne dépendant que de

$\alpha$ , ce qui est loin d'être aisé, et ne se fait pas de manière algorithmique. Ce qui suit donne une méthode qui permet de calculer  $v'_i$  de manière systématique. On sait que  $(v_1, \dots, v_{2n})$  et  $(v'_1, \dots, v'_{2n})$  forment deux bases de

$\mathbb{Q}(\alpha)$ . On montre facilement que  $v_i = \sum_{j=1}^{2n} \text{Tr}_{\mathbb{Q}(\alpha)/\mathbb{Q}}(v_i v_j) v'_j$ .

Soit  $G = (\text{Tr}_{\mathbb{Q}(\alpha)/\mathbb{Q}}(\alpha^{i-1} \alpha^{j-1}))_{1 \leq i, j \leq 2n}$ . Grâce aux relations de Newton, on s'aperçoit que le calcul des coefficients de cette matrice revient à l'inversion d'une matrice triangulaire, ce qui est simple. Soit  $V$  la matrice des coordonnées de  $(v_1, \dots, v_{2n})$  dans la base  $(1, \alpha, \dots, \alpha^{2n-1})$ . La relation précédente nous montre alors que les coordonnées des  $v'_i$  dans la base  $(1, \alpha, \dots, \alpha^{2n-1})$  sont données par les vecteurs colonnes de  $G^{-1}V^t = (m_{ij})_{1 \leq i, j \leq 2n}$ . Autrement dit,  $v'_j = \sum_{i=1}^{2n} m_{ij} \alpha^{i-1}$ . On achève ensuite le calcul en trouvant  $m$  et en explicitant les  $w_i$ , puis les  $z_i$ .

**Exemple.** On conserve dans la suite les notations précédentes. On va appliquer la méthode précédente pour réaliser le réseau  $A_4$ .

La forme bilinéaire associée à ce réseau a pour matrice  $S = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 2 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 2 \end{pmatrix}$ . On trouve alors par réduction de Gauss

$$D = \begin{pmatrix} 1/72 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1/96 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1/108 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 5/576 \end{pmatrix} \quad \text{et} \quad U = \begin{pmatrix} 12 & 6 & 6 & 6 \\ 0 & 12 & 4 & 4 \\ 0 & 0 & 12 & 3 \\ 0 & 0 & 0 & 12 \end{pmatrix}$$

(On s'est arrangé pour avoir  $U$  à coefficients entiers).

En prenant  $t_4 = 1$  dans  $B_4$  et en multipliant par un entier convenable pour avoir des coefficients entiers, on trouve  $A_4 = \begin{pmatrix} 0 & 24 & 0 & 0 \\ 18 & 0 & 18 & 0 \\ 0 & 16 & 0 & 16 \\ 0 & 0 & 15 & 0 \end{pmatrix}$ . On a

$\chi_{A_4}(X) = X^4 - 960X^2 + 103680$ , qui est irréductible sur  $\mathbb{Q}$  car c'est un polynôme d'Eisenstein pour  $p = 5$ . Soit  $\alpha \in \mathbb{C}$  une racine de ce polynôme.

On obtient alors  $\mathbf{v}_\alpha = \begin{pmatrix} 528\alpha - \alpha^3 \\ 4320 - 18\alpha^2 \\ -288\alpha \\ -4320 \end{pmatrix}$ , c'est-à-dire  $V = \begin{pmatrix} 0 & 4320 & 0 & -4320 \\ 528 & 0 & -288 & 0 \\ 0 & -18 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$ .

Posons  $\sigma_i = \text{Tr}_{\mathbb{Q}(\alpha)/\mathbb{Q}}(\alpha^i)$ . Les relations de Newton donnent alors immédiatement  $\sigma_0 = 4$ ,  $\sigma_2 = 1920$ ,  $\sigma_4 = 1428480$ ,  $\sigma_6 = 1172275200$  et  $\sigma_1 = \sigma_3 = \sigma_5 = 0$ .

On a donc  $G = \begin{pmatrix} 4 & 0 & 1920 & 0 \\ 0 & 1920 & 0 & 1428480 \\ 1920 & 0 & 1428480 & 0 \\ 0 & 1428480 & 0 & 1172275200 \end{pmatrix}$ .

La dernière colonne de  $G^{-1}V^t$  nous donne  $v'_4 = -\frac{7}{63360} + \frac{\alpha^2}{9123840}$ .

La relation  $\lambda \mathbf{v}_\alpha = D \mathbf{v}'_\alpha$  appliquée à la dernière coordonnée nous donne

alors  $\lambda = \frac{7}{31531991040} - \frac{\alpha^2}{4540606709760}$ . On vérifie par simple calcul que  $m = 1$ .

On a alors

$$\mathbf{w}_\alpha = \begin{pmatrix} (6336 - 12\alpha^2)\alpha \\ (51840 - 216\alpha^2) + (3168 - 6\alpha^2)\alpha \\ (17280 - 72\alpha^2) - (288 + 6\alpha^2)\alpha \\ -(34560 + 72\alpha^2) + (2304 - 6\alpha^2)\alpha \end{pmatrix}.$$

Posons  $\beta = \sqrt{-\alpha^2}$ . Alors

$$\begin{pmatrix} z_1 \\ z_2 \\ z_3 \\ z_4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} (6336 + 12\beta^2)\beta \\ (51840 + 216\beta^2) + (3168 + 6\beta^2)\beta \\ (17280 + 72\beta^2) + (6\beta^2 - 288)\beta \\ (72\beta^2 - 34560) + (2304 + 6\beta^2)\beta \end{pmatrix}.$$

$S$  se réalise donc comme la forme trace hermitienne amplifiée de l'algèbre  $\mathbb{Z}[\beta]$  ( $\mathcal{J}, \sigma, \text{Tr}_\lambda$ ) avec  $\text{Irr}(\beta, \mathbb{Q}) = X^4 + 960X^2 + 103680$ ,  $\mathcal{J} = \mathbb{Z}z_1 \oplus \mathbb{Z}z_2 \oplus \mathbb{Z}z_3 \oplus \mathbb{Z}z_4$ ,  $\lambda = \frac{7}{31531991040} + \frac{\beta^2}{4540606709760}$  et  $\sigma : \mathbb{Q}(\beta) \rightarrow \mathbb{Q}(\beta), \beta \mapsto -\beta$ .

Remarquons que ce n'est pas la construction la plus simple de  $\mathbb{A}_4$  en tant que forme trace hermitienne amplifiée. En effet on peut obtenir  $\mathbb{A}_4$  à partir des racines 5-ièmes de l'unité (cf. par exemple [1, §4]).

#### BIBLIOGRAPHIE

- [1] E. Bayer-Fluckiger, Jacques Martinet, *Formes quadratiques liées aux algèbres semi-simples*. J. reine angew. Math. **451** (1994), 51–69.
- [2] M. Kruskemper, *Algebraic construction of bilinear forms over  $\mathbb{Z}$* . Pub. Math. de Besançon, Théorie des nombres (96/97–97/98).
- [3] O. Taussky, *On a theorem of Latimer and MacDuffee*. Canad. J. Math. **1** (1949), 300–302.
- [4] O. Taussky, *On matrix classes corresponding to an ideal and its inverse*. Illinois Math. J. **1** (1957), 108–113.

Grégory BERHUY  
 Equipe de Mathématiques de Besançon  
 UMR 6623 du C.N.R.S.  
 16, route de Gray  
 F-25030 Besançon Cedex FRANCE  
 E-mail : [berhuy@math.univ-fcomte.fr](mailto:berhuy@math.univ-fcomte.fr)