JOURNAL DE THÉORIE DES NOMBRES DE BORDEAUX

FLORENCE SORIANO

Erratum à l'article « Extensions cycliques de degré ℓ de corps de nombres ℓ-réguliers »

Journal de Théorie des Nombres de Bordeaux, tome 8, nº 2 (1996), p. 485-487

<http://www.numdam.org/item?id=JTNB_1996__8_2_485_0>

Journal de Théorie des Nombres
de Bordeaux **8** *(1996), 485–487*

ERRATUM A L'ARTICLE

EXTENSIONS CYCLIQUES DE DEGRÉ ℓ DE CORPS DE NOMBRES ℓ-RÉGULIERS

par FLORENCE SORIANO

Dans $[So]$, on suppose que l'extension L/K est une extension cyclique de degré ℓ de corps de nombres ℓ-réguliers (i.e. contenant une racine primitive $\ell^{ième}$ de l'unité et dont le ℓ-groupe des ℓ-classes est trivial). La correction du lemme 4.1 dans $[So]$ donne :

E.1 LEMME. *L'indice normique* $(E_K : E_K \cap N_{L/K})$ *est égal à* ℓ^{t-q}, *où* q *est la dimension sur* $\mathbb{F}_\ell$ *du quotient du groupe des* ℓ*-unités* E'_K *par le sous-groupe* $E_K(E'_K \cap N_{L/K})$ *des* ℓ*-unités qui sont normes à une unité près et* t *le nombre de places modérées ramifiées dans l'extension* L/K.

La formule des classes ambiges devenue $h_L = h_K \times \ell^{q-1} \times e_{\mathfrak{l}}(L/K$, le théorème 6.2 dans $[So]$ s'écrit alors :

E.2 THÉORÈME. *Soit* K *un corps de nombres* ℓ*-régulier contenant une racine primitive* $\ell^{ième}$ *de l'unité.*
La liste complète des extensions L *cycliques* ℓ*-régulières et de degré* ℓ *sur* K *comprend :*

• *d'une part les* $\frac{\ell^{c+1}-1}{\ell-1}$ *extensions* $L = K(\sqrt[\ell]{\tau})$ *où* τ *est un représentant d'une classe du groupe* $E'_K/{E'_K}^{\ell}$, *dans lesquelles aucun premier modéré de* K *se ramifie.*

• *d'autre part* $\frac{\ell^{2c+2}-\ell^{c+1}}{\ell-1}$ *familles infinies d'extensions, dont les membres* L *se ramifient en au moins un premier modéré de* K.

• *Pour* $(\ell \nmid h_K)$, *les extensions* $L = K(\sqrt[\ell]{\tau})$ *où* τ *est un représentant d'une classe du groupe* $E'_K/{E'_K}^{\ell}$ *sont telles que la place sauvage* $\mathfrak{l}$ *est ramifiée et que l'ordre* h_L *du groupe des classes de* L *n'est pas divisible par* ℓ. *De plus, il n'existe qu'une seule famille d'extensions dont les membres* L *sont inertes en* $\mathfrak{l}$ *et de groupe de classes d'ordre* h_L *non divisible par* ℓ. *Pour toutes les autres familles, la place sauvage est ramifiée et l'ordre* h_L *associé aux membres est un multiple de* ℓ *si et seulement si on a* $(q = 1)$.

• *Pour* $(\ell | h_K)$, *il existe une unique extension non triviale et non ramifiée* $L = K(\sqrt[\ell]{\tau})$ *où nécessairement* τ *est un représentant d'une classe* *du groupe E'_K/E'^{ℓ}_K. l'ordre h_L de son groupe des classes est divisible par ℓ si et seulement si l'ordre h_K l'est par ℓ^2. Les autres extensions cycliques ℓ-ramifiées de degré ℓ sont ramifiées en la place sauvage $\mathfrak{l}$ et ont pour ordre h_L un multiple de ℓ. Enfin, les membres de toutes les familles se ramifient en la place sauvage $\mathfrak{l}$ et eux aussi ont pour ordre un multiple h_L de ℓ.*

REMARQUE : comme dans le cas $\mathfrak{l}$-régulier, l'entier q ne dépend que de l'image de σ dans $K_{\mathfrak{l}}^{\times}/K_{\mathfrak{l}}^{\times \ell}$.

Le théorème 6.2 ainsi modifié, reprenons l'exemple numérique $K = \mathbb{Q}(\sqrt{-3})$ pour lequel le nombre premier considéré est $\ell = 3$. Nous savons par [*So*] qu'un système de représentants des extensions 3-régulières cycliques de degré 3 du corps de nombres K est :

$$L = K\left(\sqrt[3]{j^i \times 3^k \times (1+2\sqrt{-3})^l \times (2+\sqrt{-3})^m} \right)$$

où les entiers i, k, l, m sont non tous nuls dans $\{0, 2, 3\}$ (cf. [*So*], p. 418, th. 7.1). Le système PARI nous donne alors le rśultat suivant :

E.3 THÉORÈME. *Les quatre extensions L non modérément ramifiées sont les extensions $L = K\left(\sqrt[3]{j^i\, 3^k} \right)$. Elles sont ramifiées en la place sauvage et l'ordre de leur groupe des classes n'est pas divisible par 3.*

Parmi les trente six autres extensions ramifiées en au moins une place modérée, seule l'extension $L = K\left(\sqrt[3]{j \times (1+2\sqrt{-3}) \times (2+\sqrt{-3})} \right)$ est inerte en $\mathfrak{l}$; de plus, l'ordre h_L de son groupe des classes n'est pas divisible par 3. Les trente cinq extensions restantes sont ramifiées en la place sauvage et les seize d'entre elles qui ont un nombre de classes divisible par 3 constituent la liste suivante :

$$K\left(\sqrt[3]{(1+2\sqrt{-3}) \times (2+\sqrt{-3})} \right),\quad K\left(\sqrt[3]{(1+2\sqrt{-3}) \times (2+\sqrt{-3})^2} \right),$$
$$K\left(\sqrt[3]{3 \times (1+2\sqrt{-3}) \times (2+\sqrt{-3})^2} \right),\quad K\left(\sqrt[3]{3 \times (1+2\sqrt{-3})^2 \times (2+\sqrt{-3})^2} \right),$$
$$K\left(\sqrt[3]{3 \times (1+2\sqrt{-3})^2 \times (2+\sqrt{-3})} \right),\quad K\left(\sqrt[3]{j \times (1+2\sqrt{-3}) \times (2+\sqrt{-3})^2} \right),$$
$$K\left(\sqrt[3]{j \times (1+2\sqrt{-3})^2 \times (2+\sqrt{-3})} \right),\quad K\left(\sqrt[3]{j \times (1+2\sqrt{-3})^2 \times (2+\sqrt{-3})^2} \right),$$
$$K\left(\sqrt[3]{3j \times (1+2\sqrt{-3}) \times (2+\sqrt{-3})} \right),\quad K\left(\sqrt[3]{3j \times (1+2\sqrt{-3}) \times (2+\sqrt{-3})^2} \right),$$
$$K\left(\sqrt[3]{3j \times (1+2\sqrt{-3})^2 \times (2+\sqrt{-3})} \right),\quad K\left(\sqrt[3]{3j \times (1+2\sqrt{-3})^2 \times (2+\sqrt{-3})^2} \right),$$
$$K\left(\sqrt[3]{3j \times (1+2\sqrt{-3})^2 \times (2+\sqrt{-3})} \right),\quad K\left(\sqrt[3]{9j \times (1+2\sqrt{-3}) \times (2+\sqrt{-3})} \right),$$
$$K\left(\sqrt[3]{9j \times (1+2\sqrt{-3})^2 \times (2+\sqrt{-3})} \right),\quad K\left(\sqrt[3]{9j \times (1+2\sqrt{-3})^2 \times (2+\sqrt{-3})^2} \right).$$

BIBLIOGRAPHIE

[*So*] F. SORIANO, *Extensions cycliques de degré ℓ de corps de nombres ℓ-réguliers*, J. Théor. Nombres Bordeaux 4 (1994), 407-420.

Florence SORIANO
Laboratoire de Mathématiques
U.F.R. / S.F.A.
40 avenue du Recteur Pineau
86 022 POITIERS CEDEX, FRANCE
e-mail : soriano@matpts.univ-poitiers