

JEAN-PIERRE MASSIAS

GUY ROBIN

**Bornes effectives pour certaines fonctions concernant  
les nombres premiers**

*Journal de Théorie des Nombres de Bordeaux*, tome 8, n° 1 (1996),  
p. 215-242

[http://www.numdam.org/item?id=JTNB\\_1996\\_\\_8\\_1\\_215\\_0](http://www.numdam.org/item?id=JTNB_1996__8_1_215_0)

© Université Bordeaux 1, 1996, tous droits réservés.

L'accès aux archives de la revue « Journal de Théorie des Nombres de Bordeaux » (<http://jtnb.cedram.org/>) implique l'accord avec les conditions générales d'utilisation (<http://www.numdam.org/conditions>). Toute utilisation commerciale ou impression systématique est constitutive d'une infraction pénale. Toute copie ou impression de ce fichier doit contenir la présente mention de copyright.

NUMDAM

Article numérisé dans le cadre du programme  
Numérisation de documents anciens mathématiques

<http://www.numdam.org/>

**Bornes effectives pour certaines fonctions  
concernant les nombres premiers**

par JEAN-PIERRE MASSIAS ET GUY ROBIN

RÉSUMÉ. Si  $p_k$  est le  $k^{\text{ème}}$  nombre premier,  $\theta(p_k) = \sum_{i=1}^k \log p_i$  la fonction de Chebyshev. Nous obtenons de nouvelles estimations et des améliorations des bornes données par Rosser et Schoenfeld, Schoenfeld et Robin pour les fonctions

$$p_k, \theta(p_k), S_k = \sum_{i=1}^k p_i, \text{ et } S(x) = \sum_{p \leq x} p.$$

Ces estimations sont obtenues en utilisant des méthodes basées sur l'intégrale de Stieltjes et par calcul direct pour les petites valeurs.

**1. Introduction.**

Soit  $p_k$  le  $k^{\text{ème}}$  nombre premier,  $x$  un nombre réel positif,  $j$  et  $k$  deux nombres entiers positifs, on note

$$\log_2 x = \log \log x,$$

$$\text{li}(x) = \lim_{\epsilon \rightarrow 0^+} \left( \int_0^{1-\epsilon} \frac{dt}{\log t} + \int_{1+\epsilon}^x \frac{dt}{\log t} \right),$$

$$\pi(x) = \sum_{p \leq x} 1,$$

$$\left. \begin{aligned} \theta(x) &= \sum_{p \leq x} \log p \\ \psi(x) &= \sum_{\substack{p, m \\ p^m \leq x}} \log p \end{aligned} \right\} \text{Fonctions de Chebyshev.}$$

---

Manuscrit reçu le 27 Février 1994

Recherche subventionnée par "Centre National de la Recherche Scientifique", et le P.R.C./G.D.R. "Mathématiques et Informatique".

$$\begin{aligned}
 S^{(j)}(x) &= \sum_{p \leq x} p^j, j \geq 1, \\
 S(x) &= S^{(1)}(x), \\
 S_k^{(j)} &= S^{(j)}(p_k), \\
 S_k &= S_k^{(1)}.
 \end{aligned}$$

**R.H.** veut dire que nous supposons que l'hypothèse de Riemann est vraie, **N.R.H.** signifie que l'on ne fait pas l'hypothèse.

Le but de cet article est de fournir des bornes explicites pour quelques-unes de ces fonctions. Nous donnons d'abord leurs développements asymptotiques. Puis nous présentons les meilleurs résultats actuellement connus. Quand ceux-ci sont nouveaux, nous en donnons la démonstration.

Cette publication a été suggérée par des articles précédents des auteurs [4,5] où des bornes explicites de  $S(x)$  et  $S_k$  ont été utilisées. Les résultats obtenus ici sont également utiles à l'étude de la complexité des algorithmes [14,15].

D'autres fonctions comme

$$\sum_{p \leq x} p^j \log^k p, \text{ avec } k \in \mathbb{Z}, j \in \mathbb{Z},$$

peuvent également être étudiées.

### 1.1 Développements asymptotiques.

Massias [2, page 15] prouve qu'il existe  $a > 0$  tel que pour tout nombre réel  $j > -1$

$$(1.1) \quad S^{(j)}(x) = li(x^{j+1}) + O(x^{j+1} e^{-a\sqrt{\log x}}).$$

En utilisant le développement asymptotique de  $li(x)$ ,

$$li(x) \asymp \frac{x}{\log x} \sum_{n \geq 0} \frac{n!}{\log^n x},$$

nous pouvons écrire

$$(1.2) \quad S^{(j)}(x) \asymp \frac{x^{j+1}}{(j+1) \log x} \sum_{n \geq 0} \frac{n!}{(j+1)^n \log^n x}.$$

En prenant  $j = 0$  dans (1.1), nous en déduisons

$$(1.3) \quad p_k = \text{li}^{-1}(k) + O\left(ke^{-c\sqrt{\log k}}\right) \text{ pour } c > 0.$$

Cipolla [1, page 140] donne les premiers termes

$$(1.4) \quad p_k = k \left\{ \log k + \log_2 k - 1 + \frac{\log_2 k - 2}{\log k} - \frac{\log_2^2 k - 6 \log_2 k + 11}{2 \log^2 k} + O\left(\left(\frac{\log_2 k}{\log k}\right)^3\right) \right\}.$$

A partir de (1.1) et (1.3) nous obtenons

$$(1.5) \quad S_k^{(j)} \asymp \text{li}(\text{li}^{-1}(k)^{j+1}) + O\left(k^{j+1}e^{-\alpha_j\sqrt{\log k}}\right), \text{ pour } \alpha_j > 0.$$

En utilisant un théorème de Robin [8, pages 20 à 22], nous avons

$$(1.6) \quad S_k^{(j)} \asymp \frac{1}{j+1} k^{j+1} (\log k)^j \left(1 + \sum_{n \geq 1} \frac{B_{n,j}(\log_2 k)}{(\log k)^n}\right),$$

où les polynômes  $B_{n,j}$  vérifient la relation suivante

$$\begin{cases} B_{0,j}(x) = 1 \\ B'_{n+1,j}(x) = B'_{n,j}(x) - (n-j)B_{n,j}(x), \text{ pour } n \geq 0. \end{cases}$$

Nous calculons également

$$(1.7) \quad S_k = S_k^{(1)} \asymp \frac{k^2}{2} \log k \left(1 + \frac{\log_2 k - \frac{3}{2}}{\log k} + \frac{\log_2 k - \frac{5}{2}}{\log^2 k}\right),$$

$$(1.8) \quad S_k^{(j)} \asymp \frac{k^{j+1}}{j+1} (\log k)^j \left(1 + j \frac{\log_2 k - \frac{j+2}{j+1}}{\log k}\right).$$

## 1.2 Bornes explicites.

Les théorèmes ci-dessous sont exprimés de manière aussi proche que possible des développements asymptotiques correspondants.

## THÉORÈME A.

- (i)  $p_k \geq k \log k$  pour tout  $k \geq 2$ ,
- (ii)  $p_k \geq k(\log k + \log_2 k - 1)$  pour tout  $k \geq 2$ , sans restriction si R.H., et si N.R.H. cette inégalité n'est peut-être pas vérifiée pour  $e^{598} \leq p_k \leq e^{1800}$ ,
- (iii)  $p_k \geq k \left( \log k + \log_2 k - 1 - 0,4353 \frac{\log_2 k}{\log k} \right)$  pour tout  $k \geq 2$ , et  
 $p_k \geq k(\log k + \log_2 k - 1,002872)$  pour tout  $k \geq 2$ .
- (iv)  $p_k \leq k(\log k + \log_2 k)$  pour tout  $k \geq 6$ ,
- (v)  $p_k \leq k \left( \log k + \log_2 k - 1 + 1,8 \frac{\log_2 k}{\log k} \right)$  pour tout  $k \geq 13$ ,  
 $p_k \leq k(\log k + \log_2 k - 0,9427)$  pour tout  $k \geq 15985$ ,
- (vi)  $p_k \leq k \left( \log k + \log_2 k - 1 + \frac{\log_2 k - 1,8}{\log k} \right)$  pour tout  $k \geq 27076$  si R.H.

(i) a été démontrée en 1939 par Rosser [9, page 37], (iv) par Rosser et Schoenfeld en 1962 [11, page 69].

## THÉORÈME B.

- (i)  $\theta(p_k) \geq k \log k$  pour tout  $k \geq 13$ ,
- (ii)  $\theta(p_k) \geq k(\log k + \log_2 k - 1)$  pour tout  $k \geq 5107$ ,
- (iii)  $\theta(p_k) \geq k \left( \log k + \log_2 k - 1 + \frac{\log_2 k - c}{\log k} \right)$  avec  
 $c = 2,1454$  pour  $k \geq 2$ ,  
 $c = 2,1$  pour  $k \geq 495634$ ,
- (iv)  $\theta(p_k) \leq k(\log k + \log_2 k)$  pour tout  $k \geq 3$ ,
- (v)  $\theta(p_k) \leq k \left( \log k + \log_2 k - 1 + \frac{\log_2 k - 2}{\log k} \right)$  pour tout  $k \geq 198$ ,

(i) a été annoncée par Rosser et Schoenfeld [12, page 243], et démontrée ainsi que (iv) par Robin [7, page 372].

Les assertions (ii), (iii), (v), (vi) du théorème A et (ii), (iii), (v) du théorème B seront démontrées au paragraphe 3. Ce sont des améliorations des inégalités suivantes démontrées par Robin [7].

$$(1.9) \quad p_k \geq k(\log k + \log_2 k - 1,0072629) \text{ pour } k \geq 2,$$

$$(1.10) \quad p_k \geq k(\log k + \log_2 k - 1) \text{ pour } 3 \leq p_k \leq 10^{11},$$

$$(1.11) \quad p_k \leq k(\log k + \log_2 k - 0,938\ 5) \text{ pour } k \geq 8\ 602,$$

$$\theta(p_k) \geq k \left( \log k + \log_2 k - 1 + \frac{\log_2 k - 2,145\ 4}{\log k} \right) \text{ pour } k \geq 3,$$

$$(1.13) \quad \theta(p_k) \leq k \left( \log k + \log_2 k - 1 + \frac{\log_2 k - 1,918\ 5}{\log k} \right) \text{ pour } k \geq 126,$$

$$(1.14) \quad \theta(p_k) \leq k(\log k + \log_2 k - 0,946\ 5) \text{ pour } k \geq 14.$$

THÉORÈME C.

- (i)  $S_k \geq \frac{k^2}{2} \log k$ , pour tout  $k \geq 1$ ,
- (ii)  $S_k \geq \frac{k^2}{2}(\log k + \log_2 k - 1,503\ 4)$ , pour tout  $k \geq 127\ 042$ ,
- (iii)  $S_k \geq \frac{k^2}{2}(\log k + \log_2 k - 1,5)$ ,  $\left\{ \begin{array}{l} \text{pour tout } k \geq 305\ 494 \text{ si R.H.,} \\ \text{pour tout } 305\ 494 \leq k \leq e^{530} \\ \text{si N.R.H.,} \end{array} \right.$
- (iv)  $S_k \geq \frac{k^2}{2} \left( \log k + \log_2 k - 1,5 - \frac{3,568}{\log k} \right)$ , pour tout  $k \geq 2$ ,
- (v)  $S_k \leq \frac{k^2}{2}(\log k + \log_2 k)$ , pour tout  $k \geq 6$ ,
- (vi)  $S_k \leq \frac{k^2}{2} \left( \log k + \log_2 k - 1,5 + \frac{1,805 \log_2 k}{\log k} \right)$ , pour tout  $k \geq 18$ ,
- (vii)  $S_k \leq \frac{k^2}{2}(\log k + \log_2 k - 1,463)$ , pour tout  $k \geq 779$ ,
- (viii)  $S_k \leq \frac{k^2}{2} \left( \log k + \log_2 k - 1,5 + \frac{\log_2 k - 2,29}{\log k} \right)$ , pour tout  $k \geq 10\ 134$  si R.H.

(i) et (v) se déduisent de (ii) et (vii). Les autres inégalités sont démontrées au paragraphe 4.

THÉORÈME D.

- (i)  $S(x) \geq \frac{x^2}{2 \log x}$ , pour tout  $x \geq 347$ ,
- (ii)  $S(x) \geq \frac{x^2}{2 \log x} \left( 1 + \frac{0,954}{2 \log x} \right)$ , pour tout  $x \geq 70\ 841$ ,

- (iii)  $S(x) \geq \frac{x^2}{2 \log x} \left(1 + \frac{c}{\log x}\right)$ , pour tout  $x \geq x_0$  où  $c$  et  $x_0$  sont donnés dans la table I,
- (iv)  $S(x) \geq \frac{x^2}{2 \log x} \left(1 + \frac{1}{2 \log x}\right)$ ,  $\left\{ \begin{array}{l} \text{pour tout } x \geq 302\,971 \text{ si R.H.,} \\ \text{pour tout } 302\,971 \leq x \leq e^{98} \\ \text{et } x \geq e^{63\,864} \text{ si N.R.H.,} \end{array} \right.$
- (v)  $S(x) \leq \frac{x^2}{2 \log x} \left(1 + \frac{3}{5 \log x}\right)$ , pour tout  $x \geq 24\,281$ .

Table I

c	1/30	1/10	1/4	1/3	2/5	9/19
$x_0$	347	569	1 433	5 381	19 373	70 117

La preuve de ce théorème se trouve au paragraphe 5.

Les formules sont vérifiées par calcul direct pour  $k \leq K = 1\,000\,000$ . Nous supposons donc dans les preuves suivantes  $k > K$  et  $p_k > p_K = 15\,485\,863$ .

## 2. Lemmes

Nous énonçons ici, quelques lemmes utiles.

LEMME 2.1.

$$p_k \leq k \log p_k, \text{ pour tout } k \geq 4.$$

LEMME 2.2.

$$p_k \geq k(\log p_k - 2) \text{ pour tout } k \geq 5.$$

LEMME 2.3.

Soient  $\beta < 1/2$  et  $u_0$  tels que  $\log(1 + u_0) \leq u_0 - \beta u_0^2$ , alors  $\log(1 + u) \leq u - \beta u^2$  pour  $0 \leq u \leq u_0$ .

LEMME 2.4.

Soient  $\beta < 1$  et  $u_0$  tels que  $\log(1 + u_0) \geq \beta u_0$ , alors  $\log(1 + u) \geq \beta u$  pour  $0 \leq u \leq u_0$ .

LEMME 2.5.

Soit  $f(x) = (\log x - a)^c/x^b$  avec  $b > 0$ ,  $c > 0$ , alors nous avons

$$f'(x) = (c + ab - b \log x)(\log x - a)^{c-1}/(x^{b+1}).$$

Le maximum de  $f(x)$  est obtenu pour  $\log x = a + c/b$  et sa valeur est  $e^{-ab} \left(\frac{c}{be}\right)^c$ .

LEMME 2.6.

Soit  $I_n = \int_{x_0}^x \frac{t dt}{\log^n t}$ , avec  $x_0 \leq x$ . Nous avons

- (i)  $I_n = \frac{x^2}{2 \log^n x} - \frac{x_0^2}{2 \log^n x_0} + \frac{n}{2} I_{n+1}$ ,
- (ii)  $I_{n+1} \left( \log x_0 - \frac{n}{2} \right) \leq \frac{x^2}{2 \log^n x} - \frac{x_0^2}{2 \log^n x_0}$ ,
- (iii)  $I_{n+1} \left( \log x - \frac{n}{2} \right) \geq \frac{x^2}{2 \log^n x} - \frac{x_0^2}{2 \log^n x_0}$ .

LEMME 2.7.

Nous avons  $|\theta(x) - x| \leq cx/\log x$ , pour  $e^{b_0} \leq x \leq e^{b_1}$ ,  $c, b_0, b_1$  étant donnés dans la table II.

LEMME 2.8.

On peut écrire

$$(2.1) \quad |p_k - \theta(p_k)| \leq 0,007\,762\,9k \text{ si } \log p_k \geq \log p_K = 16,55$$

$$(2.2) \quad |p_k - \theta(p_k)| \leq 8,072 \frac{k}{\log k} \text{ si } \log p_k \geq 1\,040$$

$$(2.3) \quad |p_k - \theta(p_k)| \leq 5,12 \frac{k}{\log k} \text{ si } \log p_k \geq 1\,800$$

$$(2.4) \quad |p_k - \theta(p_k)| \leq 0,96 \frac{k}{\log k} \text{ si } \log p_k \geq 4\,164$$

La formule (2.2) est vraie dès que  $\log p_k \geq 16,55$ , mais ne devient meilleure que la formule (2.1) que pour  $\log p_k \geq 1\,040$ . Il en est de même des suivantes.

*Preuve.* Schoenfeld [13, page 360] prouve le résultat

$$|\theta(x) - x| \leq \eta_j \frac{x}{\log^j x}, \text{ pour } x > 1,04.10^7,$$



et  $\eta_1 = 0,007\,762\,9$ ,  $\eta_2 = 8,072$ ,  $\eta_3 = 10\,644$ ,  $\eta_4 = 1,657 \cdot 10^7$ .

On a alors

$$(2.5) \quad |\theta(p_k) - p_k| \leq \eta_j \frac{p_k}{\log^j p_k} \leq \eta_j \frac{k}{\log^{j-1} p_k},$$

d'après le lemme 2.1.

On prend  $j = 1$  pour l'inégalité (2.1),  $j = 2$  pour (2.2) et  $j = 4$  pour (2.3) et (2.4).

Table II

$c \cdot 10^4$	$b_0$	$b_1$	$c \cdot 10^4$	$b_0$	$b_1$
7,5	40	42	25	25	147
8	—	45	26	—	158
9	29	51	27	—	164
10	—	56	28	—	170
11	28	62	29	—	176
12	—	68	30	—	182
13	—	73	31	—	188
14	27	80	32	—	194
15	—	86	33	—	208
16	—	92	34	24	214
17	—	98	35	—	221
18	26	105	36	—	227
19	—	111	37	—	233
20	—	117	38	—	240
21	—	123	39	—	246
22	—	129	40	—	262
23	—	135	41	—	268
24	—	141	42	—	275

$c \cdot 10^4$	$b_0$	$b_1$
43	—	281
44	—	288
45	—	294
46	—	313
47	—	320
48	—	326
49	23	333
50	—	340
51	—	347
52	—	368
53	—	375
54	—	382
55	—	389
56	—	397
57	—	420
58	—	428
59	—	435
60	—	442

$c \cdot 10^4$	$b_0$	$b_1$
61	—	470
62	—	478
63	—	485
64	—	493
65	—	523
66	—	531
67	—	540
68	—	548
69	22	582
70	—	590
71	—	598
72	—	637
73	—	646
74	—	688
75	—	697
76	—	745
77	—	797
77,629	—	$\infty$

C'est une conséquence immédiate de la table publiée par Schoenfeld [13, page 358] et du résultat du même Schoenfeld [13, page 360],

$$\text{pour tout } x > 1,04 \cdot 10^7, \text{ on a } |\theta(x) - x| < 0,007\,762\,9 \frac{x}{\log x}. \blacksquare$$

### 3. Démonstration des théorèmes A et B.

(a) **Assertions (ii) et (iii) du théorème A.** Les quatre lemmes suivants démontrent ces deux assertions

LEMME 3.1.

Pour  $3 \leq p_k \leq e^{600}$ , nous avons  $p_k \geq k(\log k + \log_2 k - 1)$ .

*Preuve.*

Pour  $3 \leq p_k \leq 10^{11}$  cela est vrai d'après (1.10).

Pour  $10^{11} \leq p_k \leq e^{600}$  on a d'après le lemme (2.7),

$$p_k > \theta(p_k) - c \frac{p_k}{\log p_k} \text{ avec } c = 0,0071.$$

Plus simplement, le lemme (2.1) nous permet d'écrire

$$p_k > \theta(p_k) - ck.$$

En utilisant l'inégalité (1.12) on en déduit

$$p_k > k \left( \log k + \log_2 k - 1 + \frac{\log_2 k - 2,1454}{\log k} - c \right).$$

La fonction  $k \mapsto \frac{\log_2 k - 2,1454}{\log k}$  est décroissante. Son minimum, sur l'intervalle qui nous intéresse vaut 0,007 104, il est donc supérieur à la valeur de  $c$ . ■

LEMME 3.2.

Pour  $e^{598} \leq p_k \leq e^{1800}$ , les inégalités du (iii) du théorème A sont vérifiées, à savoir

$$p_k \geq k \left( \log k + \log_2 k - 1 - 0,4353 \frac{\log_2 k}{\log k} \right) \text{ pour tout } k \geq 2,$$

$$\text{et } p_k \geq k(\log k + \log_2 k - 1,002872) \text{ pour tout } k \geq 2.$$

Plus précisément, la table III montre que si  $e^{b_0} \leq p_k \leq e^{b_1}$ , avec  $600 \leq b_0 \leq b_1 \leq 1700$ , alors

$$p_k \geq k \left( \log k + \log_2 k - 1 - \alpha \frac{\log_2 k}{\log k} \right),$$

$$p_k \geq k(\log k + \log_2 k - 1 - \gamma).$$

Table III

$b_0$	$\alpha$	$\gamma \cdot 10^3$	$b_0$	$\alpha$	$\gamma \cdot 10^3$
600	0,054 3	0,585	1 000	0,413 3	2,872
650	0,118 5	1,191	1 050	0,426 3	2,841
700	0,177 8	1,677	1 100	0,435 3	2,787
750	0,232 4	2,067	1 150	0,428 5	2,640
800	0,284 1	2,391	1 200	0,414 2	2,460
850	0,325 8	2,603	1 250	0,396 8	2,275
900	0,362 5	2,757	1 300	0,376 2	2,085
950	0,395 2	2,870	1 350	0,332 1	1,781

$b_0$	$\alpha$	$\gamma \cdot 10^3$
1 400	0,287 4	1,494
1 450	0,242 6	1,223
1 500	0,197 8	0,969
1 550	0,153 4	0,730
1 600	0,091 1	0,422
1 650	0,025 6	0,116
1 700	0,001 0	0,010

On prendra pour  $b_0$  les valeurs successives de la table et pour  $b_1$  les mêmes valeurs décalées d' une ligne.

*Preuve.* Nous procédons comme dans le lemme 1 de [7, page 373].

Nous supposons que

$$\theta(p_k) \geq k \left( \log k + \log_2 k - 1 + \frac{\log_2 k - \beta_{b_0}}{\log k} \right), \text{ pour } p_k \geq e^{b_0},$$

et que  $e^{b_0} \leq p_k \leq e^{b_1}$ , nous pouvons utiliser [13, page 358] pour écrire

$$\theta(p_k) - p_k \leq \varepsilon_{b_0} p_k.$$

Nous en déduisons que

$$p_k \geq k \left( \log k + \log_2 k - 1 - \alpha_{b_0} \frac{\log_2 k}{\log k} \right), \text{ avec}$$

$$\alpha_{b_0} \geq \varepsilon_{b_0} \frac{\log k}{\log_2 k} \left( \log k + \log_2 k - 1 + \frac{\log_2 k - \beta_{b_0}}{\log k} \right) - \frac{\log_2 k - \beta_{b_0}}{\log_2 k}.$$

Comme la fonction dans le second membre de cette inégalité est croissante, nous pouvons prendre  $k = e^{b_1}$  et écrire

$$(3.1) \quad \alpha_{b_0} = \varepsilon_{b_0} \frac{b_1}{\log b_1} \left( b_1 + \log b_1 - 1 + \frac{\log b_1 - \beta_{b_0}}{b_1} \right) - \frac{\log b_1 - \beta_{b_0}}{\log b_1}.$$

Nous remarquons que  $b_0 \leq \log p_k \leq b_1$  entraîne  $b_0 - \log b_0 < \log k < b_1$ . Nous avons donc

$$(3.2) \quad p_k \geq k(\log k + \log_2 k - 1 - \gamma_{b_0}),$$

où nous pouvons prendre  $\gamma_{b_0} = \alpha_{b_0} \frac{\log(b_0 - \log b_0)}{b_0 - \log b_0}$ .

Avec le même argument que dans le lemme 1 de [7, page 373], nous pouvons obtenir la meilleure valeur de  $\beta_{b_0}$  suivante

$$(3.3) \quad \beta_{b_0} = \frac{b_0(1 + \delta) - \log b_0 + 1}{b_0 - 1}, \text{ avec}$$

$$(3.4) \quad \delta = \frac{1}{2} \frac{(\log b_0 - \gamma_{b_0} - 1)^2}{b_0} + \gamma_{b_0} + 1.$$

Nous itérons les relations (3.1), (3.2), (3.3) et (3.4) quatre fois dans chaque intervalle  $[b_0, b_1]$ ,  $b_0$  et  $b_1$  variant de 50 en 50 dans l'intervalle  $[600, 1\ 800]$  avec comme premier intervalle  $[598, 600]$  pour faire la jonction avec le lemme 3.1. ■

LEMME 3.3. Si  $p_k \geq e^{1\ 800}$ ,  $p_k \geq k(\log k + \log_2 k - 1)$ .

*Preuve.*

En utilisant (2.3) on obtient

$$p_k \geq k \left( \log k + \log_2 k - 1 + \frac{\log_2 k - 7,27}{\log k} \right).$$

Pour les valeurs de  $k$  qui sont concernées,  $\log_2 k > 7,49$ , l'assertion est donc démontrée. ■

LEMME 3.4. Sous R.H., on a  $p_k \geq k(\log k + \log_2 k - 1)$  pour  $p_k \geq 3$ .

*Preuve.*

Schoenfeld, [13, page 337], démontre l'inégalité suivante sous R.H.

$$(3.5) \quad |\theta(x) - x| \leq \frac{1}{8\pi} \sqrt{x} \log^2 x \text{ pour } x \geq 599.$$

Pour  $p_k \geq 10^{11}$ , nous pouvons écrire

$$\begin{aligned} \theta(p_k) &< p_k + 0,052 \frac{p_k}{\log^2 p_k}, \\ p_k &> \theta(p_k) - 0,052 \frac{k}{\log k}, \\ p_k &> k \left( \log k + \log_2 k - 1 + \frac{\log_2 k - 2,159}{\log k} \right), \\ p_k &> k(\log k + \log_2 k - 1). \end{aligned}$$

**(b) Assertion (v) du théorème B.**

Nous allons considérer plusieurs intervalles  $[k_0, k_1]$  et supposer que

$$p_k \leq k(\log k + \log_2 k - 1 + \alpha \log_2 k / \log k), \text{ pour } k_0 \leq k \leq k_1.$$

Posons alors

$$\begin{aligned} u(k) &= \frac{\log_2 k - 1}{\log k} + \alpha \frac{\log_2 k}{\log^2 k}, \\ \beta &= \frac{u(k_0) - \log(1 + u(k_0))}{u^2(k_0)}, \\ s(k) &= k \left( \log k + \log_2 k - 1 + \frac{\log_2 k - 2}{\log k} \right), \\ f(k) &= s(k) - \left( \log k + \log_2 k + \frac{\log_2 k - 1}{\log k} \right). \end{aligned}$$

De plus, pour  $\beta < 1/2$ , définissons les deux assertions suivantes,

$$(T_1(X)) : \beta X^2 - (2\beta + \alpha + 1)X + \beta + 2,999 \geq 0, \text{ et}$$

$$(T_2(X)) : \beta X^2 - (2\beta + \alpha)X + \beta \geq 0.$$

Notre but est de montrer que  $\theta(p_k) < s(k)$ , pour  $k_0 \leq k \leq k_1$ .

LEMME 3.5.

Si, pour  $k_0 \leq k \leq k_1$ ,  $\theta(p_{k-1}) < f(k)$  et  $T_1(\log_2 k)$  est vraie alors  $\theta(p_k) < f(k+1)$ .

*Preuve.*

$f(k)$  est croissante, car

$$\begin{aligned} f'(k) &= s'(k) - \left( \frac{1}{k} + \frac{1}{k \log k} + \frac{2 - \log_2 k}{k \log^2 k} \right) \\ &= \log k + \log_2 k + \frac{\log_2 k - 1}{\log k} + \frac{3 - \log_2 k}{\log^2 k} - \frac{1}{k} \left( 1 + \frac{1}{\log k} + \frac{2 - \log_2 k}{\log^2 k} \right) \\ &\geq \log k + \log_2 k - \frac{1}{k} \left( 1 + \frac{1}{\log k} \right) + \frac{\log k (\log_2 k - 1) - \log_2 k}{\log^2 k} > 0. \end{aligned}$$

A l'aide du lemme (2.3) nous pouvons affirmer que la démonstration est terminée si

$$f(k+1) - f(k) \geq \log k + \log_2 k + u(k) - \beta u^2(k).$$

Comme  $f'$  est croissante, c'est une conséquence de l'inégalité suivante

$$f'(k) > \log k + \log_2 k + u(k) - \beta u^2(k), \text{ c'est-à-dire}$$

$$(3.6) \quad \frac{3 - (\alpha + 1) \log_2 k}{\log^2 k} - \frac{1}{k} \left( 1 + \frac{1}{\log k} + \frac{2 - \log_2 k}{\log^2 k} \right) + \beta u^2(k) > 0.$$

En utilisant la définition de  $u(k)$ , nous allons démontrer que

$$(3.7) \quad \frac{3 + \beta - (2\beta + \alpha + 1) \log_2 k + \beta \log_2^2 k}{\log^2 k} - \frac{1}{k} \left( 1 + \frac{1}{\log k} + \frac{2 - \log_2 k}{\log^2 k} \right) > 0.$$

Comme  $k > K = 1\,000\,000$ , nous avons

$$\frac{1}{k} \left( 1 + \frac{1}{\log k} + \frac{2 - \log_2 k}{\log^2 k} \right) < \frac{2,05 \cdot 10^{-4}}{\log^2 k},$$

et comme  $T_1(\log_2 k)$  est vérifiée, l'inégalité (3.7) est vraie et (3.6) est vérifiée. ■

LEMME 3.6.

Si  $T_2(\log_2 k)$  est vraie pour  $k_0 \leq k \leq k_1$  et si  $\theta(p_{k-1}) < f(k)$  alors  $\theta(p_k) < s(k)$ .

*Preuve.* A l'aide des hypothèses nous écrivons

$$\begin{aligned} \theta(p_k) &= \theta(p_{k-1}) + \log p_k < f(k) + \log p_k, \\ \theta(p_k) &< s(k) + u(k) - \beta u^2(k) - \frac{\log_2 k - 1}{\log k}. \\ &= s(k) + \frac{\alpha \log_2 k}{\log^2 k} - \beta u^2(k). \end{aligned}$$

Comme  $T_2(\log_2 k)$  est vraie,

$$\beta u^2(k) - \frac{\alpha \log_2 k}{\log^2 k} > \frac{\beta \log_2^2 k - (2\beta + \alpha) \log_2 k + \beta}{\log^2 k} > 0.$$

La démonstration est ainsi terminée.

LEMME 3.7.

Les hypothèses  $T_1(\log_2 k)$  et  $T_2(\log_2 k)$  sont vraies pour  $K < k < e^4 164$ .

*Preuve.* La démonstration fait ici aussi appel à des calculs numériques résumés dans la table ci-dessous.

$\log k_0$	$\log k_1$	$j$	$c$	$\alpha$	$u(k_0)$
13	18	1	0,023 99	0,485 64	0,127 75
18	53	1	0,007 77	0,620 51	0,110 56
53	153	1	0,007 77	0,854 95	0,057 25
153	407	1	0,007 77	1,207 01	0,026 60
407	745	1	0,007 77	1,585 20	0,012 36
745	988	1	0,007 77	1,835 05	0,007 56
988	1 108	1	0,007 77	1,954 40	0,005 98
1 108	1 211	2	0,007 47	2,004 01	0,005 44
1 211	1 394	2	0,006 79	2,042 38	0,005 05
1 394	1 810	3	0,005 63	2,102 75	0,004 48
1 810	4 164	4	0,002 88	2,208 73	0,003 60

... ..



$\beta$	$\gamma$	$\delta$
0,461 12		12,840
0,465 96	17,483	17,541
0,481 70	52,857	29,898
0,491 31	152,586	64,323
... ..	406,050	143,130
0,495 92	743,957	240,912
0,497 50	986,082	308,473
0,498 20	1 107,31	341,77
0,498 32	1 210,69	369,940
0,498 51	1392,23	418,97
0,498 80	1 775,82	512,09

LEMME 3.8. Soit  $k > e^{4 \cdot 164}$ , nous avons

$$p_k \leq k \left( \log k + \log_2 k - 1 + \frac{\log_2 k}{\log k} \right).$$

*Preuve.*

(2.4) et (1.13) démontrent ce résultat.

LEMME 3.9. Pour  $k > e^{4 \cdot 164}$ ,  $T1(\log_2 k)$  et  $T2(\log_2 k)$  sont vérifiées.

*Preuve.* A l'aide du lemme (3.8) nous pouvons prendre  $\alpha = 1$ , ce qui entraîne  $\beta = 0,499 4$  et le résultat est démontré.

Cela termine la démonstration de l'assertion (v) du théorème B.

(c) **Assertions (v) et (vi) du théorème A.**

LEMME 3.10. Pour  $k \geq 13$ ,

$$p_k \leq k \left( \log k + \log_2 k - 1 + 1,8 \frac{\log_2 k}{\log k} \right).$$

*Preuve.* On subdivise en deux intervalles:  $\log k \leq 1039,8$  et  $\log k \geq 1039,8$ .

On utilise les inégalités (2.1) et (2.2) du lemme (2.8) et l'inégalité (v) du théorème B pour obtenir

(1) pour  $\log k \leq 1\,039,8$  on a

$$(3.8) \quad p_k \leq k \left( \log k + \log_2 k - 1 + \frac{\log_2 k - 2}{\log k} \right) + 0,007\,762\,9k.$$

La fonction  $k \mapsto \frac{\log k}{\log_2 k} \left( \frac{\log_2 k - 2}{\log k} + 0,007\,762\,9 \right)$  est croissante.

Son maximum est obtenu en  $\log k = 1\,039,8$  et il donne le résultat.

(2) pour  $\log k \geq 1\,039,8$ , on a

$$p_k \leq k \left( \log k + \log_2 k - 1 + \frac{\log_2 k - 2}{\log k} \right) + \frac{8,072k}{\log k}.$$

La fonction  $k \mapsto \frac{\log k}{\log_2 k} \left( \frac{\log_2 k + 6,072}{\log k} \right)$  est décroissante. Son

maximum est obtenu en  $\log k = 1\,039,8$  et il donne le résultat.

LEMME 3.11. Pour  $k \geq 15\,985$ ,

$$p_k \leq k(\log k + \log_2 k - 0,942\,7).$$

*Preuve.* C'est une conséquence du lemme précédent pour  $\log k \geq 169$ . Dans le cas contraire, d'après le lemme 2.5 et la relation (3.8) il vient, pour tout  $k$  dans l'intervalle  $[K, e^{169}]$ ,

$$p_k \leq k(\log k + \log_2 k - 0,942\,45),$$

majoration que l'on améliore en la réinjectant dans

$$p_k \leq \theta(p_k) + 0,007\,762\,9 \frac{p_k}{\log p_k},$$

et en utilisant de nouveau l'inégalité (v) du théorème B.

Ainsi, en utilisant (2.1), nous obtenons

$$p_k \leq \theta(p_k) + 0,007\,762\,9 \frac{p_k}{\log k + \log_2 k},$$

$$p_k \leq \theta(p_k) + 0,007\,762\,9 \frac{k(\log k + \log_2 k - 0,942\,45)}{\log k + \log_2 k}.$$

Ceci donne le résultat dans l'intervalle considéré.

LEMME 3.12. Sous R.H., pour tout  $k \geq 27\,075$

$$p_k \leq k \left( \log k + \log_2 k - 1 + \frac{\log_2 k - 1,8}{\log k} \right).$$

*Preuve.* Pour  $K < k \leq e^{24}$ , c'est une conséquence du lemme précédent et pour  $k > e^{24}$ , on utilise (3.5).

(d) **Assertions (ii) et (iii) du théorème B.** Nous présentons ici une démonstration différente de celle proposée dans [7]. Pour  $\gamma$  réel positif, posons

$$s(k) = k \left( \log k + \log_2 k + \frac{\log_2 k - 2,1}{\log k} \right),$$

$$h(k) = \log k + \log_2 k + \frac{\log_2 k - \gamma}{\log k},$$

$$f(k) = s(k) - h(k).$$

On veut démontrer que  $\theta(p_k) \geq s(k)$  pour  $k \geq K$  sachant que cette inégalité est vraie pour  $k = K$ .

Remarquons que les trois inégalités  $\theta(p_{k-1}) \geq f(k)$ ,  $\log p_k \geq f(k+1) - f(k)$  et  $\log p_k \geq h(k)$  entraînent  $\theta(p_k) \geq f(k+1)$  et  $\theta(p_k) \geq s(k)$ . Il nous faut donc montrer que  $\log p_k \geq f(k+1) - f(k)$  et  $\log p_k \geq h(k)$  pour prouver, par récurrence le résultat.

Nous avons besoin de considérer deux intervalles.

(1)  $13,81 \leq \log k \leq 25$ .

Dans ce cas

$$p_k \geq \theta(p_k) \geq k \left( \log k + \log_2 k - 1 + \frac{\log_2 k - 2,1454}{\log k} \right),$$

soit  $p_k \geq k(\log k + \log_2 k - 0,965\,3)$ , et

$$\log p_k \geq \log k + \log_2 k + \frac{\log_2 k - 1,062}{\log k}.$$

(2)  $\log k \geq 25$ .

D'après le théorème A (iii), on peut écrire

$$p_k \geq k(\log k + \log_2 k - 1,002\,872),$$

d'où

$$\log p_k \geq \log k + \log_2 k + \frac{\log_2 k - 1,095}{\log k}.$$

La condition  $\log p_k \geq h(k)$  est donc vérifiée en prenant dans le premier intervalle  $\gamma = 1,062$  et dans le second  $\gamma = 1,095$ .

Etudions maintenant l'autre condition  $\log p_k \geq f(k+1) - f(k)$ . Lorsque  $k$  et  $k+1$  sont dans le même intervalle

$$f(k+1) - f(k) \leq s(k+1) - s(k).$$

Lorsque  $k$  est dans le premier intervalle et  $k+1$  dans le second, on obtient la même inégalité mais en choisissant le  $\gamma$  du second intervalle.

On a

$$s'(x) = \log x + \log_2 x + \frac{\log_2 x - 1,1}{\log x} + \frac{3,1 - \log_2 x}{\log^2 x},$$

$$s''(x) = \frac{1}{x} \left( 1 + \frac{1}{\log x} + \frac{2,1 - \log_2 x}{\log^2 x} - \frac{7,2 - 2 \log_2 x}{\log^3 x} \right),$$

$s(k+1) - s(k) = s'(k) + s''(x_0)$  avec  $k < x_0 < k+1$ , soit  $s(k+1) - s(k) \leq s'(k) + \frac{2}{k}$ .

On sera sûr de l'inégalité  $f(k+1) - f(k) \leq \log p_k$  si

$$s'(k) + \frac{2}{k} \leq \log k + \log_2 k + \frac{\log_2 k - \gamma}{\log k},$$

$$\text{soit } 1,1 - \gamma \geq \frac{3,1 - \log_2 k}{\log k} + \frac{2 \log k}{k},$$

ce qui est vérifié sur chacun des intervalles.

Les deux conditions sont toujours vérifiées et l'assertion est ainsi démontrée. ■

#### 4. Démonstration du théorème C.

##### a) Assertions (ii), (iii) and (iv).

Soient  $\varepsilon$  et  $b$  deux nombres réels positifs,  $s(k)$  et  $f(k)$  les fonctions définies par

$$s(k) = \frac{k^2}{2} \left( \log k + \log_2 k - \frac{3}{2} - \varepsilon - \frac{b}{\log k} \right),$$

$$f(k) = s(k) - k \log k.$$

LEMME 4.1.  $k$  étant un nombre entier positif,

$$f(k+1) - f(k) \leq k \left( \log k + \log_2 k - 1 - \varepsilon + \frac{\frac{1}{2} - b}{\log k} + \frac{b}{2 \log^2 k} + \frac{\log k}{k} \right).$$

*Preuve.* Calculons les deux premières dérivées de  $f$ , nous obtenons

$$f'(x) = x \left( \log x + \log_2 x - 1 - \varepsilon + \frac{\frac{1}{2} - b}{\log x} + \frac{b}{2 \log^2 x} \right) - \log x - 1,$$

$$f''(x) = \log x + \log_2 x - \varepsilon + \frac{\frac{3}{2} - b}{\log x} + \frac{3b - 1}{2 \log^2 x} - \frac{b}{\log^3 x} - \frac{1}{x}.$$

Nous appliquons alors la formule de Taylor,  $f(k+1) - f(k) = f'(k) + f''(k_1)$ , avec  $k < k_1 < k + 1$ . Comme  $f''$  est croissante, nous obtenons

$$f(k+1) - f(k) \leq f'(k) + f''(k+1) \leq f'(k) + 2 \log k.$$

LEMME 4.2.

$$S_k \geq \frac{k^2}{2} (\log k + \log_2 k - 1, 503\ 4), \text{ pour tout } k \geq 127\ 042,$$

$$S_k \geq \frac{k^2}{2} (\log k + \log_2 k - 1, 5), \text{ pour tout } 305\ 494 \leq k \leq e^{541}.$$

*Preuve.*

- a) Considérons d'abord que  $k \leq e^{530}$  et prenons  $\varepsilon = b = 0$  dans les définitions de  $s$  et  $f$ .

Supposons maintenant que  $k \geq K$ . Si

$$(4.1) \quad S_{k-1} \geq f(k),$$

nous pouvons déduire, en utilisant l'assertion (i) du théorème A que  $S_k \geq s(k)$ . Il ne reste plus qu'à démontrer que (4.1) est vérifiée pour tout  $K \leq k \leq e^{530}$ . Nous utiliserons un raisonnement par récurrence.

Pour  $k = K$ , on vérifie que (4.1) est valide.

Montrons que  $p_k \geq f(k+1) - f(k)$  ce qui revient à dire  $S_k \geq f(k+1)$ .

Pour  $k \leq \pi(10^{11})$ , nous utilisons le théorème B, assertion(iii), ainsi que l'inégalité

$x \geq \theta(x)$ , (cf Schoenfeld [13, p.360]), ce qui s'écrit

$$(4.2) \quad p_k \geq \theta(p_k) \geq k \left( \log k + \log_2 k - 1 + \frac{\log_2 k - 2,1}{\log k} \right).$$

Remarquons que

$$\frac{\log_2 k - 2,1}{\log k} \geq \frac{1}{2 \log k} + \frac{\log k}{k}.$$

Le lemme 4.1 donne le résultat. Pour  $\pi(10^{11}) \leq k \leq e^{530}$ , nous raisonnons de même, mais en prenant comme minoration de  $p_k$  une borne issue du lemme 2.7, c'est à dire

$$p_k + 69 \cdot 10^{-4} \frac{p_k}{\log p_k} \geq \theta(p_k).$$

A l'aide du lemme 2.1, nous obtenons le résultat.

- b) Pour  $e^{530} \leq k \leq e^{1\ 800}$  nous prenons  $\varepsilon = 0,003\ 4$  et  $b = 0$  dans les définitions de  $f$  et  $s$  et nous utilisons les bornes trouvées dans la table III.

$$p_k \geq k(\log k + \log_2 k - 1 - \gamma).$$

Nous vérifions alors l'inégalité suivante

$$k(\log k + \log_2 k - 1 - \gamma) \geq f(k+1) - f(k).$$

La valeur de  $k$  permettant d'obtenir la constante  $\varepsilon$  se trouve dans l'intervalle  $[e^{950}, e^{1\ 000}]$ .

- c) Pour  $k \geq e^{1\ 800}$ , nous utilisons le théorème A, assertion (ii), c'est-à-dire l'inégalité

$p_k \geq k(\log k + \log_2 k - 1)$ , et il ne reste plus qu'à vérifier

$$\frac{1}{2 \log k} + \frac{\log k}{k} \leq 0,003\ 4.$$

LEMME 4.3. Si R.H.

$$S_k \geq \frac{k^2}{2}(\log k + \log_2 k - 1,5), \text{ pour tout } k \geq 305\,494.$$

*Preuve.*

Comme dans le lemme 4.2, il nous faut montrer que  $p_k \geq f(k+1) - f(k)$  avec  $\varepsilon = 0$  et  $b = 0$ . Avec le lemme 4.1, la relation (3.5) et l'assertion (iii) du théorème B, il reste à démontrer que

$$\frac{\log_2 k - 2,1}{\log k} - \frac{\sqrt{p_k} \log^2 p_k}{8\pi k} \geq \frac{1}{2 \log k} + \frac{\log k}{k},$$

ce qui est vérifié car  $p_k \leq \frac{3}{2}k \log k$ .

LEMME 4.4.

$$S_k \geq \frac{k^2}{2} \left( \log k + \log_2 k - 1,5 - \frac{3,568}{\log k} \right), \text{ pour tout } k \geq 2.$$

*Preuve.* Jusqu'à  $\log k = 1\,000$ , c'est une conséquence du lemme 4.2. Pour les valeurs plus grandes de  $k$  nous utilisons le lemme 4.1 avec  $\varepsilon = 0$  et  $b = 3,568$ . Il ne reste plus à démontrer, comme au lemme 4.2, que

$$\frac{\alpha \log_2 k}{\log k} \leq \frac{b - \frac{1}{2}}{\log k} - \frac{b}{2 \log^2 k} - \frac{\log k}{k}.$$

La signification de  $\alpha$  et ses valeurs sont données au lemme (3.2).

**b) Assertions (vi), (vii) et (viii).** Soient  $\varepsilon, b, \mu$  trois nombres réels positifs, posons

$$s(k) = \frac{k^2}{2} \left( \log k + \log_2 k - \frac{3}{2} + \varepsilon + \frac{b \log_2 k - \mu}{\log k} \right),$$

$$f(k) = s(k) - k(\log k + \log_2 k).$$

LEMME 4.5. Pour  $k \geq K$ , nous avons

$$f(k+1) - f(k) \geq k \left( \log k + \log_2 k - 1 + \varepsilon + \frac{b \log_2 k - \mu + \frac{1}{2} + \nu(k)}{\log k} \right),$$

$$\text{avec } \nu(k) = \frac{b(1 - \log_2 k) + \mu - 7 \cdot 10^{-3}}{2 \log k}.$$

*Preuve.*

$$f'(x) = x \left( \log x + \log_2 x - 1 + \varepsilon + \frac{b \log_2 x - \mu + \frac{1}{2}}{\log x} + \frac{b(1 - \log_2 x) + \mu}{2 \log^2 x} \right) - \log x - \log_2 x - 1 - \frac{1}{\log x},$$

$$f''(x) = \log x + \log_2 x + \varepsilon - \frac{1}{x} + \frac{1}{\log x} \left( b \log_2 x - \mu + \frac{3}{2} - \frac{1}{x} \right) - \frac{1}{2 \log^2 x} \left( 3b \log_2 x - 3b - 3\mu + 1 - \frac{2}{x} \right) + \frac{1}{\log^3 x} \left( b \log_2 x - \mu - \frac{3b}{2} \right).$$

Comme  $f''$  est positive dans l'intervalle que nous considérons, nous pouvons en déduire, en utilisant le théorème des accroissements finis, que  $f(k+1) - f(k) > f'(k)$ . Comme, pour  $x > K$ , nous avons

$$\log x + \log_2 x + 1 + \frac{1}{\log x} < 7 \cdot 10^{-3} \frac{x}{2 \log^2 x},$$

la démonstration est achevée.

LEMME 4.6.

$$(4.3) \quad S_k \leq \frac{k^2}{2} \left( \log k + \log_2 k - 1,5 + \frac{1,805 \log_2 k}{\log k} \right), \text{ pour tout } k \geq 18$$

$$(4.4) \quad S_k \leq \frac{k^2}{2} (\log k + \log_2 k - 1,463), \text{ pour tout } k \geq 779.$$

*Preuve.* Les preuves de ce lemme et du suivant se font par récurrence. On montre que  $S_{k-1} < f(k)$  entraîne  $S_k < f(k+1)$ . Pour cela il faut que l'inégalité suivante soit vérifiée

$$(4.5) \quad p_k < f(k+1) - f(k).$$



On utilise pour cette comparaison une minoration du deuxième membre obtenue au lemme 4.5 et une majoration de  $p_k$  obtenue au théorème A. La démonstration est réalisée en considérant plusieurs intervalles.

Le nombre  $k_0$  défini par

$$\frac{1,805 \log_2 k_0}{\log k_0} = 1,463,$$

vérifie  $250 \leq \log k_0 \leq 300$ .

Le lemme sera démontré en prouvant (4.4) pour  $\log k \leq 300$  et (4.3) pour  $\log k \geq 250$ .

- a) Pour  $\log k \leq 300$  nous prenons  $b = \mu = 0$  et  $\varepsilon = 0,037$ , dans  $s(k)$  et  $f(k)$ .

Pour obtenir l'inégalité (4.5), montrons que

$$p_k \leq k \left( \log k + \log_2 k - 1 + \varepsilon + \frac{1/2 + \nu}{\log k} \right), \text{ avec } \nu = \nu(k) = -\frac{7 \cdot 10^{-3}}{2 \log k}.$$

Pour  $13 < \log k < 24$ , nous utilisons l'assertion (v) du théorème A pour majorer  $p_k$ . Nous obtenons alors l'inégalité

$$\varepsilon + \frac{1/2 + \nu}{\log k} > 1 - 0,9427.$$

Pour  $24 \leq \log k \leq 300$ , nous écrivons, d'après le lemme 2.7, l'inégalité suivante

$$p_k \leq \theta(p_k) + ck, \text{ avec } c = 0,0048.$$

En utilisant le théorème B(v), il ne nous reste plus qu'à prouver

$$\varepsilon + \frac{1/2 + \nu}{\log k} > \frac{\log_2 k - 2}{\log k} + 0,0048.$$

Or, d'après le lemme 2.5, la fonction  $x \mapsto \frac{\log_2 x - 5/2}{\log x}$  atteint son maximum 0,03019. (4.4) est prouvé.

- b) Pour  $\log k \geq 250$ , prenons  $b = 1,805$ ,  $\mu = 0$  et  $\varepsilon = 0$ . Comme  $\nu(k) > -2 \cdot 10^{-4}$ , nous devons démontrer l'inégalité suivante

$$p_k \leq k \left( \log k + \log_2 k - 1 + \frac{1,805 \log_2 k + 0,4835}{\log k} \right).$$

Pour  $250 \leq \log k \leq 1\,093$ , nous utilisons le théorème A(v) et c'est alors une conséquence de l'inégalité

$$1,874\,1 \log_2 k \leq 1,805 \log_2 k + 0,483\,5.$$

Pour  $1\,093 < \log k$ , nous utilisons (2.5) et obtenons

$$p_k \leq \theta(p_k) + 8,072 \frac{p_k}{\log^2 p_k} \leq \theta(p_k) + 8,072 \frac{k}{\log p_k} \leq \theta(p_k) + 8,072 \frac{k}{\log k}.$$

Le théorème B(v) permet de conclure car

$$\log_2 k + 6,072 \leq 1,805 \log_2 k + 0,483\,5. \blacksquare$$

LEMME 4.7. L'assertion  $S_k \leq \frac{k^2}{2} \left( \log k + \log_2 k - 1,5 + \frac{\log_2 k - 2,29}{\log k} \right)$  pour tout  $k \geq 10\,134$  est vérifiée sous l'hypothèse R.H.

*Preuve.* Prenons, dans le lemme 4.5,  $\varepsilon = 0, b = 1, \mu = 2,29$ , alors  $\nu(k) \geq -0,006\,9$ . La majoration du théorème A (vi) nous permet d'obtenir le résultat. ■

### 5. Démonstration du théorème D.

Supposons que, pour tout  $t \leq x$ ,  $\theta(t) < t(1 + c_1/\log t)$  et  $\theta(x) > x(1 - c_2/\log x)$ . Ecrivons ensuite

$$\sum_{2 < p \leq x} p = \int_e^x \frac{t}{\log t} d\theta(t).$$

En intégrant par parties, on obtient

$$\sum_{2 < p \leq x} p = \left[ \frac{t\theta(t)}{\log t} \right]_e^x - \int_e^x \frac{\log t - 1}{\log^2 t} \theta(t) dt.$$

Utilisons le lemme 2.6

$$S(x) \geq \frac{x^2}{2 \log x} + \left( \frac{1}{4} - \frac{c_1}{2} - c_2 \right) \frac{x^2}{\log^2 x} + \frac{x^2}{4 \log^3 x}.$$

Le lemme 2.7 nous indique que nous pouvons prendre les valeurs suivantes pour  $c_1$  et  $c_2$

pour  $p_K \leq x \leq 10^{11}$ ,  $c_1 = 0$ ,  $c_2 = 0,007\,762\,9$ ,

pour  $e^{25} \leq x \leq e^{66,66}$ ,  $c_1 = c_2 = 0,002\,5$ ,

pour  $e^{66,66} \leq x \leq e^{98}$ ,  $c_1 = c_2 = 0,001\,7$ ,

pour  $e^{98} \leq x \leq e^{1\,040}$ ,  $c_1 = c_2 = 0,007\,762\,9$ ,

pour  $e^{1\,040} \leq x$ ,  $c_1 = c_2 = 8,072/\log x$ ,

pour  $e^{1\,319} \leq x$ ,  $c_1 = c_2 = 10\,644/\log^2 x$ .

Sous R.H. nous utilisons (3.5) pour  $x \geq e^{98}$ .

Ceci nous permet de démontrer les formules (i), (ii), (iii), et (iv) du théorème D.

Etudions maintenant la formule (v). Comme précédemment, écrivons la somme

$$\sum_{x_0 \leq p \leq x} p = \int_{x_0^-}^x \frac{td\theta(t)}{\log t}.$$

Avec une intégration par parties, on obtient

$$\sum_{x_0 \leq p \leq x} p = \frac{x\theta(x)}{\log x} - \frac{x_0\theta(x_0)}{\log x_0} - \int_{x_0}^x \frac{\log t - 1}{\log^2 t} \theta(t) dt.$$

Supposons que  $\theta(x) \leq x(1+c_1/\log x)$  et que, pour tout  $t \in [x_0, x]$ ,  $\theta(t) \geq t(1-c_2/\log t)$ , on a alors

$$\begin{aligned} \sum_{x_0 \leq p \leq x} p \leq \frac{x^2}{2} \left(1 + \frac{c_1}{\log x}\right) - \frac{x_0^2}{2} \left(1 - \frac{c_2}{\log x_0}\right) - \int_{x_0}^x \frac{\log t - 1}{\log^2 t} t dt \\ + c_2 \int_{x_0}^x \frac{\log t - 1}{\log^3 t} t dt. \end{aligned}$$

Posons  $a = 2c_1 + \frac{1}{2} + c_2 + \frac{1}{2(\log x_0 - 1)}$  et  $b = \frac{1}{2} - c_2 + \frac{1}{2(\log x_0 - 1)}$ . Le lemme 2.6 entraîne

$$\sum_{x_0 \leq p \leq x} p \leq f_a(x) - f_b(x_0) \text{ avec } f_\alpha(x) = \frac{x^2}{2 \log x} \left(1 + \frac{\alpha}{\log x}\right).$$

Si  $S(x_0) \leq f_\alpha(x_0)$ , nous avons  $S(x) \leq f_\beta(x)$  quand le couple  $(\alpha, \beta)$  vérifie

$$\frac{x^2}{\log^2 x} (\beta - a) \geq \frac{x_0^2}{\log^2 x_0} (\alpha - b).$$

- (1) Si  $x < 10^{11}$  et  $x_0 \geq p_K$ , nous pouvons prendre  $c_1 = 0$ ,  $c_2 = 1/41$ ,  $\alpha = 0,6$ ; nous avons alors  $a = 0,564\ 26\dots$ ,  $b = 0,515\ 48\dots$  et nous pouvons prendre  $\beta = 0,6$ .
- (2) Pour  $x = 10^{11}$ , nous pouvons prendre  $\beta = 0,565$ .
- (3) Si  $x \geq 10^{11}$  et  $x_0 = 10^{11}$ , nous pouvons prendre  $c_1 = c_2 = 0,007\ 762\ 9$ ,  $\alpha = 0,565$ ; on a alors  $a = 0,543\ 859\dots$ ,  $b = 0,512\ 81\dots$  et la valeur  $\beta = 0,6$  convient. ■.

## BIBLIOGRAPHIE

- [1] M. Cipolla, *La determinazione assintotica dell nimo numero primo*, Rend. Acad. Sci. Fis. Mat. Napoli, Ser. 3, **8** (1902), 132–166.
- [2] J.-P. Massias, *Ordre maximum d'un élément du groupe symétrique et applications* (1985), Thèse de 3ème cycle, Limoges, France.
- [3] J.-P. Massias, *Majoration explicite de l'ordre maximum d'un élément du groupe symétrique*, Ann. Fac. Sci. Toulouse Math. **6** (1984), 269–280.
- [4] J.-P. Massias, J.-L. Nicolas, G. Robin, *Evaluation asymptotique de l'ordre maximum d'un élément du groupe symétrique*, Acta Arithmetica **L** (1988), 221–242.
- [5] J.-P. Massias, J.-L. Nicolas, G. Robin, *Effective Bounds for the maximal order of an element in the symmetric group*, Math. of Comp. **53** (1989), 665–678.
- [6] C. Pereira, *Estimates for the Chebyshev Function  $\psi(x) - \theta(x)$* , Math of Comp **44** (1985), 211–221.
- [7] G. Robin, *Estimation de la fonction de Tchebycheff  $\theta$  sur le  $k$ -ième nombre premier et grandes valeurs de la fonction  $\omega(n)$ , nombre de diviseurs premiers de  $n$* , Acta Arithmetica **XLII** (1983), 367–389.
- [8] G. Robin, *Permanence de relations de récurrence dans certains développements asymptotiques*, Pub. Inst. Math. Beograd tome 43, (57), (1988), 17–25.
- [9] J.B. Rosser, *The  $n$ -th prime is greather than  $n \log n$* , Proc. London Math. Soc. (2) **45** (1939), 21–44.
- [10] J.B. Rosser, *Explicit bounds for some functions of prime numbers*, Amer. J. Math. **63** (1941), 211–232.
- [11] J.B. Rosser, L. Schoenfeld, *Approximate formulas for some functions of prime numbers*, Illinois Journ. Math. **6** (1962), 64–94.
- [12] J.B. Rosser, L. Schoenfeld, *Sharper bounds for the Chebyshev functions  $\theta(x)$  and  $\psi(x)$* , Math. of Comp. **29** (1975), 243–269.
- [13] L. Schoenfeld, *Sharper bounds for the Chebyshev functions  $\theta(x)$  and  $\psi(x)$ , II*, Math. of Comp. **30** (1976), 337–360.
- [14] L.G. Valiant, M.S. Paterson, *Deterministic one counter automata*, Journal of Computer and System Sciences **10** (1975), 340–350.

- [15] P.M.B. Vitanyi, *On the size of DOL languages. L. Systems*, Third Open House, Comput. Sci. Dept. Aarhus Univ., Aarhus, 1974, Lectures Notes in Computer Science, vol. 15, Springer, Berlin, 1974, pp. 78–92, 327–338.

Jean-Pierre MASSIAS et Guy ROBIN  
LACO CNRS  
Faculté des Sciences,  
123, avenue A. Thomas  
87060 LIMOGES Cedex  
e-mail : [massias@cict.fr](mailto:massias@cict.fr), [robin@cict.fr](mailto:robin@cict.fr)