Journal de Théorie des Nombres de Bordeaux

Nathalie Loraud

# β-shift, systèmes de numération et automates

*Journal de Théorie des Nombres de Bordeaux*, tome 7, n$^{o}$ 2 (1995), p. 473-498

<http://www.numdam.org/item?id=JTNB_1995__7_2_473_0>

*Journal de Théorie des Nombres*
*de Bordeaux* **7** *(1995), 473–498*

# $\beta$-shift, systèmes de numération et automates

par NATHALIE LORAUD

ABSTRACT. – In this note we prove that the language of a numeration system is the language of a $\beta$-shift under some assumptions on the basis. We deduce from this result a partial answer to the question when the language of a numeration system is regular. Moreover, we give a characterization of the arithmetico-geometric sequences and the mixed radix sequences that are basis of a numeration system for which the language is regular. Finally, we study the Ostrowski systems of numeration and give another proof of the result of J. Shallit : the Ostrowski systems having a regular langage are exactly the ones associated to a quadratic number.

## I. Introduction

Nous nous intéressons, dans ce travail, à des systèmes de numération associés à une échelle $(d_n)_n$, où $(d_n)_n$ est une suite strictement croissante d'entiers de premier terme 1, qui sont intrinsèquement liés à un $\beta$-shift. Tout entier naturel admet une représentation en base $(d_n)_n$ donnée par l'algorithme glouton. Par définition, le langage de la numération sera l'ensemble de toutes ces représentations. La section II est consacrée à des rappels sur les systèmes de numération et les $\beta$-développements. La notion de $*$-récurrence pour une suite $(d_n)_n$ est introduite à la section III. L'intérêt est que, pour de telles échelles, le langage de la numération est celui d'un $\beta$-shift (théorème 1), ce qui complète un résultat d'A. Bertrand-Mathis [Be 1].

La section IV a pour point de départ un problème posé par J. Shallit dans [Sh 2], à savoir : caractériser les bases de numération dont le langage est reconnaissable par automate. Le résultat précédent permet de donner une réponse partielle puisque nous obtenons deux conditions suffisantes pour la régularité, la deuxième permettant d'exhiber un algoritme de construction d'échelles de numération récurrentes linéaires à coefficients dans $\mathbf{Z}$ dont le langage est reconnaissable.

D'autre part, nous caractérisons la sous-classe des bases arithmético géométriques fournissant un langage reconnaissable.

Manuscrit reçu le 3 décembre 1994

La section V traite du cas particulier des systèmes de numération de Cantor : nous caractérisons les bases de Cantor à langage reconnaissable. Le dernier paragraphe est consacré à l'étude des systèmes de numération d'Ostrowski. Nous retrouvons, par une méthode différente, le résultat de J. Shallit qui affirme qu'un système d'Ostrowski est à langage reconnaissable si et seulement s'il est relatif à un nombre réel quadratique, [Sh 2]. Au passage, les numérations de Cantor et d'Ostrowski associées à un $\beta$-shift sont déterminées explicitement.

## II. Notations et rappel sur les systèmes de numération et le $\beta$-shift

### 1. Échelle de numération

Soit $d = (d_n)_{n\geq 0}$ une échelle de numération, c'est à dire une suite d'entiers naturels strictement croissante, de premier terme $d_0 = 1$. Tout entier naturel $n$ admet un développement du type :

$$n = \sum_{i=0}^{k} n_i d_i$$

où les $n_i$ sont des entiers positifs ou nuls. Le mot $\widetilde{n} \doteq n_k ... n_0$ associé à ce développement est unique si les inégalités

$$n_0 d_0 + \cdots + n_j d_j \ < \ d_{j+1}$$

sont vérifiées pour tout $j = 0, \ldots, k$. Nous renvoyons à [Fr 1] pour plus de détail sur ces systèmes de numération. L'ensemble $\mathcal{L}(d)$ de tous les mots $\widetilde{n}$ (décompositions des entiers dans la base $(d_n)_n$ ) est appelé le langage de la numération :

$$\mathcal{L}(d) \ := \ \{ \, n_k ... n_0 \in \mathbf{N}^{k+1} \, ; \, \forall j \ , \leq \ , k \, , \, n_0 d_0 + \cdots + n_j d_j \ < \ , d_{j+1} \, \}.$$

La question principale qui nous intéresse est de caractériser les échelles de numération dont le langage est régulier et d'étudier le cas où la numération est associée à un $\beta$-shift.

### 2. Rappels sur les $\beta$-développements de Renyi

Soit un nombre réel $\beta > 1$ et soit $T : [0,1] \to [0,1]$, la transformation définie par $T(y) = \{\beta y\}$, où $\{ \ \}$ désigne la partie fractionnaire. Tout nombre réel $x \geq 0$ peut être développé suivant les puissances négatives de $\beta$ :

$$x = \sum_{n=0}^{+\infty} x_n \beta^{-n}$$

où les $x_n$ sont définis de la manière suivante :

si $x > 1$, alors $x_0 = [x]$ et $x_{n+1} = [\beta T^n(\{x\})]$, $n \in \mathbf{N}$ et si $0 \leq x \leq 1$, alors $x_0 = 0$ et $x_{n+1} = [\beta T^n(x)]$, $n \in \mathbf{N}$.

Le $\beta$-développement de $x$ est noté $d(x, \beta)$ : il représente la suite $(x_n)_{n \geq 0}$ si $x > 1$ et il représente la suite $(x_n)_{n \geq 1}$ si $0 \leq x \leq 1$.

Dans ce qui suit, $d(\beta, \beta)$ est noté $(a_n)_{n \geq 0}$, de sorte que $\beta = a_0 + \frac{a_1}{\beta} + \frac{a_2}{\beta^2} + \cdots$

Remarquons que $d(1, \beta) = (a_{n-1})_{n \geq 1}$ car $[\beta T^n(1)] = [\beta T^{n-1}(\{\beta\})]$; d'où $d(1, \beta) = d(\beta, \beta)$.

**Notations** : le fait que $(a_n)_{n \geq 0} = d(1, \beta)$ soit nulle à partir d'un certain rang nécessite parfois d'être distingué; on parlera dans ce cas de suite $(a_n)_n$ *presque nulle* (le nombre réel $\beta$ correspondant est alors un $\beta$-nombre simple au sens de Parry).

On définit une suite $d^*(1, \beta) = (a_n^*)_n$ qui représente, soit la suite $d(1, \beta)$ si $(a_n)_n$ n'est pas presque nulle, soit la suite périodique $(a_0, a_1, \ldots, a_{k-1}, a_k - 1, a_0, a_1, \ldots, a_{k-1}, a_k - 1, a_0, a_1, \ldots)$ si $(a_n)_n$ est nulle à partir du rang $k+1$ et $a_k \neq 0$.

Notons que dans ce deuxième cas :

$$1 = \sum_{n=1}^{+\infty} a_{n-1}^* \beta^{-n} = \sum_{n=1}^{k+1} a_{n-1} \beta^{-n}.$$

Par analogie avec la notion de $*$-récurrence qui sera introduite au chapitre suivant, on dira que la suite $(d_n)_n$ est *récurrente linéaire de coefficients* $(a_0, \ldots, a_k)$ si elle satisfait à la relation de récurrence :

$$\forall n \geq k, \quad d_{n+1} = a_0 d_n + \cdots + a_k d_{n-k}.$$

Soit $D_\beta$ l'ensemble des $\beta$-développements des réels de $[0,1[$. Définissons sur $D_\beta$ l'application *shift*

$\sigma : (x_n)_n \mapsto (x_{n+1})_n$. Si $(x_n)_n$ est le $\beta$-développement d'un nombre réel $x$, alors $\sigma(x_n)_n$ est le $\beta$-développement du nombre réel $\beta x$ [mod 1]. Parry a caractérisé l'ensemble $D_\beta$ :

PROPOSITION [PA].

$$x = (x_n)_{n\geq 1} \in D_\beta \iff \forall k \in \mathbf{N},\, \sigma^k(x) <_{\text{lex}} d^*(1,\beta)$$

*(où $\leq_{\text{lex}}$ désigne l'ordre lexicographique).*

Cette proposition conduit à introduire l'ensemble :

$$S_\beta = \{\, (x_n)_n \in \{0,1,\ldots,[\beta]\}^{\mathbf{Z}};\, \forall p \in \mathbf{Z},\, (x_p, x_{p+1}, \ldots) \leq_{\text{lex}} (a_0^*, a_1^*, \ldots)\,\}.$$

Cet ensemble est fermé et $\sigma$-invariant; le couple $(S_\beta, \sigma)$ est un système dynamique symbolique appelé le $\beta$-shift.

Le langage associé au $\beta$-shift est noté $L_\beta$ :

$$L_\beta = \{\, w_0 \ldots w_n \in \{0,1,\ldots,[\beta]\}^{n+1};\, \forall p \leq n,\, (w_p, w_{p+1}, \ldots, w_n) \leq_{\text{lex}} (a_0^*, a_1^*, \ldots, a_{n-p}^*)\,\}.$$

Le $\beta$-shift a fait l'objet de nombreuses études, en particulier [Pa, Be 1, Be 2, Bl]; on sait, entre autre, caractériser les nombres réels $\beta$ dont le $\beta$-shift est un système sofique, ce qui signifie que le langage $L_\beta$ est reconnaissable par automate. Un cas particulier de base de numération récurrente va permettre de mettre en parallèle les deux systèmes de numération que nous venons de voir et de conclure, dans certains cas, à la reconnaissabilité.

## III. *-Récurrence

Soit $(d_n)_n$ une suite d'entiers naturels vérifiant :

$$d_0 = 1 \quad \& \quad \forall n \in \mathbf{N},\, d_{n+1} = \sum_{k=0}^{n} a_k d_{n-k} + 1$$

où $(a_n)_n \in \mathbf{N}^{\mathbf{N}}$ satisfait à la condition :

$$(*) \qquad a_0 \geq 1 \quad \& \quad \forall n \in \mathbf{N},\, (a_{n+1}, a_{n+2}, \ldots) <_{\text{lex}} (a_0, a_1, \ldots).$$

La suite $(d_n)_n$ sera dite *$*$-récurrente de coefficients* $(a_n)_n$.

Ces récurrences particulières ont été utilisées par Grabner, Liardet et Tichy dans l'étude des odomètres [G-L-T].

*Remarque.* La propriété $(*)$ sur la suite $(a_n)_n$ assure l'existence d'un nombre réel $\beta > 1$ unique de $\beta$-développement $(a_n)_n$ [Pa]. Cette hypothèse est parfois appelée *condition de Parry.*

Si la suite $(a_n)_n$ vérifie : $a_0 \geq 1$ & $\forall n \in \mathbf{N}, (a_{n+1}, a_{n+2}, \dots) \leq_{\text{lex}} (a_0, a_1, \dots)$ au lieu de la condition $(*)$, avec l'égalité pour au moins un rang $n$, c'est-à-dire que $(a_n)_n$ est alors périodique, on parlera pour $(d_n)_n$ de suite *$*$-récurrente faible.*

PROPOSITION 1. *Si $(d_n)_n$ est $*$-récurrente ou $*$-récurrente faible de coefficients $(a_n)_n$, alors*

$$\mathcal{L}(d) = \{\, n_k ... n_0 \in \mathbf{N}^{k+1};\ \forall j \leq k\,,\ (n_j, \dots, n_0) \leq_{\text{lex}} (a_0, \dots, a_j)\,\}.$$

*Preuve.*

La suite $(d_n)_n$ étant strictement croissante, elle est la base d'un système de numération.

Ce système préserve l'ordre en ce sens que pour deux mots de $\mathcal{L}(d)$ de même longueur

$n_k ... n_0$ et $m_k ... m_0$ on a l'équivalence :

$$(n_k, \dots, n_0) \leq_{\text{lex}} (m_k, \dots, m_0) \iff n_0 d_0 + \dots + n_k d_k \leq m_0 d_0 + \dots + m_k d_k.$$

La condition $n_0 d_0 + \dots + n_j d_j < d_{j+1}$ qui assure l'unicité de la décomposition de $n$ sur la base $(d_n)_n$ devient, puisque la suite $(d_n)_n$ est $*$-récurrente :

$$n_0 d_0 + \dots + n_j d_j \leq a_j d_0 + \dots + a_0 d_j.$$

Soit $n$ un entier quelconque mais fixé. Montrons par récurrence sur $k \leq n$ que le mot $a_{n-k} ... a_n$ est dans le langage $\mathcal{L}(d)$ :

Au rang 0, $(a_n, a_{n+1}, \dots) \leq_{\text{lex}} (a_0, a_1, \dots)$ donc $a_n d_0 \leq a_0 d_0 < d_1$ et $a_n \in \mathcal{L}(d)$.

Supposons que pour un certain entier $k \leq n$, $a_{n-k+1} \dots a_n$ soit dans $\mathcal{L}(d)$.

*Remarque.* Cela implique que pour tout $k' < k, a_{n-k'} \dots a_n$ est aussi dans $\mathcal{L}(d)$.

Il s'agit de montrer que $\forall j \leq k,\ a_n d_0 + \dots + a_{n-j} d_j < d_{j+1}$.

L'hypothèse de récurrence au rang $k-1$ assure que l'inégalité est vérifiée pour tout $j \leq k-1$.

Etudions le cas $j = k$.

D'après la propriété $(*)$, $(a_{n-k}, a_{n-k+1}, \dots, a_n) <_{\text{lex}} (a_0, a_1, \dots, a_k)$, ce qui permet de définir le plus petit entier $p \leq k$ tel que $a_{n-k+p} < a_p$.

Alors

$$a_n d_0 + \cdots + a_{n-k} d_k = a_n d_0 + \cdots + a_{n-k+p} d_{k-p} + (a_{p-1} d_{k-p+1} + \cdots + a_0 d_k).$$

$*$ si $p = k$, alors $a_n d_0 + \cdots + a_{n-k} d_k = a_n d_0 + (a_{k-1} d_1 + \cdots + a_0 d_k) < a_k d_0 + \cdots + a_0 d_k < d_{k+1}$,

$*$ si $p < k$, alors $a_{n-k+p+1} \cdots a_n \in \mathcal{L}(d)$ (hypothèse de récurrence au rang $k' = k - p - 1$)

d'où
$$\begin{aligned} a_n d_0 + \cdots + a_{n-k} d_k &< d_{k-p}(1 + a_{n-k+p}) + (a_{p-1} d_{k-p+1} + \cdots + a_0 d_k) \\ &< d_{k-p}(1 + a_{n-k+p}) + (d_{k+1} - a_p d_{k-p} - \cdots - a_k d_0) \\ &< d_{k+1} - d_{k-p}(a_p - a_{n-k+p} - 1) - \cdots - a_k d_0. \end{aligned}$$

Par définition de l'entier $p$, $a_p - a_{n-k+p} - 1$ est positif et l'on obtient $a_n d_0 + \cdots + a_{n-k} d_k < d_{k+1}$.

Par conséquent, pour tout entier $j$, le mot $a_0 \dots a_j$ est dans le langage $\mathcal{L}(d)$. Pour obtenir le résultat annoncé, il suffit d'utiliser le fait que le système de numération préserve l'ordre. ∎

Le théorème suivant relie le langage associé à une numération dans une base $*$-récurrente au langage associé à un $\beta$-shift :

THÉORÈME 1. *Soit $(d_n)_n$ une suite d'entiers naturels $*$-récurrente de coefficients $(a_n)_n$. Si $(a_n)_n$ n'est pas nulle à partir d'un certain rang alors $\mathcal{L}(d) = L_\beta$ où $\beta$ est l'unique nombre réel strictement supérieur à 1 de $\beta$-développement $(a_n)_n$.*

*Preuve.*

D'après la proposition 1, $\mathcal{L}(d) = \{ n_k \dots n_0 ; \forall j \leq k, (n_j, \dots, n_0) \leq_{\text{lex}} (a_0, \dots, a_j) \}$.

D'autre part, $(a_n)_n$ vérifie la condition $(*)$ d'où il existe un réel $\beta > 1$ unique de $\beta$-développement $(a_n)_n$. La suite $(a_n)_n$ n'étant pas presque nulle, $d^*(1, \beta)$ et $d(1, \beta)$ coïncident.

Soit $L_\beta = \{ w_0 \dots w_k ; \forall p \leq k, (w_p, \dots, w_k) \leq_{\text{lex}} (a_0, \dots, a_{k-p}) \} = \mathcal{L}(d)$. ∎

Ce résultat complète un théorème d'Anne Bertrand [Be 1] et permet d'énoncer une nouvelle caractérisation des bases de numération dont le langage associé est celui d'un système dynamique symbolique, ou d'un $\beta$-shift :

THÉORÈME 2. *Soit $(d_n)_n$ une échelle de numération. Les assertions suivantes sont équivalentes :*

*i) $\mathcal{L}(d)$ est le langage d'un système dynamique symbolique;*

*ii) $\mathcal{L}(d)$ est un langage factoriel prolongeable;*

*iii) $\mathcal{L}(d)$ est le langage d'un $\beta$-shift;*

*iv) il existe une suite $(a_n)_n$ d'entiers naturels non presque nulle telle que $(d_n)_n$ est $*$-récurrente ou bien $*$-récurrente faible de coefficients $(a_n)_n$.*

*Dans le cas où $(d_n)_n$ est $*$-récurrente de coefficients $(a_n)_n$ on a $\mathcal{L}(d) = L_\beta$ où $\beta$ est le nombre réel unique de $\beta$-développement $(a_n)_n$ et strictement supérieur à 1.*

*Et lorsque $(d_n)_n$ est $*$-récurrente faible de coefficients $(a_n)_n$ on a $\mathcal{L}(d) = L_\beta$ où $\beta > 1$ est le nombre réel unique de $\beta$-développement $(a_0, \ldots, a_k + 1, 0, 0, \ldots)$ si $(a_n)_n$ est de période $k+1$.*

*Preuve.*

L'équivalence de i) et ii) est classique.

L'équivalence entre ii) et iii) et l'implication iii) $\Longrightarrow$ iv) sont traitées par A. Bertrand dans [Be 1].

L'implication iv) $\Longrightarrow$ iii) résulte immédiatement du théorème 1 et de la proposition 1 : il suffit de remarquer que, dans le cas où $(a_n)_n$ est périodique, elle n'est pas le $\beta$-développement mais le $d^*(1,\beta)$ relatif à un certain nombre réel $\beta$.

La dernière partie du théorème en est aussi une conséquence directe. ■

*Remarque.* Si $(d_n)_n$ est $*$-récurrente de coefficients $(a_n)_n$, on a toujours l'inclusion $L_\beta \subset \mathcal{L}(d)$, où $\beta > 1$ est le nombre réel de $\beta$-développement $(a_n)_n$, puisque $d^*(1,\beta) \leq_{\text{lex}} d(1,\beta)$; si $(a_n)_n$ est nulle à partir du rang $k+1$, alors l'inclusion est stricte car $a_0 \ldots a_k$ est, par l'hypothèse $(*)$, un mot de $\mathcal{L}(d)$ mais il n'appartient pas à $L_\beta$.

## IV. Numération et reconnaissabilité

Avant d'aborder les problèmes de reconnaissabilité, rappelons qu'un automate est un quadruplet $\mathcal{A} = (S, (\Phi_i)_i, A_0, T)$ où $S$ est l'ensemble des états, $A_0$ est l'état initial, $(\Phi_i)_i$ est une famille d'applications de $S$ dans un alphabet $A$, appelée la famille des flèches de l'automate et $T$ est l'ensemble des états terminaux. En général, on omet de décrire $T$; c'est que $T = S$. A tout chemin dans l'automate (partant de l'état initial) est associé un mot sur l'alphabet $A$. On appelle chemin admissible un chemin qui se termine sur un état appartenant à $T$. Le langage reconnu par l'automate $\mathcal{A}$ *à lecture directe* est l'ensemble $\mathcal{L}$ de tous les mots associés à des chemins admissibles, ce qui signifie que le mot $n_k ... n_0$ est dans le langage $\mathcal{L}$ si et seulement si l'on peut définir successivement les états $A_1 = \Phi_{n_k}(A_0), \ldots, A_{k+1} = \Phi_{n_0}(A_k)$. Et le langage reconnu par l'automate $\mathcal{A}$ *à lecture inverse* est l'ensemble de tous les mots miroir d'un mot associé à un chemin admissible. Cobham a démontré que les deux notions de reconnaissabilité *directe* et *inverse* coïncidaient, ce qui permet de les regrouper toutes les deux sous le terme de reconnaissablilité (par automate) [Co].

*Remarque.* Le fait que les notions de *reconnaissabilité* (ou de *régularité*) et de *rationnalité* soient équivalentes est un résultat classique (théorème de Kleene) et l'on utilisera indifféremment les trois appellations.

## 1. Séries N-rationnelles

Rappelons qu'une série formelle à coefficients dans $\mathbf{N}$ est dite $\mathbf{N}$-rationnelle si elle appartient au plus petit ensemble de séries formelles contenant les polynômes à coefficients dans $\mathbf{N}$ stable par addition, multiplication et par l'opérateur $S \to S^*$ qui à la série $S$, nulle en 0, associe la série $1 + S + S^2 + \cdots$ En particulier une telle série peut s'écrire sous la forme $\frac{P(X)}{Q(X)}$ avec $P(X)$ et $Q(X)$ dans $\mathbf{Z}[X]$ et $Q(0) = 1$. Il en résulte que la suite des coefficients d'une série $\mathbf{N}$-rationnelle vérifie une relation de récurrence linéaire sur $\mathbf{Z}$; pour plus de détails, on pourra se référer à [Be 3] (la preuve de ce résultat est probablement due à Soiltola.

PROPOSITION 2. *Soit $(d_n)_n$ une échelle de numération. Si le langage $\mathcal{L}(d)$ est rationnel alors la série $D(X) := \sum_{n=0}^{+\infty} d_n X^n$ est $\mathbf{N}$-rationnelle.*

*Preuve.*

Soit $l_n$ le nombre de mots dans $\mathcal{L}(d)$ de longueur $n$ ($l_0 = 1$). Le langage $\mathcal{L}(d)$ étant rationnel, la série $L(X) := \sum_{n=0}^{+\infty} l_n X^n$ est $\mathbf{N}$-rationnelle. Mais $d_n = l_0 + \cdots + l_n$ car, $d_n$ étant le plus petit entier dont la décomposition sur la base $(d_n)_n$ est un mot de longueur $n+1$, le nombre de mots de $\mathcal{L}(d)$ de longueur au plus $n$ est égal au nombre d'entiers inférieurs à $d_n$; d'où la relation entre les deux séries $D(X) = \frac{L(X)}{1-X}$. Il en résulte que $D(X)$ est $\mathbf{N}$-rationnelle. ∎

La réciproque de la proposition 2 est fausse comme le montre l'exemple suivant :

*Exemple 1* : Soit la suite $(d_n)_n$ définie par : $d_n = (n+1)^2$, $n \geq 0$.
La série $\sum_{n\geq 0}(n+1)^2 X^n$ est $\mathbf{N}$-rationnelle car égale à la somme : $\frac{1}{(1-X)^2} + \frac{2X}{(1-X)^3}$.
Pourtant $\mathcal{L}(d)$ n'est pas rationnel, [Sh 1].

Cette proposition permet de retrouver de manière très simple un résultat dû à J. Shallit concernant les bases de systèmes de numération dont le langage est rationnel :

THÉORÈME 3 [SH 1]. *Si $\mathcal{L}(d)$ est un langage rationnel alors la suite $(d_n)_n$ est récurrente linéaire à coefficients dans $\mathbf{Z}$.*

*Preuve.*
Outre la proposition 2, on utilise le résultat (cité plus haut) concernant les coefficients d'une série $\mathbf{N}$-rationnelle . ∎

L'exemple 1 illustre que le fait de supposer $(d_n)_n$ récurrente linéaire à coefficients dans $\mathbf{Z}$ n'est pas suffisant, en général, pour conclure à la reconnaissabilité de $\mathcal{L}(d)$; en effet, $(d_n)_n$ est récurrente linéaire de coefficients $(3, -3, 1)$. (Ce résultat était déjà annoncé dans [Sh 2]).

## 2. Bases $*$-récurrentes

COROLLAIRE 1. *Soit $(d_n)_n$ une échelle de numération $*$-récurrente de coefficients $(a_n)_n$. Alors $\mathcal{L}(d)$ est reconnaissable si et seulement si $(a_n)_n$ est ultimement périodique.*

*Preuve.*
Le théorème 1 permet d'obtenir l'égalité des ensembles $\mathcal{L}(d)$ et $L_\beta$, où $\beta > 1$ est l'unique nombre réel défini par $d(\beta, \beta) = (a_n)_n$, ceci dans le cas où $(a_n)_n$ n'est pas nulle à partir d'un certain rang; or d'après un résultat de A. Bertrand [Be 5], $L_\beta$ est reconnaissable si et seulement si $d(\beta, \beta)$ est ultimement périodique. Ce qui prouve que si $\mathcal{L}(d)$ est reconnaissable alors, soit $(a_n)_n$ est presque nulle, soit $(a_n)_n$ est ultimement périodique; dans les deux cas $(a_n)_n$ est ultimement périodique.

Réciproquement, si $(a_n)_n$ est ultimement périodique sans être presque nulle, alors $\mathcal{L}(d)$ est reconnaissable par automate pour les mêmes raisons que ci-dessus.

Si maintenant $(a_n)_n = (a_0, \dots, a_k, 0, 0, \dots)$ est nulle à partir du rang $k+1$, alors l'automate $\mathcal{A}_{a_0,\dots,a_k}$, à lecture directe, représenté sur la Figure 1 ci dessous, reconnaît le langage $\mathcal{L}(d)$ qui est caractérisé par la proposition 1. Le détail est laissé au lecteur. ∎

COROLLAIRE 1'. *Soit $(d_n)_n$ une suite $*$-récurrente de coefficients $(a_n)_n$. Si le nombre réel $\beta$ de $\beta$-développement $(a_n)_n$ est un nombre de Pisot alors $\mathcal{L}(d)$ est régulier.*

*Preuve.*

Il est connu que si $\beta$ est un nombre de Pisot alors $d(1,\beta)$ est ultimement périodique [Pa]. ∎

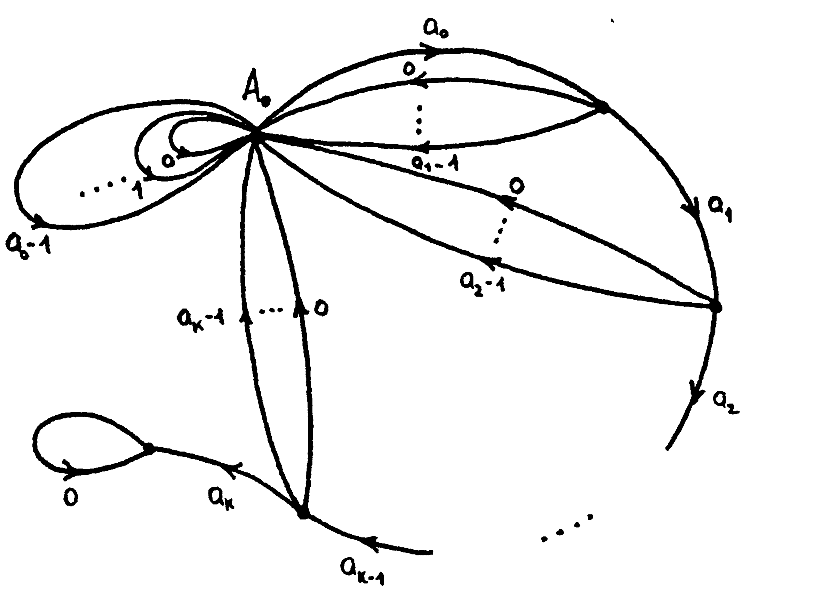


Fig 1

## 3. Bases récurrentes linéaires de "Parry"

THÉORÈME 4. *Soit $(d_n)_n$ une échelle de numération récurrente linéaire d'ordre $k+1$ de coefficients $(a_0, \dots, a_k) \in \mathbf{N}^* \times \mathbf{N}^{k-1} \times \mathbf{N}^*$.*

*Si* $\forall n < k,\ (a_{n+1}, \dots, a_k) \leq_{\text{lex}} (a_0, \dots, a_{k-n-1})$

*et si* $d_0 = 1$ *et pour* $n = 0, \dots, k-1, \quad d_{n+1} = \sum_{p=0}^{n} a_p d_{n-p} + 1,$

*alors $\mathcal{L}(d)$ est le langage du sous-shift de type fini $S_\beta$, où $1 < \beta = \sum_{i=0}^{k} a_i \beta^{-i}$.*

*Preuve.*

Sous ces hypothèses, montrons que la suite récurrente $(d_n)_n$ est $*$-récurrente faible de coefficients $(a_n^*)_n$ où $(a_n^*)_n$ désigne toujours la suite $(a_0, a_1, \dots, a_{k-1}, a_k - 1, a_0, a_1, \dots)$ qui n'est pas presque nulle :

$$\begin{aligned}
\forall n \leq k-1,\ d_{n+1} &= \sum_{p=0}^{n} a_p d_{n-p} + 1 = \sum_{p=0}^{n} a_p^* d_{n-p} \\
\text{et } \forall n \geq k,\ d_{n+1} &= a_0 d_n + a_1 d_{n-1} + \cdots + a_k d_{n-k} \\
&= a_0 d_n + \cdots + (a_k - 1) d_{n-k} + d_{n-k}.
\end{aligned}$$

Mais $d_{n-k}$ a deux écritures possibles suivant que $n-k \leq k$ ou que $n-k > k$. Soit donc $\alpha \in \mathbf{N}$, tel que $0 \leq n - k\alpha \leq k$.

Alors

$$\begin{aligned}
d_{n+1} = a_0 d_n + \cdots + (a_k - 1) d_{n-k} + a_0 d_{n-k-1} + \cdots + (a_k - 1) d_{n-2k} + \cdots \\
+ (a_k - 1) d_{n-k\alpha} + (a_0 d_{n-k\alpha-1} + \cdots a_{n-k\alpha-1} d_0 + 1).
\end{aligned}$$

D'où $d_{n+1} = \sum_{i=0}^{n} a_i^* d_{n-i} + 1$ et l'hypothèse sur les coefficients $(a_0, \dots, a_k)$ n'est rien d'autre que la condition $(*)$ faible pour $(a_n^*)_n$.

En utilisant la proposition 1, le langage de la numération est le suivant :

$$\mathcal{L}(d) = \{\, n_k \dots n_0 \,;\forall j \leq k, (n_j, \dots, n_0) \leq_{\text{lex}} (a_0^*, \dots, a_j^*) \,\}.$$

D'autre part, l'hypothèse sur les coefficients $(a_0, \dots, a_k)$ est aussi la condition $(*)$ pour la suite $(a_0, a_1, \dots, a_k, 0, 0, \dots)$ d'où l'existence de $\beta > 1$ de $\beta$-développement $(a_0, a_1, \dots, a_k, 0, 0, \dots)$, avec $L_\beta = \{\, w_0 \dots w_k ; \forall p \leq k, (w_p, \dots, w_k) \leq_{\text{lex}} (a_0^*, \dots, a_{k-p}^*) \,\}$.

Donc l'égalité $\mathcal{L}(d) = L_\beta$ est réalisée.

Enfin $d(1, \beta) = (a_0, \dots, a_k, 0, 0, \dots)$ est fini, donc le système dynamique $S_\beta$ est de type fini, d'après un résultat de Ito-Takahashi, [I-T]. ∎

COROLLAIRE 2. *Sous les hypothèses du théorème 4 sur l'échelle $(d_n)_n$ de numération, le langage $\mathcal{L}(d)$ est reconnaissable par automate.*

*Exemple 2* (classique) : en ce qui concerne le développement des entiers dans la base $(F_n)_n$ de Fibonacci, le théorème 4 permet de retrouver que le système dynamique associé est de type fini. En effet, $(F_n)_n$ est récurrente linéaire d'ordre 2 de coefficients $(1,1)$ et de premiers termes 1 et 2.

On obtient de plus que $\mathcal{L}(F) = L_{\frac{1+\sqrt{5}}{2}}$.

*Remarque.* Si $(d_n)_n$ est récurrente linéaire d'ordre $k+1$, le fait que les coefficients $a_0, \dots, a_k$ vérifient $\forall n < k$, $(a_{n+1}, \dots, a_k) \leq_{\text{lex}} (a_0, \dots, a_{k-n-1})$ n'est pas une condition nécessaire pour avoir la régularité de $\mathcal{L}(d)$.

En effet, soit $(d_n)_n$ donnée par : $\forall n \geq 1$, $d_{n+1} = d_n + 2d_{n-1}$, et $(d_0, d_1) = (1, 2)$. C'est la base du système binaire, dont le langage est évidemment régulier, et pourtant $(a_0, a_1) = (1, 2)$.

Certes la récurrence "minimale" vérifiée par cette échelle de numération $(d_{n+1} = 2d_n)$ satisfait bien à la condition sur les coefficients du théorème 4. Il serait donc intéressant d'exhiber un "véritable" contre-exemple à la nécessité de cette condition ou de s'interroger sur le problème suivant : existe-t' il une échelle $(d_n)_n$ fournissant un langage régulier telle qu'aucune récurrence satisfaite par $(d_n)_n$ ne vérifie la condition du théorème 4 ?

**Remarque : nombres de Pisot**

Dans [Sh 1], J. Shallit avait obtenu la régularité de $\mathcal{L}(d)$ en supposant que les coefficients $a_i$ vérifiaient $a_0 \geq a_1 \geq \cdots \geq a_k \geq 1$, sans faire aucune hypothèse sur les premiers termes de la suite $(d_n)_n$. Cela dit, le nombre réel $\beta > 1$ de $\beta$-développement $(a_0, a_1, \dots, a_k, 0, 0, \dots)$ est alors un nombre de Pisot, comme l'a prouvé Brauer [Br].

Le théorème 4 impose des conditions supplémentaires sur les premiers termes de la base de numération pour conclure à la reconnaissabilité du langage associé, cependant il permet d'affirmer que $\mathcal{L}(d)$ est reconnaissable dans des cas où le réel $\beta$ associé n'est pas un nombre de Pisot comme le montre l'exemple ci-après (mais c'est de toutes façons un nombre de Perron, cf. [Li]) :

*Exemple 3* : soit $(d_n)_n$ vérifiant la récurrence : $d_{n+1} = 3d_n + 2d_{n-1} + 3d_{n-3}$, $n \geq 3$.

La racine $\beta > 1$ de $P(X) = X^4 - 3X^3 - 2X^2 - 3$ n'est pas un nombre de Pisot, ($\beta > 3$ possède un conjugué $< -1$) mais il suffit de choisir $(d_0, d_1, d_2, d_3) = (1, 4, 15, 54)$ pour obtenir, grace au théorème 4, un langage $\mathcal{L}(d)$ reconnaissable par automate.

La question se pose de savoir si, dans certains cas, le choix des premiers $d_i$ est déterminant pour obtenir un langage reconnaissable; nous en parlerons au paragraphe 5.

## 4. $*$-récurrence à coefficients ultimement périodiques

Le corollaire 1 (§ IV.2) permet de construire des suites récurrentes à coefficients non plus seulement dans $\mathbf{N}$ mais dans $\mathbf{Z}$ et dont le langage est régulier; pour cela, il suffit qu'elles soient aussi $*$-récurrentes de coefficients $(a_n)_n$ où $(a_n)_n$ est une suite d'entiers naturels ultimement périodique, comme l'exposent la proposition suivante et, de manière plus constructive, le corollaire 3 :

PROPOSITION 3. *Soit une suite $(d_n)_n$ récurrente linéaire de coefficients $(\alpha_0, \ldots, \alpha_k) \in \mathbf{Z}^{k+1}$.*

*S'il existe deux entiers non nuls $p$ et $q$ tels que :*

*i) $p + q = k + 1$,*

*ii) le système*

$$\begin{cases} \alpha_0 = & x_0 \\ \alpha_1 = & x_1 \\ \vdots & \\ \alpha_{p-2} = & x_{p-2} \\ \alpha_{p-1} = & x_{p-1} + 1 \\ \alpha_p = & x_p - x_0 \\ \vdots & \\ \alpha_k = & x_k - x_{q-1} \end{cases}$$

*admette une solution positive $(a_0, a_1, \ldots, a_k)$ telle que la suite $(a_0, a_1, \ldots, a_k, 0, 0, \ldots)$ vérifie la condition $(*)$ de Parry,*

*et si pour $n = 0 \ldots k-1$,* $\quad d_{n+1} = \sum_{j=0}^{n} a_j d_{n-j} + 1$,

*alors $\mathcal{L}(d)$ est régulier.*

*Preuve.*

Tout d'abord montrons que la suite $(d_n)_n$ est $*$-récurrente de coefficients $(a'_n)_n$ où $(a'_n)_n$ désigne la suite ultimement périodique $(a_0, \ldots, a_q, \ldots, a_k, a_q, \ldots, a_k, \ldots)$ par une récurrence sur $n > k$.

Au rang $k+1$,

$$\begin{aligned} d_{k+1} &= a_0 d_k + \cdots + a_{p-2} d_{k-p+2} + (a_{p-1}+1) d_{n-p+1} + (a_p - a_0) d_{k-p} + \cdots + (a_k - a_{q-1}) d_0 \\ &= a_0 d_k + \cdots + a_{p-1} d_{k-p+1} + (a_0 d_{k-p} + \cdots + a_{k-p} d_0 + 1) + a_p d_{k-p} + \cdots + a_k d_0 \\ &\qquad - (a_0 d_{k-p} + \cdots + a_{q-1} d_0) \\ &= a_0 d_k + \cdots + a_k d_0 + 1 \\ &= a'_0 d_k + \cdots + a'_k d_0 + 1. \end{aligned}$$

Supposons que pour tout $m$ tel que $k < m \leq n$, $d_m = \sum_{i=0}^{m} a'_i d_{m-i} + 1$; alors

$$\begin{aligned} d_{n+1} &= \alpha_0 d_n + \cdots + \alpha_k d_{n-k} \\ &= a_0 d_n + a_{p-1} d_{n-p+1} + a_p d_{n-p} + \cdots + a_k d_{n-k} + (d_{n-p+1} - a_0 d_{n-p} - \cdots - a_{q-1} d_{n-k}) \\ &= a_0 d_n + \cdots + a_k d_{n-k} + \sum_{i=q}^{n-p} a'_i d_{n-p-i} + 1 \\ &= \sum_{i=0}^{n} a'_{n-i} d_i + 1. \end{aligned}$$

D'où le résultat par récurrence, car $(a'_n)_{n \geq 0}$ vérifie la condition $(*)$.

Le corollaire 1 du § IV.2 permet de conclure à la reconnaissabilité de $\mathcal{L}(d)$.
■

*Remarque.* A priori il peut y avoir plusieurs solutions $(a_0, \ldots, a_k)$ au système de paramètres $(\alpha_0, \ldots, \alpha_k) \in \mathbf{Z}^{k+1}$, puisque l'on a un choix à faire sur l'entier $p$, mais notons que la condition $(*)$ que l'on impose pour la suite $(a_0, \ldots, a_k, 0, 0, \ldots)$ implique sur $p$ :

$$\alpha_0, \ldots, \alpha_{p-2} \geq 0, \quad \alpha_{p-1} \geq 1 \ \text{ et } \ (\alpha_p, \alpha_{p+1}, \ldots, \alpha_k) <_{\text{lex}} (0, 0, \ldots, 0).$$

Ce qui signifie que l'entier $p$, s'il existe, est en fait déterminé de manière univoque. Reste ensuite à savoir si la solution obtenue satisfait bien à la condition $(*)$ et aux conditions définies par les premiers termes de l'échelle de numération !

*Exemple 4 :* soit la récurrence $d_{n+1} = 3d_n + 3d_{n-1} + d_{n-3} - 2d_{n-4}$.
Il y a une solution au système de paramètres $(3,3,0,1,-2)$ : $[(3,3,0,0,1)$ avec $(p,q) = (4,1)]$
Donc la famille de premiers termes suivante $(1,4,16,61,232)$ fournit une suite $*$-récurrente de coefficients $(3,3,0,0,1,3,0,0,1,\dots)$ donc une échelle de numération à langage régulier.

Dans la pratique, si l'on se donne une suite d'entiers naturels ultimement périodique vérifiant la condition $(*)$, par exemple $(a_n)_n = (3,3,1,2,1,2,\dots)$, on obtient une suite $(d_n)_n$ récurrente linéaire d'ordre 4 $(= 2+2)$ à coefficients dans $\mathbf{Z}$, de la façon suivante :

$$\begin{aligned} d_{n+1} &= 3d_n + (3+1)d_{n-1} + (1-3)d_{n-2} + (2-3)d_{n-3} \\ &= 3d_n + 4d_{n-1} - 2d_{n-2} - d_{n-3} \end{aligned}$$

En choisissant $(d_0, d_1, d_2, d_3) = (1,4,16,62)$, on obtient un langage reconnaissable.
Plus généralement,

COROLLAIRE 3. *Soit une suite d'entiers ultimement périodique* $(a_0, \dots, a_{q-1}, a_q, \dots, a_{q+p-1}, a_q, \dots)$ *vérifiant la condition $(*)$. L'échelle de numération $(d_n)_n$ définie par :*

$$\begin{aligned} \forall n \geq q+p-1,\ d_{n+1} = a_0 d_n + \cdots + a_{p-2}d_{n-p+2} + (a_{p-1}+1)d_{n-p+1} + \\ (a_p - a_0)d_{n-p} + \cdots + (a_{q+p-1} - a_{q-1})d_{n-q-p+1}, \end{aligned}$$

$$\forall n < q+p-1, \quad d_{n+1} = \sum_{j=0}^{n} a_j d_{n-j} + 1,$$

*est la base d'un système de numération dont le langage est régulier.*

## 5. suites arithmético-géométriques

THÉORÈME 5. *Soit $(d_n)_n$ une suite d'entiers naturels arithmético-géométrique de coefficients $a$ et $b$ dans $\mathbf{Z}$ (i.e. $\forall n \geq 0,\ d_{n+1} = ad_n + b$) et de premier terme $d_0 = 1$. $(d_n)_n$ est la base d'un système de numération dont le langage est régulier si et seulement si $(a > 1$ et $b \geq 0)$ ou $(a = 1$ et $b \geq 1)$.*

*Preuve.*

Pour que $(d_n)_n$ soit une échelle de numération il faut et il suffit qu' elle soit strictement croissante, ce qui, dans ce cas, est équivalent à $a+b>1$ et $a>0$. Donc si $a=1$ la condition s'écrit $b\geq 1$ et si $a>1$, elle devient $b>1-a$.

$*$ le cas ($b=0$ et $a>1$) est trivial, c'est la base $a$.

$*$ si $b\geq 1$, avec $a\geq 1$, remarquons au préalable que pour tout entier $i\geq 1$, $n_0d_0+\cdots+n_id_i<ad_i+b\Longrightarrow(n_i<a)$ ou ($n_i=a$ et $n_{i-1}=\cdots=n_1=0$ et $n_0<b$),

ou encore $n_0d_0+\cdots+n_id_i<ad_i+b\Longrightarrow(n_i,n_{i-1},\ldots,n_0)\leq_{\text{lex}}(a,0,\ldots,0,b-1)$; en effet, puisque $d_i>b$, on a : $n_id_i<ad_i+b<(a+1)d_i$ donc $n_i\leq a$ et $n_i=a$ implique que $n_0d_0+\cdots+n_{i-1}d_{i-1}<b$.

D'où nécessairement : $n_l=0$ pour $l=1\ldots i-1$ et $n_0<b$.

Par récurrence sur $k$, on obtient :

$$n_k\ldots n_0\in\mathcal{L}(d)\Longleftrightarrow\begin{cases}0\leq n_0<a+b\\ \forall j\leq k-1,\ (n_{j+1},\ldots,n_0)\leq_{\text{lex}}(a,0,0,\ldots,0,b-1).\end{cases}$$

ce qui permet de conclure que $\mathcal{L}(d)$ est reconnu par l'automate $\mathcal{A}_{[a,b]}$ à lecture directe, Fig 2.

$*$ reste le cas $a>1$ et $1-a<b<0$. Nous prouvons que, sous ces hypothèses sur les coefficients, le langage $\mathcal{L}(d)$ n'est jamais reconnaissable. En effet, suivant une méthode de J. Shallit [Sh 2],

$$\begin{aligned}\mathcal{L}(d)\cap(a-1)^*0^*&=\{\,(a-1)^\alpha0^\beta\,;d_{\alpha+\beta}>(a-1)d_{\alpha+\beta-1}+\cdots+(a-1)d_\beta\,\}\\&=\{\,(a-1)^\alpha0^\beta\,;d_\beta>-\alpha b\}\\&=\{\,(a-1)^\alpha0^\beta\,;\alpha<a^\beta(-\tfrac{1}{b}-\tfrac{1}{a-1})+\tfrac{1}{a-1}\}.\end{aligned}$$

Si $\mathcal{L}(d)$ était régulier, cet ensemble devrait l'être aussi, ce qui n'est pas le cas; en effet, supposons qu'il existe un automate $\mathcal{A}$ reconnaissant $\mathcal{L}(d)\cap(a-1)^*0^*$; si l'on note $A_m$ l'état sur lequel on se trouve après avoir lu $m$ "0", alors l'égalité de deux états $A_m$ et $A_{m'}$ signifie que l'on peut lire, après $m$ "0" ou $m'$ "0", le même nombre de "$a-1$". Donc $\left[a^m(-\frac{1}{b}-\frac{1}{a-1})+\frac{1}{a-1}\right]=\left[a^{m'}(-\frac{1}{b}-\frac{1}{a-1})+\frac{1}{a-1}\right]$.

Alors $|a^m(-\frac{1}{b}-\frac{1}{a-1})+\frac{1}{a-1}-a^{m'}(-\frac{1}{b}-\frac{1}{a-1})+\frac{1}{a-1}|<1$, soit $|a^m-a^{m'}|<\frac{1}{C}$ avec $0<C=-\frac{1}{b}-\frac{1}{a-1}<1$, d'où par la formule de Taylor, $|m-m'|<\frac{1}{Ca^m\operatorname{Log}a}$. Ce qui implique une infinité d'états pour l'automate $\mathcal{A}$ et c'est absurde. ∎

COROLLAIRE 4. *Soit $(d_n)_n$ une suite d'entiers naturels vérifiant une relation de récurrence d'ordre 2 du type : $\forall n \geq 1,\ d_{n+1} = (a+1)d_n - ad_{n-1}$, où $a \in \mathbf{Z}$, et de premier terme $d_0 = 1$. Alors $\mathcal{L}(d)$ est régulier si et seulement si $(1 < a \leq d_1)$ ou $(a = 1$ et $d_1 \geq 2)$.*

*Preuve.*

Remarquons qu'en posant $b = d_1 - a$, $(d_n)_n$ est arithmético-géométrique de coefficients $a$ et $b$. ∎

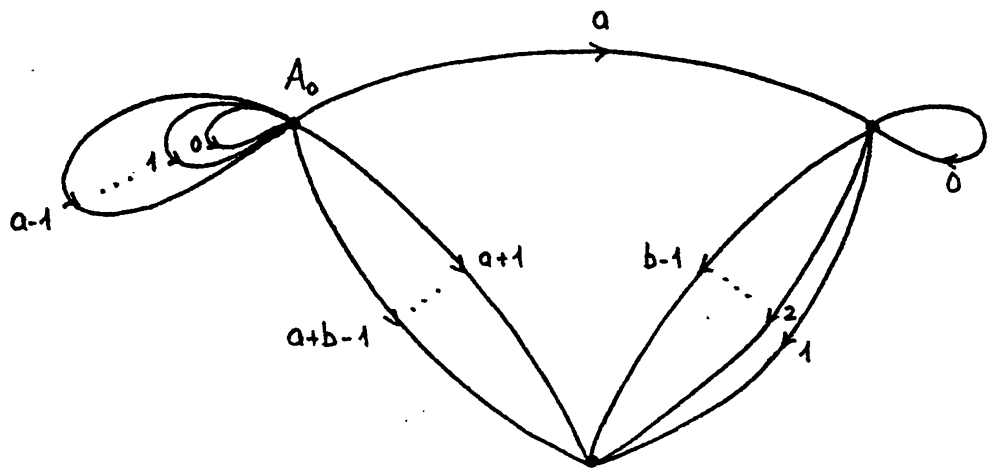


Fig 2

Il apparaît donc que les premiers termes de l'échelle de numération $(d_n)_n$ jouent un rôle *capital* pour la reconnaissabilité de $\mathcal{L}(d)$, *dans la mesure où l'on s'est fixé une relation de récurrence.* En effet, soit la récurrence $d_{n+1} = 4d_n - 3d_{n-1}$. Pour tout $d_1 \geq 3$, $\mathcal{L}(d)$ sera régulier; en revanche, si $d_1 = 2$, ce qui correspond à la suite $(d_n)_n$ définie par : $d_0 = 1$ et $\forall n,\ d_{n+1} = 3d_n - 1$, $\mathcal{L}(d)$ ne sera pas régulier.

La question demeure de savoir si une petite perturbation des premiers termes de l'échelle de numération qui ne se répercuterait pas sur le reste de la suite conserverait la nature du langage de la numération associée, étant entendu que, partant par exemple d'une suite récurrente linéaire à coefficients dans $\mathbf{Z}$, toute échelle obtenue comme décrit ci-dessus qui ne serait pas, à son tour, récurrente linéaire à coefficients dans $\mathbf{Z}$ n'aurait aucune chance de fournir un langage régulier !

## V. Cas particulier des systèmes de numération de Cantor

Soit $(q_n)_n$ une suite d'entiers telle que : $q_0 = 1$ et $q_n \geq 2$, pour tout $n \geq 1$. Soit $(d_n)_n$ la suite définie par : $d_n = q_0 \dots q_n$ , $n \geq 0$.

La suite $(d_n)_n$ est la base d'un système de numération appelé *système de Cantor associé à la suite* $(q_n)_n$ et le langage de cette numération est donné par le lemme classique suivant :

LEMME. $\mathcal{L}(d) = \{ n_k ... n_0 \, ; \forall j \leq k, n_j < q_{j+1} \}$.

Dans ce qui suit, l'on s'intéresse aux bases de Cantor qui sont aussi récurrentes linéaires à coefficients dans $\mathbf{Z}$.

THÉORÈME 6. *Soit $(d_n)_n$ la base du système de Cantor associé à la suite d'entiers naturels $(q_n)_n$. Les assertions suivantes sont équivalentes :*

*i) le langage $\mathcal{L}(d)$ est reconnaissable par automate;*

*ii) la suite $(q_n)_n$ est ultimement périodique;*

*iii) la série $\sum_{n=0}^{+\infty} d_n X^n$ est* **N***-rationnelle;*

*iv) la suite $(d_n)_n$ est récurrente linéaire à coefficients dans* **Z**.

*Preuve.*

Les implications i) $\Longrightarrow$ iii) et iii) $\Longrightarrow$ iv) sont une conséquence directe de la proposition 2 et d'un résultat classique rappelé au paragraphe IV.

Montrons ensuite que iv) $\Longrightarrow$ ii) : soit donc $(d_n)_n$ base de Cantor vérifiant la récurrence :

$d_{n+1} = p_0 d_n + p_1 d_{n-1} + \cdots + p_k d_{n-k}, \forall n \geq k$, avec $(p_0, \dots, p_k) \in \mathbf{Z}^* \times \mathbf{Z}^{k-1} \times \mathbf{Z}^*$.

Ce qui s'écrit : $q_{n-k+1} \cdots q_{n+1} = p_0 q_{n-k+1} \cdots q_n + \cdots + p_{k-1} q_{n-k+1} + p_k$.

D'où pour tout $n$, $q_{n-k+1}$ divise $p_k$ et l'ensemble des valeurs de la suite $(q_n)_n$ est fini.

Considérons les mots de longueur $k$ sur l'alphabet fini $\mathrm{Val}\{(q_n)_n\}$. Me nombre de blocs $q_{n-k+1} ... q_n$, avec $n \geq k-1$, est alors fini et il existe $n$ et $m$ entiers $\geq k-1$ tels que : $q_{n-k+1} ... q_n = q_{m-k+1} ... q_m$. Par conséquent, pour tout $i \geq 1$, $q_{n+i} = q_{m+i}$ donc $(q_n)_n$ est ultimement périodique.

Afin de prouver la dernière implication ii) $\Longrightarrow$ i), supposons que la suite $(q_n)_n$ est ultimement périodique i.e. il existe $r$ et $s$ entiers, $s > r$, tels que $q_{r+i} = q_{s+i}$ pour tout $i \geq 0$. Le lemme permet de conclure que $\mathcal{L}(d)$ est reconnu par l'automate à lecture inverse représenté à la Figure 3, ce qui achève la preuve. ∎

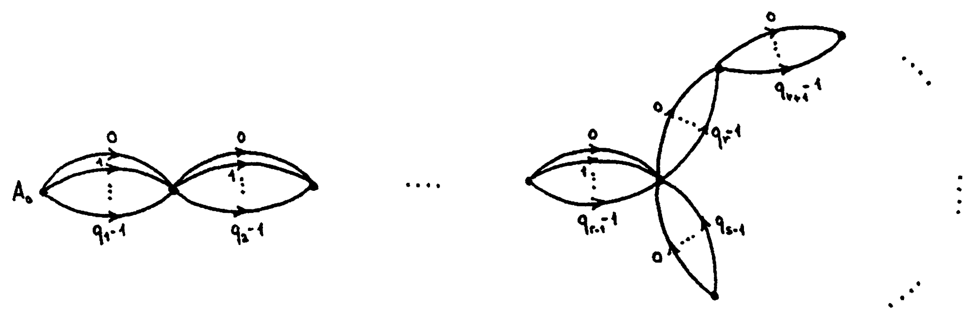

Fig 3

*Exemple 5* : quand on développe les entiers en base $k$, on obtient un langage reconnaissable car dans ce cas $d_{n+1} = kd_n$ i.e $(q_n)_n$ est la suite constante $(k)_n$.

La représentation factorielle ne fournit pas, quant à elle, un langage régulier; en effet, $d_{n+1} = (n+1)d_n$ et $(q_n)_n = (n+1)_n$ n'est pas une suite ultimement périodique.

La recherche parmi les systèmes de Cantor de ceux qui sont associés à un $\beta$-shift conduit à une classe très restreinte de solutions, à savoir :

PROPOSITION 4. *Les seules bases de numération de Cantor associées à un $\beta$-shift sont les bases entières : $d_n = k^n$, $n \in \mathbf{N}$, $k \geq 2$; dans ce cas $\beta = k$.*

*Preuve.*

Remarquons que le système dynamique associé au langage $\mathcal{L}(d)$ avec :

$\mathcal{L}(d) = \{ n_k ... n_0 \,;\, \forall j \leq k,\, n_j < q_{j+1} \}$ est $\sigma$-invariant si et seulement si $\forall j,\ q_{j+1} = q_{j+2}$, soit $\exists k \in \mathbf{N},\ k \geq 2,\ d_n = k^n$; alors $d(\beta, \beta) = (k, 0, 0, \dots)$, soit $\beta = k$. La vérification est immédiate. ∎

## VI. Étude des systèmes de numération d'Ostrowski

Soit un nombre irrationnel $\alpha > 1$. On note $\Delta(\alpha) = [a_0; a_1, a_2, \ldots]$ son développement en fraction continue.

Pour tout $n \geq 0$, $\dfrac{p_n(\alpha)}{q_n(\alpha)}$ désigne le $n$ ième convergent de

$$\alpha : \frac{p_n}{q_n} = [a_0; a_1, \ldots, a_n]$$

et l'on a pour les deux suites $(q_n)_{n \geq 0}$ et $(p_n)_{n \geq 0}$ les relations de récurrence classiques :

$$q_0 = 1 \; ; \; q_1 = a_1 \quad \text{et} \quad \forall n \geq 2, \; q_n = a_n q_{n-1} + q_{n-2};$$
$$p_0 = a_0 \; ; \; p_1 = a_1 a_0 + 1 \quad \text{et} \quad \forall n \geq 2, \; p_n = a_n p_{n-1} + p_{n-2}.$$

Si $\alpha > 1$, la suite $Q_\alpha = (q_n(\alpha))_n$ est strictement croissante, de premier terme 1. Pour $1 < \alpha < 2$, la suite $P_\alpha = (p_n(\alpha))_n$ est aussi strictement croissante, de premier terme 1, d'où l'on peut considérer le système de numération de base $Q_\alpha$ et, si $\alpha < 2$, celui de base $P_\alpha$, et les langages associés sont donnés par le lemme suivant :

LEMME [Os]. *Si $\alpha > 1$ est un nombre réel de développement $\Delta(\alpha) = [a_0; a_1, a_2, \ldots]$, alors*

$$\mathcal{L}(Q_\alpha) = \{\, n_k \ldots n_0 \,;\, \forall j \leq k, \, (0 \leq n_j < a_{j+1}) \text{ ou } (n_j = a_{j+1} \text{ et } n_{j-1} = 0) \,\};$$

Si de plus $\alpha < 2$, $\mathcal{L}(P_\alpha) = \{\, n_k \ldots n_0 \,;\, \forall j \leq k, \, 0 \leq n_j \leq a_{j+1} \text{ et } n_{j+1} = a_{j+2} \Rightarrow n_j = 0 \,\}$.

Le système de numération de base $Q_\alpha$ est appelé *système de numération d'Ostrowski relatif au nombre réel* $\alpha$, [Os].

Le problème de la reconnaissabilité est totalement résolu pour ces langages. J. Shallit a obtenu une caractérisation des nombres réels $\alpha$ fournissant un langage $\mathcal{L}(Q_\alpha)$ régulier mais il est possible de retrouver ce résultat de façon simple comme cela sera exposé dans la preuve qui suit. Il en résulte que, de même que dans le cas des systèmes de Cantor, la condition nécessaire de récurrence linéaire à coefficients dans $\mathbf{Z}$ sur une échelle de numération à langage reconnaissable est aussi suffisante :

THÉORÈME 7. *Soit $Q_\alpha$ la suite des dénominateurs des convergeants d'un nombre réel $\alpha > 1$. Les assertions suivantes sont équivalentes :*

*i) $\mathcal{L}(Q_\alpha)$ est reconnaissable par automate;*

*ii) $\Delta(\alpha)$ est ultimement périodique;*

*iii) $\alpha$ est un nombre quadratique;*

*iv) $Q_\alpha$ est récurrente linéaire à coefficients dans $\mathbf{Z}$.*

*Preuve.*

Bien que non nécessaire à la démonstration du théorème dans sa globalité (car il suffirait d'étudier la suite d'implications i) $\Longrightarrow$ iv) $\Longrightarrow$ iii) $\Longrightarrow$ ii) $\Longrightarrow$ i)), nous prouvons au préalable l'équivalence entre i) et ii) comme annoncé :

supposons que $\mathcal{A} = (S, \Phi, A_0)$ soit un automate reconnaissant le langage $\mathcal{L}(Q_\alpha)$ et soit $w$ un mot de $\mathcal{L}(d)$ de longueur $|w|$ strictement supérieure au nombre d'états de $\mathcal{A}$.

Alors il existe deux entiers $i$ et $j$, $i < j < |w|$ tels que $\Phi_{w_i \dots w_0}(A_0) = \Phi_{w_j \dots w_0}(A_0) = A \in S$.

Si $w_i \neq 0$ et $w_j \neq 0$, les mots $w_i \dots w_0$ et $w_j \dots w_0$ de longueurs respectives $i+1$ et $j+1$ doivent pouvoir se prolonger dans $\mathcal{L}(d)$ en les mots $xw_i \dots w_0$ et $yw_j \dots w_0$ si et seulement si $x \in \{0, 1, \dots, a_{i+2}-1\}$ et $y \in \{0, 1, \dots, a_{j+2}-1\}$. D'autre part, $xw_i \dots w_0$ et $yw_j \dots w_0$ sont reconnus par l'automate $\mathcal{A}$ si et seulement si $x$ et $y$ sont une étiquette d'une flèche partant de $A$.

Conclusion : $a_{j+2} = a_{i+2}$. En réitérant ce procédé, on obtient que $(a_n)_n$ est ultimement périodique.

Si $w_i = 0 = w_j$, un raisonnement analogue permet de conclure.

Si maintenant $w_i = 0$ et $w_j \neq 0$, alors il existe une flèche partant de $A$ étiquettée par une lettre $a \neq 0$; en effet, le mot $0w_{i-1} \dots w_0$ doit pouvoir se prolonger à gauche par toute lettre $\leq a_{i+1}$ où $a_{i+1} \geq 1$. Donc les mots $a0w_{i-1} \dots w_0$ et $aw_j \dots w_0$ sont dans le langage $\mathcal{L}(d)$ et vérifient :

$\Phi_{a0w_{i-1} \dots w_0}(A_0) = \Phi_{aw_j \dots w_0}(A_0) = \Phi(A) = A'$; on se retrouve dans le premier cas (car $a \neq 0$).

D'où l'ultime périodicité de la suite $(a_n)_n$, et celle de $\Delta(\alpha)$.

L'implication réciproque découle du fait que si $(a_n)_n = (a_0, a_1, \dots, a_p, \dots, a_{r-1}, a_p, \dots, a_{r-1}, \dots)$ est ultimement périodique alors $\mathcal{L}(Q_\alpha)$ est reconnu par l'automate $\mathcal{A}_{Q_\alpha}$ à lecture inverse dessiné à la Figure 4. Détail laissé au lecteur.

L'équivalence ii) $\Longleftrightarrow$ iii) est un résultat bien connu de la théorie des fractions continues.

Enfin les deux propositions iii) et iv) sont équivalentes d'après une démonstration de Shallit et Lenstra faite dans [L-S]. ■

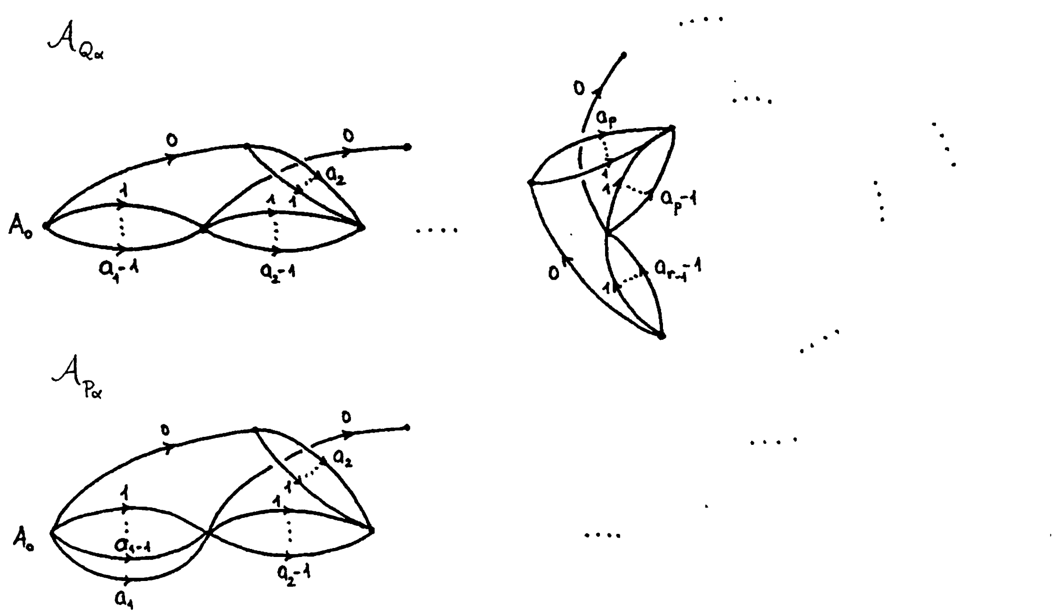


Fig 4

*Remarque.* Si $1 < \alpha < 2$, l'assertion *i') $\mathcal{L}(P_\alpha)$ est reconnaissable par automate* est équivalente aux quatre autres du théorème 7.

(On obtient de même que pour $\mathcal{L}(Q_\alpha)$ que $\mathcal{L}(P_\alpha)$ est reconnu par l'automate $\mathcal{A}_{P_\alpha}$ de la Figure 4).

Étant donné un nombre réel $\alpha > 1$, on peut définir d'une part le langage $\mathcal{L}(Q_\alpha)$ du système de numération d'Ostrowski associé à $\alpha$ et d'autre part le langage $L_\alpha$ du $\alpha$-shift. On peut se demander s'il est possible que ces deux langages coïncident, pour certaines valeurs de $\alpha$. La réponse est négative, "sauf pour $\alpha = \frac{1+\sqrt{5}}{2}$", mais il existe néanmoins une famille de nombres réels $\alpha$ dont le langage $\mathcal{L}(Q_\alpha)$ est celui d'un $\beta$-shift; le cas des langages $\mathcal{L}(P_\alpha)$ est étudié également et ces résultats sont regroupés dans la proposition suivante :

PROPOSITION 5. *Soit $T_k$ le polynôme $X^2 - kX - 1$, $k \in \mathbf{N}^*$ et $\theta_k$ sa racine dominante.*

*i) L'équation $\mathcal{L}(Q_\alpha) = L_\beta$ admet, en $(\alpha, \beta)$, les solutions $(p + \frac{1}{\theta_k+1}, \theta_k)$ où $p$ décrit $\mathbf{N}^*$.*

*ii) $L_{\theta_k} = \mathcal{L}(Q_{\theta_k}) \cup \mathcal{L}(Q_{\theta_k}) * k$ , $\forall k \geq 2$ (où $*$ représente l'opération de concaténation).*

*iii) $L_{\frac{1+\sqrt{5}}{2}} = \mathcal{L}(Q'_{\frac{1+\sqrt{5}}{2}})$ (où $Q' = (q'_n)_n$ désigne la suite shiftée $(q_{n+1})_n$).*

*iv) l'équation $\mathcal{L}(P_\alpha) = L_\beta$ admet les solutions $(1 + \frac{1}{\theta_k}, \theta_k)$ en $(\alpha, \beta)$.*

*Preuve.*

On note $\Delta(\alpha) = [a_0; a_1, a_2, \dots]$ et $d(\beta, \beta) = (b_n)_n$ (exceptionnellement!).

i) : l'égalité des langages signifie l'équivalence des propriétés caractéristiques, à savoir :

(pour un mot de longueur 1)

$$n_0 < a_1 \Longleftrightarrow n_0 \leq b_0^* \text{ c'est à dire } b_0^* = a_1 - 1.$$

(pour un mot de longueur 2)

$$n_1 < a_2 \text{ ou } (n_1 = a_2 \text{ et } n_0 = 0) \Longleftrightarrow n_1 < b_0^* \text{ ou } (n_1 = b_0^* \text{ et} n_0 \leq b_1^*)$$

soit $a_2 = b_0^*$ et $b_1^* = 0$.

(pour un mot de longueur $l$ quelconque)

$$\begin{pmatrix} (n_l, \dots, n_0) \leq_{\text{lex}} (b_0^*, \dots, b_l^*) \\ \text{et } n_{l-1} \dots n_0 \in L_\beta \end{pmatrix} \Longleftrightarrow \begin{pmatrix} n_l < a_{k+1} \text{ ou } n_l = a_{l+1} \text{ et } n_{l-1} = 0 \\ \text{et } n_{l-1} \dots n_0 \in \mathcal{L}(Q_\alpha) \end{pmatrix}$$

i.e. $a_{l+1} = b_0^*$ et puisque $b_1^* = 0$, la condition $(n_{l-2}, \dots, n_0) \leq_{\text{lex}} (b_2^*, \dots, b_l^*)$ ne doit pas être restrictive, soit $(b_0^*, \dots, b_{l-2}^*) \leq_{\text{lex}} (b_2^*, \dots, b_l^*)$. Or $(b_n)_n$ étant un $\beta$-développement, on est assuré de l'inégalité (large) inverse, par conséquent $(b_0^*, \dots, b_{l-2}^*) = (b_2^*, \dots, b_l^*)$; ce qui signifie :

$$b_0^* = b_2^* = \dots = b_{2i} = a_1 - 1 \text{ et } b_1^* = b_3^* = \dots = b_{2i+1} = 0.$$

En posant $p = a_0$ et $k = a_1 - 1$ on trouve $\beta = \theta_k$ et $\alpha = p + \frac{1}{\theta_k+1}$ car $d(\beta,\beta) = (k,1,0,0,\dots)$ et $\Delta(\alpha) = (p;k+1,k,k,k,\dots)$.

ii) : le langage $L_{\theta_k}$ est associé à la numération $(d_n)_n$ avec $d_0 = 1,\ d_1 = k+1$ et $d_{n+1} = kd_n + d_{n-1}$. D'autre part, $(q_n(\theta_k))_n$ vérifie $q_0 = 1,\ q_1 = k$ et $q_{n+1} = kq_n + q_{n-1}$. D'où la suite d'équivalences

$$n_l...n_0 \in L_{\theta_k} \iff \begin{cases} n_0 < k+1 \\ \forall j \leq l,\ n_j < k \text{ ou } n_j = k \text{ et } n_{j-1} = 0 \end{cases}$$

$$\iff n_l...n_0 \in \mathcal{L}(q_{\theta_k}) \text{ ou } \begin{cases} n_0 = k \\ n_1 < k \\ \forall j,\ 2 \leq j \leq l,\ n_j < k \text{ ou } n_j = k \text{ et } n_{j-1} = 0 \end{cases}$$

$$\iff n_l...n_0 \in \mathcal{L}(Q_{\theta_k}) \text{ ou } (n_l...n_1 \in \mathcal{L}(q_{\theta_k}) \text{ et } n_0 = k)$$

*Remarque.* Si $k = 1$, $\theta_1 = \frac{1+\sqrt{5}}{2}$, la suite $(q_n(\frac{1+\sqrt{5}}{2}))_n$ n'est pas strictement croissante car $q_1 = 1$. On utilise alors sa "shiftée" $(q'_n(\frac{1+\sqrt{5}}{2}))_n = \sigma(q_n(\frac{1+\sqrt{5}}{2}))_n$.

iii) : on a déja vu que $L_{\frac{1+\sqrt{5}}{2}} = \mathcal{L}(F)$ et la suite $Q'_{\frac{1+\sqrt{5}}{2}}$ est égale à la suite $F$.

iv) : pour parler du langage $\mathcal{L}(P_\alpha)$, il faut que $[\alpha] = 1 = a_0$. Le même raisonnement qu'en i) fournit un résultat analogue : $\Delta(\alpha) = [1;k,k,k,\dots]$ donc $\alpha = 1 + \frac{1}{\theta_k}$ et $\beta = \theta_k$. ∎

**Remerciements.**

Je tiens à remercier tout particulièrement P. Liardet pour ses nombreux conseils et pistes de réflexion.

J-P. Allouche, J-M. Dumont et P-J. Grabner ont eu la gentillesse de s'intéresser à ce travail. Je les remercie de leurs remarques et de l'aide qu'ils m'ont apportée.

**Références.**

[Be 1] : A. Bertrand, Comment écrire les nombres entiers dans une base qui n'est pas entière. *à paraître dans Acta. Math. Acad. Sci. Hungar.*

[Be 2] : A. Bertrand, Questions diverses relatives aux systèmes codés : applications au $\theta$-shift. *Preprint*

[Be 3] : A. Bertrand, Nombres de Perron et problèmes de rationnalité. *S. M. F.* (1991), 198–200.

[Be 4] : A. Bertrand, Le $\theta$-shift sans peine. *en préparation.*

[Be 5] : A. Bertrand, Développement en base $\theta$, répartition modulo un de la suite $(x\theta^n)_{n\geq 0}$, langages codés et $\theta$-shift. *Bull. Soc. math. France* **114** (1986), 271–323.

[Bl] : F. Blanchard, $\beta$-expansions and symbolic dynamics. *Theoret. Comput. Sci.* **65** (1989), 131–141.

[Br] : A. Brauer, On algebraic equations with all but one root in the interior of the unit circle. *Math. Nachr.* **4** (1951), 250–257.

[Co] : A.Cobham, Uniform tag sequences. *Math. Syst. Theory* **6** (1972), 164–192.

[Fr 1] : A. S. Fraenkel, Systems of numeration. *Amer. Math. Monthly* **92** (1985), 105–114.

[Fr 2] : A. S. Fraenkel, The use and usefulness of numeration systems. *Inform. and Comput.* **81** (1989), 46–61.

[Fro 1] : C. Frougny, Representations of numbers and finite automata. *Math. Syst. Theory* **25** (1992), 37–60.

[Fro 2] : C. Frougny, Linear Numeration Systems of Order Two. *Inform. & Comput.* **77** (1988), 233–259.

[Fro 3] : C. Frougny, Systèmes de numération linéaires et $\theta$-représentations. *Theoret. Comput. Sci.* **94** (1992), 223–236.

[F-So] : C. Frougny, B. Solomyak, Finite $\beta$-expansions. *Ergod. Th. & Dynam. Sys.* **12** (1992), 713–723.

[G-L-T] : P.J. Grabner, P. Liardet et R.F. Tichy, Odometers and systems of numerations. *Acta Arith. to appear.*

[G-T 1] : P.J. Grabner, R.F. Tichy, Contributions to Digit Expansions with Respect to Linear Recurrences. *J. Number Th.* **36** (1990), 160–169.

[G-T 2] : P.J. Grabner, R.F. Tichy, $\alpha$-expansions, Linear recurrences and the Sum-of-Digits Function. *Manuscripta Math.* **70** (1991), 311–324.

[I-T] : S. Ito and Y. Takahashi, Markov subshifts and realization of $\beta$-expansions. *J. Math. Soc. Japan* **26** 1 (1974), 33–55.

[Li] : D. Lind, The entropies of topological Markov shifts and a related class of algebraic integers. *Ergod. Th. & Dynam. Sys.* **4** (1984), 283–300.

[L-S] : J. Shallit, H. W. Lenstra, Continued fractions and linear recurrences.

*Math. Comp.* **61** (1993), 351–354.

[Os] : A. Ostrowski, Bemerkungen zur Theorie der Diophantishen Approximationene. *Abh. Math. Sem. Hamburg* **1** (1922), 77–98.

[Pa] : W. Parry, On the $\beta$-expansions of real numbers. *Acta Math. Acad. Sci. Hungar.* **11** (1960), 401–416.

[P-T] : A. Pethö, R.F. Tichy, On Digit Expansions with Respect to Linear Recurrences. *J. Number Th.* **33** (1989), 243–256.

[Re] : A. Reńyi, Representations for real numbers and their ergodic properties. *Acta Math. Ac. Sci. Hungar.* **8** (1957), 477–493.

[Sc] : K. Schmidt, On periodic expansions of Pisot numbers and Salem numbers. *Bull. London Math. Soc.* **12** (1980), 269–278.

[Sh 1] : J. Shallit, A generalization of automatic sequences. *Theoret. Comput. Sci.* **61** (1988), 1–16.

[Sh 2] : J. Shallit, Numeration Systems, Linear Recurrences, and Regular Sets. *Inform. and comput. to appear*

Nathalie LORAUD
CMI Chateau-Gombert URA 225
Laboratoire de Dynamique Stochastique
et Algorithmique
39, rue Joliot Curie
13453 Marseille cedex 13
e-mail : loraud@gyptis.univ-mrs.fr