

JOHN BOXALL

## **Une propriété des hauteurs locales de Néron-Tate sur les variétés abéliennes**

*Journal de Théorie des Nombres de Bordeaux*, tome 7, n° 1 (1995), p. 111-119

[http://www.numdam.org/item?id=JTNB\\_1995\\_\\_7\\_1\\_111\\_0](http://www.numdam.org/item?id=JTNB_1995__7_1_111_0)

© Université Bordeaux 1, 1995, tous droits réservés.

L'accès aux archives de la revue « Journal de Théorie des Nombres de Bordeaux » (<http://jtnb.cedram.org/>) implique l'accord avec les conditions générales d'utilisation (<http://www.numdam.org/conditions>). Toute utilisation commerciale ou impression systématique est constitutive d'une infraction pénale. Toute copie ou impression de ce fichier doit contenir la présente mention de copyright.

NUMDAM

Article numérisé dans le cadre du programme  
Numérisation de documents anciens mathématiques

<http://www.numdam.org/>

## Une propriété des hauteurs locales de Néron-Tate sur les variété abéliennes

par John BOXALL

### Introduction

Soit  $K$  un corps de nombres, soit  $\overline{K}$  une clôture algébrique de  $K$  et soit  $A$  une variété abélienne définie sur  $K$ . Le célèbre théorème de Mordell-Weil affirme que le groupe abélien  $A(K)$  est de type fini; cette assertion avait été démontrée par Mordell [Mo] en 1922 lorsque  $K = \mathbf{Q}$  et  $A$  est de dimension un. Bientôt après, Weil a étendu le résultat aux jacobiniennes des courbes propres et lisses de genre  $\geq 1$  définies sur un corps de nombres. Jusqu'ici, toutes les démonstrations connues reposent sur la notion de hauteur d'un point dans un espace projectif:— cette notion mesure la complexité arithmétique d'un point dans un espace projectif sur un corps de nombres. Cette idée a été poussée beaucoup plus loin par Néron en 1965: à chaque diviseur  $D$  de  $A$  (défini sur  $\overline{K}$ ) Néron a associé une hauteur  $h_D$ :— il s'agit d'une application de  $A(\overline{K})$  à valeurs dans  $\mathbf{R}$  qui s'écrit comme la somme d'une forme quadratique  $q_D$  et d'une forme linéaire  $l_D$ . Parmi les propriétés les plus remarquables de  $h_D$  on peut citer les suivantes:—

(i) Lorsque  $D$  est ample,  $q_D$  s'étend en une forme définie positive sur  $A(K') \otimes \mathbf{R}$  pour toute extension finie  $K'$  de  $K$ ,

(ii) On a:  $q_{[-1]^*D} = q_D$  et  $l_{[-1]^*D} = -l_D$  pour tout diviseur  $D$ . En particulier  $l_D$  est identiquement nulle lorsque  $D$  est symétrique,

(iii) L'application  $D \mapsto h_D$  est un homomorphisme du groupe des diviseurs définis sur  $\overline{K}$  à valeurs dans le groupe additif des fonctions à valeurs réelles sur  $A(\overline{K})$ . Son noyau est le sous-groupe des diviseurs dont un multiple est le diviseur d'une fonction rationnelle sur  $A$ .

On a également  $h_{\sigma D}(\sigma P) = h_D(P)$  pour tout  $\sigma \in \text{Gal}(\overline{K}/K)$ . Comme nous considérons dans toute la suite que  $D$  est fixé, nous supposons désormais que  $D$  est défini sur  $K$  et encore (bien que cela ne soit pas toujours nécessaire) que  $D$  est géométriquement irréductible.

Outre ces propriétés, Néron a établi une décomposition de  $h_D$  comme somme de hauteurs locales. Afin de la décrire, pour tout corps de nombres  $F$  on désignera par  $S_F$  l'ensemble des places (archimédiennes et non-archimédiennes) de  $F$ . Pour tout  $v \in S_F$  on désigne par  $F_v$  le complété de  $F$  en  $v$ . On désigne par  $p_v$  la place de  $\mathbf{Q}$  en dessous de  $v$ :— lorsque  $v$  est une place finie de  $F$  on désigne également par  $p_v$  la caractéristique du corps résiduel de  $F$  en  $v$ . On note  $\overline{F}_v$  une clôture algébrique fixée de  $F_v$ . La hauteur locale de Néron  $h_{D,v}$  associée à une place  $v \in S_K$  est alors une application de  $A(\overline{K}_v) \setminus |D|$  dans  $\mathbf{R}$  et la formule de décomposition de Néron peut s'écrire

$$(0,1) \quad [K : \mathbf{Q}]h_D(P) = \sum_{v \in S_K} [K_v : \mathbf{Q}_{p_v}]h_{D,v}(P) + \kappa_D,$$

où  $\kappa_D$  est une constante et  $P \in A(\overline{K})$  n'appartienne pas à  $|D|$ .

Lorsque  $v$  est une place non-archimédienne où  $A$  a bonne réduction,  $h_{D,v}$  peut être définie ainsi:— soit  $M \subseteq \overline{K}_v$  une extension de  $K_v$  sur lequel le point  $P$  est défini, soit  $\mathfrak{O}_M$  l'anneau de valuation de  $M$ , soit  $\pi_M$  un générateur de l'idéal maximal de  $\mathfrak{O}_M$  (on supposera que l'extension de  $v$  à  $M$  est discrète) et soit  $e_M$  le degré de ramification de  $M$  sur  $\mathbf{Q}_{p_v}$ . Désignons par  $\mathcal{A}_v$  le modèle de Néron sur  $\mathfrak{O}_v$ . D'après les propriétés fondamentales de  $\mathcal{A}_v$ , le point  $P$  s'étend de manière unique en une section  $\mathfrak{O}_M \rightarrow \mathcal{A}_v$  que nous désignerons également par  $P$ . De même, le diviseur  $D$  s'étend en un diviseur de Cartier  $\mathcal{D}_v$  de  $\mathcal{A}_v$ . L'image réciproque de  $\mathcal{D}_v$  par  $P$  s'identifie alors avec un sous  $\mathfrak{O}_M$ -module libre de rang un de  $M$ :— il existe alors un entier  $\eta_M(P, D)$  tel que  $P^*\mathcal{D}_v = \pi_M^{\eta_M(P, D)}\mathfrak{O}_M$ . On a alors

$$(0,2) \quad h_{D,v}(P) = (\log p_v) e_M^{-1} \eta_M(P, D).$$

Remarquons que cette définition ne dépend pas du choix de  $M$ . En outre, comme  $D$  est défini sur  $K$ , alors  $h_{D,v}(\sigma P) = h_{D,v}(P)$  pour tout  $\sigma \in \text{Gal}(\overline{K}/K)$  et pour tout  $P \in A(\overline{K})$ . Les fonctions  $h_{D,v}$  en fait vérifient une liste de propriétés donnée par Néron qui les caractérisent à une constante additive près. Notons que pour  $P$  fixé,  $h_{D,v}(P)$  ne peut être non-nul que pour un nombre fini de  $v$ ; on en tire que la somme dans (0,1) est, en réalité, une somme finie.

Lorsque  $v$  est une place non-archimédienne où  $A$  a mauvaise réduction, cette définition est modifiée en rajoutant une fonction  $\beta$  qui se factorise par le quotient  $\mathcal{A}_v/\mathcal{A}_v^o$ ,  $\mathcal{A}_v^o$  étant la composante neutre de  $\mathcal{A}_v$ . Enfin lorsque  $v$  est archimédienne,  $A/\overline{K}_v$  est isomorphe à un tore complexe  $\mathbf{C}^g/\Lambda_v$  (avec  $\Lambda_v$

un réseau convenable dans  $\mathbf{C}^g$ ) et dans ce cas  $h_{D,v}(P)$  peut être exprimée à l'aide de fonctions thêta associées au diviseur  $D$ . Pour les définitions détaillées, on consultera le travail original de Néron [Né] ou les livres de Lang [La] ou de Serre [Se].

Revenons à la formule (0,1) où il est intéressant de connaître la constante  $\kappa_D$ . Lorsque  $A$  est une courbe elliptique et  $D = [0]$  cette question a été étudiée par Tate dans une lettre à Serre [Ta]. En réalité, dans la formule (0,1) il est commode de décomposer la constante  $\kappa_D$  comme somme de «constantes locales»  $\kappa_{D,v}$  et de remplacer (0,1) par une formule de la forme

$$(0,1') \quad [K : \mathbf{Q}]h_D(P) = \sum_v [K_v : \mathbf{Q}_{p_v}](h_{D,v}(P) + \kappa_{D,v});$$

on peut alors se demander s'il existe un choix des  $\kappa_{D,v}$  qui est plus naturel que les autres. On parle alors de «normalisation» des hauteurs locales. Dans [Ta], Tate a proposé (lorsque  $A$  est une courbe elliptique et  $D = [0]$ ) de telles normalisations. Posons  $\lambda_{D,v} = h_{D,v}(P) + \kappa_{D,v}$ : parmi les caractérisations proposées par Tate figurent les suivantes:

$$(0,3a) \quad \text{si } v \text{ est archimédienne: } \int_{A(\overline{K}_v)} \lambda_{[0],v}(P)d\mu(P) = 0,$$

$\mu$  étant une mesure de Haar sur  $A(\overline{K}_v)$ ;

$$(0,3b) \quad \text{si } v \text{ est finie: } \lim_{N \rightarrow \infty} \frac{1}{N^2} \sum_{0 \neq P \in A[N]} \lambda_{[0],v}(P) = 0,$$

où  $A[N]$  désigne le groupe des points de  $N$ -torsion de  $A$ .

Il est clair que, si l'intégrale et la limite existent, elles déterminent uniquement les  $\kappa_{D,v}$ . L'existence de l'intégrale (0,3a) est facile à établir car la fonction  $\theta_{[0]}(P, \Lambda_v)$  n'a qu'une singularité logarithmique en 0. En ce qui concerne (0,3b), il est également aisé d'établir l'existence de la limite à l'aide des formules explicites données par Tate: on montre notamment que dans le cas de bonne réduction la limite est nulle si l'on suppose  $\kappa_{[0],v} = 0$  (i. e.  $\lambda_{[0],v} = h_{[0],v}$ ). En fait, (0,3b) est valable même lorsque l'on remplace  $[0]$  par un diviseur quelconque, au moins si l'on suppose que la limite soit prise sur les  $N$  premiers à  $p_v$ .

Le but de cet article est d'établir un essai de généralisation de cette dernière observation aux variétés abéliennes de dimension quelconque. Afin d'en donner l'énoncé précis, fixons une place finie  $v$  de  $K$  où  $A$  a bonne réduction et posons  $g = \dim A$ . Notre but est de démontrer la formule suivante:—

THÉORÈME. *Avec les notations et les hypothèses qui viennent d'être introduites, on a :*

$$(0,4) \quad \lim_{\substack{N \rightarrow \infty \\ p_v \text{ ne divise pas } N}} \frac{1}{N^{2g}} \sum_{P \in A[N], P \notin |D|} h_{D,v}(P) = 0.$$

Nous ignorons si la condition que  $p_v$  ne divise pas  $N$  peut être supprimée lorsque  $\dim A > 1$ . En outre, la question de l'existence de la limite (0,4) (et la valeur de l'intégrale analogue à (0,3a) pour les places infinies) reste en suspens pour les places de mauvaises réduction; de même, l'interprétation des valeurs des intégrales analogues à (0,3a) pour les places infinies reste à étudier. Par ailleurs, Hindry [Hi] a récemment démontré que  $\kappa_D$  est liée à la hauteur de  $D$  introduite par Philippon dans son travail [Ph].

Esquissons l'idée de la démonstration du théorème. Pour justifier (0,4), il suffit de considérer le cas où  $D$  est une variété irréductible sur  $K_v$  :— nous aurons besoin alors d'une deuxième interprétation de l'entier  $\eta_M(P, D)$  introduit avant (0,2). Pour tout  $n \in \mathbf{N}$  désignons par  $R_n^{(M)}$  l'anneau artinien local  $\mathfrak{D}_M / \pi_M^{n+1} \mathfrak{D}_M$ . Si  $\mathcal{X}$  est un objet géométrique défini sur  $\mathfrak{D}_M$ , on désigne par  $X_n$  l'objet sur  $R_n^{(M)}$  obtenu à partir de  $\mathcal{X}$  par extension de scalaires à  $R_n^{(M)}$ . L'interprétation envisagée de  $\eta_M(P, D)$  est alors la suivante :— si  $D$  est effectif, alors  $\eta_M(P, D) - 1$  est le plus grand entier  $n$  tel que la section  $P_n$  de  $A_n = \mathcal{A} \times_{\mathfrak{D}_M} R_n^{(M)}$  se factorise par l'inclusion  $D_n \subseteq A_n$ . Soit  $\Sigma$  (resp.  $\Sigma_n$ ) la réunion des groupes  $A[N]$  (resp.  $A_n[N]$ ) des points de  $N$ -torsion de  $A$  (resp.  $A_n$ ) pour tout  $N$  non-divisible par  $p_v$ . On montre, à l'aide d'une idée de Mumford, que le cardinal de  $\Sigma_0 \cap D_0(\bar{k})$  est  $O(N^{2g-2})$  lorsque  $N$  tend vers l'infini. Afin d'en déduire (0,4), il suffit donc de prouver que  $\eta_M(P, D)$  est majoré lorsque  $P$  parcourt  $\Sigma$  avec  $P \notin |D|$ . Comme  $A$  a bonne réduction en  $v$ , tous les éléments de  $\Sigma$  sont définis sur l'extension maximale non-ramifiée  $K_v^{\text{nr}}$  de  $K_v$ . On peut alors prendre  $M = K_v^{\text{nr}}$  et considérer  $R_n^{(M)}$  comme une algèbre locale de type fini sur l'anneau des vecteurs de Witt de longueur  $n$  sur une clôture algébrique  $\bar{k}$  de  $k$ . L'étude des sections sur  $R_n^{(M)}$  peut ainsi être ramenée à l'étude des points rationnels sur  $\bar{k}$  d'une variété abélienne définie sur  $k$  à l'aide du foncteur de Greenberg [Gr] en imitant une technique due à Raynaud [Ra]. Le § 1 est consacré aux rappels sur le foncteur de Greenberg et la démonstration elle-même est l'objet du § 2.

*Dans ce qui suit, la place finie  $v$  étant fixée, nous la supprimerons de la notation: ainsi on écrira désormais  $K$  à la place de  $K_v$ ,  $\mathfrak{D}$  à la place*

de  $\mathcal{D}_v$ ,  $p$  pour la caractéristique du corps résiduel  $k$ ,  $\mathcal{A}$  à la place de  $\mathcal{A}_v$ ,  $M$  pour l'extension maximale non-ramifiée de  $K$  etc. Il n'y aura plus aucune référence directe au corps de nombres  $K$  introduit au début de cette introduction.

Je remercie L Moret-Bailly et le référent de m'avoir signalé une erreur dans une version précédente de ce travail et d'avoir tiré mon attention au résultat de [Mu-Fo] utilisé dans le §2.

### 1. Le foncteur de Greenberg

Le but de ce paragraphe est de rappeler quelques résultats du travail de M. J. Greenberg [Gr]. Soit  $k$  le corps résiduel de  $K$ : pour tout entier  $n \in \mathbb{N}$  on désigne par  $W_n$  le schéma en anneaux des vecteurs de Witt de longueur  $n+1$  sur  $k$ . Rappelons que en tant que schéma,  $W_n$  est  $\text{spec } k[T_0, T_1, \dots, T_n]$  muni de deux lois de composition telles que pour toute extension parfaite  $k'$  de  $k$ ,  $W_n(k')$  s'identifie avec l'anneau des vecteurs de Witt de longueur  $n$  par rapport à  $k'$ . On peut alors considérer  $R_n^{(K)}$  (que l'on désignera désormais tout simplement par  $R_n$ ) comme une  $W_n(k)$ -algèbre de type fini. Le foncteur de Greenberg dont il y est question ici est un foncteur covariant  $X \mapsto \bar{X}$  d'une certaine sous-catégorie pleine **Réel**/ $R_n$  (dont les objets s'appellent les schémas réalisables) de la catégorie des schémas sur  $R_n$  dans la catégorie **Sch**/ $k$  des schémas sur  $k$ . Ce foncteur satisfait aux propriétés suivantes (notre liste est essentiellement la même que celle donnée par Raynaud [Ra]):

**I** Si  $X$  est réalisable, alors  $X(R_n \otimes_{W_n(k)} W_n(k'))$  s'identifie canoniquement avec  $\bar{X}(k')$  pour toute extension parfaite  $k'$  de  $k$ ;

**II** Tout schéma de type fini sur  $R_n$  est réalisable et sa réalisation est de type fini sur  $k$ ;

**III** Si  $X \rightarrow Y$  est une immersion fermée et si  $Y$  est réalisable, alors  $X$  est réalisable et  $\bar{X} \rightarrow \bar{Y}$  est une immersion fermée;

**IV** Si  $S$  est réalisable et si  $X$  et  $Y$  sont deux  $S$ -schémas qui sont réalisables, alors  $X \times_S Y$  est réalisable et sa réalisation est canoniquement isomorphe à  $\bar{X} \times_{\bar{S}} \bar{Y}$ ;

**V** Si  $X$  est un schéma en groupes commutatif, il en est de même pour  $\bar{X}$ ; en plus, si  $f : X \rightarrow Y$  est un homomorphisme de groupes, il en est de même pour  $\bar{f} : \bar{X} \rightarrow \bar{Y}$ ; les groupes  $X(R_n \otimes_{W_n(k)} W_n(k'))$  et  $\bar{X}(k')$  sont alors canoniquement isomorphes pour toute extension parfaite  $k'$  de  $k$ ;

**VI** Si  $X_n \in \mathbf{Réal}/R_n$  alors  $X_{n-r} = X_n \times_{R_n} R_{n-r}$  est réalisable pour tout  $r \leq n$  et il y a une surjection naturelle  $\overline{X}_n \rightarrow \overline{X}_{n-r}$ ; tout morphisme  $f_n : X_n \rightarrow Y_n$  induit un diagramme commutatif:

$$(1,1) \quad \begin{array}{ccc} \overline{X}_n & \xrightarrow{\overline{f}_n} & \overline{Y}_n \\ \downarrow & & \downarrow \\ \overline{X}_{n-r} & \xrightarrow{\overline{f}_{n-r}} & \overline{Y}_{n-r} \end{array}$$

**VII** Si  $X_n$  et  $Y_n$  sont des schémas en groupes et  $f$  est un homomorphisme, alors toutes les flèches dans (1,1) sont des homomorphismes;

Soit  $W_\infty(k')$  l'anneau des vecteurs de Witt de longueur infinie de l'extension parfaite  $k'$  de  $k$ : on peut alors considérer  $\mathfrak{D}$  comme une  $W_\infty(k)$ -algèbre de type fini et il en est de même pour  $W_\infty(k')$  lorsque  $k'$  est une extension finie de  $k$ .

**VIII** Si  $\mathcal{X}$  est un schéma sur l'anneau de valuation  $\mathfrak{D}$  de  $K$  tel que  $X_n = \mathcal{X} \times_{\mathfrak{D}} W_n(k)$  soit réalisable pour tout  $n$ , alors pour toute extension parfaite  $k'$  de  $k$ ,  $\mathcal{X}(\mathfrak{D} \otimes_{W_\infty(k)} W_\infty(k'))$  est en bijection canonique avec  $\varprojlim X_n(R_n \otimes_{W_n(k)} W_n(k'))$  et puis avec  $\varprojlim \overline{X}_n(k')$ , les applications étant les surjections de **VI**;

**IX** Si  $\mathcal{X}$  est un schéma en groupes, les bijections canoniques de **VIII** sont des isomorphismes de groupes.

Notons que selon la propriété **I**, les éléments de  $X(R_n \otimes W_n(k'))$  sont «réalisés» par les points sur  $k'$  de  $\overline{X}$ , ce qui explique la terminologie. En outre, si  $\overline{k}$  désigne une clôture algébrique de  $k$ ,  $\text{Gal}(\overline{k}/k)$  opère sur  $W_n(\overline{k})$  via l'opération naturelle sur  $\overline{k}^{n+1}$  et la bijection standard entre  $W_n(\overline{k})$  et  $\overline{k}^{n+1}$ . En prenant l'action triviale de  $\text{Gal}(\overline{k}/k)$  sur  $R_n$ , on obtient une action de  $\text{Gal}(\overline{k}/k)$  sur  $X(R_n \otimes W_n(\overline{k}))$  et l'on en déduit que la bijection de **I** (lorsque  $k' = \overline{k}$ ) est équivariante pour le groupe de Galois de  $\overline{k}/k$ . De même, si  $M$  désigne l'extension maximale non-ramifiée de  $K$ , alors les groupes de Galois de  $\overline{k}/k$  et de  $M/K$  s'identifient canoniquement et les bijections de **VIII** et les isomorphismes de **IX** sont équivariants.

## 2. Démonstration du théorème

Dans ce paragraphe nous allons donner la démonstration du théorème énoncé dans l'introduction. On supposera toujours que le diviseur  $D$  est

une variété irréductible sur  $K$  car le cas général s'en déduit en utilisant la formule  $\eta_M(P, D \pm D') = \eta_M(P, D) \pm \eta_M(P, D')$ . Reprenons les notations déjà introduites vers la fin de l'introduction: sauf que si  $P \in A(\bar{K})$  alors  $M \subseteq \bar{K}_v$  désigne une extension de  $K_v$  sur laquelle  $P$  est défini (nous supprimons ainsi momentanément la supposition que  $M$  soit l'extension maximale non-ramifiée de  $K$ ).

Vérifions d'abord que  $\eta_M(P, D) - 1$  est bien égal au plus grand entier  $n$  tel que la section  $P_n$  se factorise par l'inclusion  $D_n \subseteq A_n$ . Soit  $S = \text{spec } \mathfrak{D}_v$  et soit  $U = \text{spec } B$  un ouvert affine de  $\mathcal{A}$  contenant l'image de  $S$  par  $P$  et telle que  $\mathcal{D}$  soit représenté sur  $U$  par un élément  $f$  de  $B$ . Alors  $P$  induit un homomorphisme de  $\mathfrak{D}_v$ -algèbres  $\epsilon_P : B \rightarrow \mathfrak{D}_M$ . Alors  $P \in |D|$  si et seulement si  $\epsilon_P(f) = 0$  et si  $\epsilon_P(f) \neq 0$  alors  $\eta_M(P, D) = \text{ord}_{\pi_M}(\epsilon_P(f))$ . L'assertion devient alors claire en tensorisant avec  $R_n^{(M)}$  ( $n \in \mathbb{N}$ ).

Montrons ensuite que le nombre de termes de la somme dans (0,4) est  $O(N^{2g-2})$  comme affirmé dans l'introduction. D'après ce qui précède,  $\eta_M(P, D) > 0$  si et seulement si  $P_0 \in D_0(\bar{k})$  et il suffit donc de montrer que le cardinal de  $A_0[N] \cap D_0(\bar{k})$  est  $O(N^{2g-2})$  lorsque  $N$  tend vers l'infini. Pour ceci on utilise une méthode semblable à la démonstration de la proposition 7.7 de [Mu-Fo]. Soit  $C$  une courbe dans  $A_0$  coupant proprement  $D_0$  et contenant l'origine. Alors  $A[N] \subseteq N^*C$  et le cardinal de  $A_0[N] \cap D_0(\bar{k})$  est donc majoré par la valeur de l'intersection  $(N^*C.D_0)$ . Or,

$$\begin{aligned} N^{2g}(C.D_0) &= N^*(C.D_0) = (N^*C.N^*D_0) \\ &= (N^*C.(\frac{N(N+1)}{2}D_0 + \frac{N(N-1)}{2}D_0^-)) = \\ &= \frac{N(N+1)}{2}(N^*C.D_0) + \frac{N(N-1)}{2}(N^*C.D_0^-), \end{aligned}$$

où  $D_0^- = (-1)^*D_0$  et nous avons utilisé le fait que les diviseurs  $N^*D_0$  et  $\frac{N(N+1)}{2}D_0 + \frac{N(N-1)}{2}D_0^-$  sont linéairement équivalents [Mu] (p59). Comme  $D_0$  est effectif il en est de même pour  $D_0^-$  et donc  $(N^*C.D_0^-) \geq 0$ . On en déduit immédiatement que le cardinal de  $A_0[N] \cap D_0(\bar{k})$  est bien  $O(N^{2g-2})$ .

Afin de terminer la démonstration du théorème énoncé dans l'introduction, il suffit alors de montrer que les entiers  $\eta_D(P, D)$  demeurent bornés lorsque  $P$  parcourt  $\Sigma$  et  $P \notin |D|$ . Nous allons appliquer la théorie du foncteur de Greenberg aux schémas abéliens  $A_n = \mathcal{A} \times_{\text{spec } \mathfrak{D}} \text{spec } R_n$ . Soit  $\bar{A}_n$  le schéma en groupes sur  $k$  correspondant à  $A_n$  et soit  $G_n$  le noyau de réduction modulo  $\pi^{n+1}$  dans  $A(\bar{K})$ . Alors on dispose d'isomorphismes:

$$\bar{A}_n(\bar{k}) \simeq A_n(R_n \otimes_{W_n(k)} W_n(\bar{k})) \simeq (A(\bar{K})/G_n)(K^{nr}).$$



En identifiant  $\text{Gal}(K^{\text{nr}}/K)$  avec  $\text{Gal}(\bar{k}/k)$ , ces isomorphismes deviennent des isomorphismes de  $\text{Gal}(\bar{k}/k)$ -modules. Désignons par  $\bar{G}_n$  le noyau du morphisme  $\bar{A}_n \rightarrow \bar{A}_0$  de VI. Puisque  $\bar{A}_0 = A_0$  est une variété abélienne,  $\bar{G}_n$  contient le sous-groupe maximal unipotent de  $\bar{A}_n$ : on sait par ailleurs que  $\bar{G}_n$  est tué par multiplication par une certaine puissance  $p^{\lambda_n}$  de  $p$ , que l'on suppose minimale par rapport à cette propriété. On en tire que  $[p^{\lambda_n}]\bar{A}_n$  est une variété abélienne que l'on désigne par  $A'_n$ . Lorsque  $n > m$ , le morphisme  $\bar{A}_n \rightarrow \bar{A}_m$  de VI induit un morphisme  $\rho_{n,m} : A'_n \rightarrow A'_m$ .

Rappelons que  $\Sigma$  (resp.  $\Sigma_n$ ) désigne la réunion des groupes de points de  $N$ -torsion de  $A$  (resp. de  $A_n$ ) pour tout  $N$  non-divisible par  $p$ . Il convient de désigner par  $\Sigma'_n$  le même objet associé à  $A'_n$  (ou à  $\bar{A}_n$ ). Notons que, comme  $A$  est à bonne réduction, tous les éléments de  $\Sigma$  sont définis sur  $K^{\text{nr}}$ : on en tire que les  $\text{Gal}(\bar{k}/k)$ -modules  $\Sigma_n$  sont isomorphes à  $\Sigma$  pour tout  $n$ . On sait que  $\Sigma_n$  est isomorphe à  $\Sigma'_n$  pour tout  $n$  et l'on en déduit d'abord que tout les  $\text{Gal}(\bar{k}/k)$ -modules  $\Sigma$ ,  $\Sigma_n$  et  $\Sigma'_n$  sont canoniquement isomorphes et ensuite que  $\rho_{n,m}$  est une isogénie de  $A'_n$  sur  $A'_m$  de degré une puissance de  $p$ . Soit  $D'_n$  l'intersection de  $\bar{D}_n$  et de  $A'_n$ . D'après III,  $\bar{D}_n$  est fermé et on en déduit que  $D'_n$  est fermé dans  $A'_n$ . D'après la propriété I,  $D_n(W_n(\bar{k}))$  est en bijection canonique avec  $\bar{D}_n(\bar{k})$ : on en tire que  $D_n(W_n(\bar{k})) \cap \Sigma_n$  est en bijection avec  $D'_n(\bar{k}) \cap \Sigma'_n$ . Enfin  $\rho_{n,m}$  envoie  $D'_n$  dans  $D'_m$  si  $n > m$  et donc induit une injection de  $D'_n(\bar{k}) \cap \Sigma'_n$  dans  $D'_m(\bar{k}) \cap \Sigma'_m$ . En particulier, le système d'ensembles  $\rho_{n,0}(D'_n(\bar{k}) \cap \Sigma'_n)$  forme un système décroissant de parties de  $D'_0(\bar{k}) \cap \Sigma'_0$ .

Puisque tous les éléments de  $\Sigma$  sont définis sur  $K^{\text{nr}}$ , on peut prendre  $M = K^{\text{nr}}$  ce que nous ferons désormais. Notons alors que  $R_n^{(M)} \simeq R_n \otimes_{\mathcal{O}} W_n(\bar{k})$  pour tout  $n$ . Pour  $n \geq 0$ , soit  $E_n$  l'ensemble des  $P \in \Sigma$  avec  $\eta_M(P, D) = n$ . Lorsque  $n \geq 1$ , on sait que  $P \in E_n$  équivaut à  $P_{n-1} \in D_{n-1}(W_{n-1}(\bar{k})) \cap \Sigma_{n-1}$  mais  $P_{n-1} \notin D_n(W_n(\bar{k})) \cap \Sigma_n$ . En utilisant les bijections qui précèdent, on en tire que  $E_n$  (pour  $n \geq 1$ ) est en bijection avec le complémentaire de  $\rho_{n,0}(D'_n(\bar{k}) \cap \Sigma'_n)$  dans  $\rho_{n-1,0}(D'_{n-1}(\bar{k}) \cap \Sigma'_{n-1})$ . La démonstration du théorème sera donc achevée par celle du lemme suivant:—

LEMME. *Le système  $\rho_{n,0}(D'_n(\bar{k}) \cap \Sigma'_n)$  est stationnaire à partir d'un certain rang  $n_0$ , et  $\rho_{n,0}(D'_n(\bar{k}) \cap \Sigma'_n)$  est en bijection avec  $D(\bar{K}) \cap \Sigma$  pour  $n \geq n_0$ .*

*Démonstration.*

Puisque  $\rho_{n,m}(D'_n) \subseteq D'_m$  lorsque  $m \leq n$ , le système  $\rho_{n,0}(D'_n)$  de sous-variétés est décroissant. Puisque les variétés abéliennes sont des variétés

propres et  $D'_n$  est un fermé de  $A'_n$ ,  $\rho_{n,0}D'_n$  est un fermé de  $A'_0 = A_0$ . Par noethérianité, la suite  $\rho_{n,0}(D'_n)$  est donc stationnaire. Comme la restriction de  $\rho_{n,0}$  à  $\Sigma_n$  est bijective, on obtient la première assertion. La deuxième assertion est une conséquence du fait que la bijection de **VIII** induit une bijection entre  $\Sigma$  et  $\Sigma_n$  pour tout  $n$ .

## BIBLIOGRAPHIE

- [1] S. BOSCH, W. LÜTKEBOHMERT, M. RAYNAUD, *Néron models*, Ergebnisse de Math. und ihrer Grenzgebiete 3. Folge **21**, Springer-Verlag (1990).
- [2] M. J. GREENBERG, *Schemata over local rings*, Annals of maths. **73** (1961), 624–648.
- [3] M. HINDRY, *Sur les hauteurs locales de Néron sur les variété abéliennes*, préprint.
- [4] S. LANG, *Fundamentals of Diophantine Geometry*, Springer (1983).
- [5] D. MUMFORD, *Abelian varieties*, Oxford University Press, 2<sup>ème</sup> édition (1974).
- [6] D. MUMFORD, J. FOGARTY, *Geometric invariant theory*, 2<sup>ème</sup> édition, Springer-Verlag (1982).
- [7] A NÉRON, *Quasifonctions et hauteurs sur les variétés abéliennes*, Annals of math. **82** (1965), 249–331.
- [8] P. PHILIPPON, *Sur les hauteurs alternatives, I*, Math. Annalen **289** (1991), 255–283.
- [9] M. RAYNAUD, *Around the Mordell conjecture for function fields and a conjecture of Serge Lang*, dans Algebraic Geometry (Tokyo), Lecture notes in math. **1016**, Springer (1982) 1–20.
- [10] J.-P. SERRE, *Lectures on the Mordell-Weil Theorem*, translated by Martin Brown from notes by Michel Waldschmidt, Aspects in Mathematics E15, Vieweg (1989).
- [11] J. TATE, lettre à J-P Serre (juin 1968).

John BOXALL  
Département de Mathématiques  
Université de Caen  
Esplanade de la Paix  
14032 Caen Cedex, France  
e-mail : boxall@math.unicaen.fr