Journal de Théorie des Nombres de Bordeaux

Jean-François Jaulent

Classes logarithmiques des corps de nombres

Journal de Théorie des Nombres de Bordeaux, tome 6, nº 2 (1994), p. 301-325

<http://www.numdam.org/item?id=JTNB_1994__6_2_301_0>

Journal de Théorie des Nombres
de Bordeaux **6** *(1995), 301-325*

Classes logarithmiques des corps de nombres

par JEAN-FRANÇOIS JAULENT

Le but de cet article est de poser les définitions de base et d'établir quelques propriétés fondamentales de l'arithmétique des classes logarithmiques dans les corps de nombres.

La motivation principale de l'introduction des valuations logarithmiques $\widetilde{v}_p$ provient de la théorie des symboles et, plus précisément, du désir de relier concrètement le noyau dans $K_2(K)$ des symboles de Hilbert attachés aux places non complexes d'un corps global K à un groupe de classes effectif (i.e. algorithmiquement accessible aux méthodes numériques). La formule explicite obtenue ailleurs* pour les ℓ-symboles de Hilbert construits sur les racines ℓ^r-ièmes de l'unité contenues dans K (pour un premier ℓ donné), de la forme

$$\left(\frac{\zeta, x}{\mathfrak{p}}\right) = \zeta^{\widetilde{v}_\mathfrak{p}(x)}$$

conduit, en effet, à remplacer la valuation ordinaire v_p à valeurs dans $\mathbb{Z}$ par une application $\widetilde{v}_p$ à valeurs dans $\mathbb{Z}_\ell$ dont la définition fait intervenir le logarithme ℓ-adique de la valeur absolue de l'élément x. La notion de diviseur correpondante, que nous proposons d'appeler logarithmique, donne lieu à une arithmétique voisine de celle idéaux mais plus proche par certains aspects de celles des diviseurs des corps de fonctions, puisque l'invariant-clef de la théorie est finalement le ℓ-groupe des classes de diviseurs (logarithmiques) de degré nul, qui est fini sous les conjectures ℓ-adiques standard.

SOMMAIRE

Manuscrit reçu le 25 Novembre 1993.
Sur le noyau sauvage des corps de nombres*, Acta Arithmetica **67 (1994) 335–348

Index des principales notations

Notations attachées à un corps local $K_\mathfrak{p}$:

$\mathcal{K}_\mathfrak{p}^\times = \varprojlim K_\mathfrak{p}^\times / K_\mathfrak{p}^{\times \ell^n}$: le ℓ-complété profini de $K_\mathfrak{p}^\times$.

$\mu_\mathfrak{p} = \mathcal{K}_\mathfrak{p}^{\times\, tor}$: le ℓ-groupe des racines de l'unité dans $K_\mathfrak{p}$.

$v_\mathfrak{p}$: la valuation (au sens ordinaire) sur $\mathcal{K}_\mathfrak{p}^\times$ à valeurs dans $\mathbb{Z}_\ell$.

$\mathcal{U}_\mathfrak{p} = Ker\, v_\mathfrak{p}$ le sous-groupe unité de $\mathcal{K}_\mathfrak{p}^\times$.

$\widetilde{v}_\mathfrak{p}$: la valuation logarithmique sur $\mathcal{K}_\mathfrak{p}^\times$ à valeurs dans $\mathbb{Z}_\ell$.

$\mathcal{K}_\mathfrak{p}^* = Ker\, \widetilde{v}_\mathfrak{p}$: le sous-groupe des normes cyclotomiques dans $\mathcal{K}_\mathfrak{p}^\times$.

Notations attachées à un corps de nombres K :

$Pl_K = Pl_K^0 \cup Pl_K^\infty$ l'ensemble des places (finies ou infinies)

$\mathcal{J}_K = \prod_\mathfrak{p}^{res} \mathcal{K}_\mathfrak{p}^\times$: le ℓ-groupes des idèles de K.

$\mathcal{R}_K = \mathbb{Z}_\ell \otimes_\mathbb{Z} K^\times$: le sous-groupe des idèles principaux.

$\mathcal{J}_K^* = \prod_\mathfrak{p} \mathcal{K}_\mathfrak{p}^*$: le groupe des normes logarithmiques dans $\mathcal{J}_K$.

$\widetilde{\mathcal{E}_K} = \mathcal{R}_K \cap \mathcal{J}_\mathfrak{p}^*$: le groupe des unités logarithmiques.

$\mathcal{U}_K = \prod_\mathfrak{p} \mathcal{U}_\mathfrak{p}$: le groupe des idèles unités dans $\mathcal{J}_K$.

$\mathcal{E}_K = \mathcal{R}_K \cap \mathcal{U}_K$: le ℓ-groupe des unités globales.

$\mathcal{D}\ell_K \simeq \mathcal{J}_K / \mathcal{J}_K^*$: le ℓ-groupe des diviseurs logarithmiques.

$\widetilde{\mathcal{J}}_K =$ le noyau dans $\mathcal{J}_K$ de la formule du produit.

$\widetilde{\mathcal{D}\ell}_K \simeq \widetilde{\mathcal{J}}_K / \mathcal{J}_K^*$: le ℓ-groupe des diviseurs logarithmiques de degré nul.

$\mathcal{P}\ell_K = \widetilde{\mathcal{P}\ell_K} \simeq \mathcal{R}_K / \widetilde{\mathcal{E}}_K$: le sous-groupe des diviseurs logarithmiques principaux.

$\widetilde{\mathcal{C}\ell}_K = \widetilde{\mathcal{D}\ell}_K / \mathcal{P}\ell$: le ℓ-groupe des classes logarithmiques.

Quelques pro-ℓ-extensions abéliennes de K :

K^{ab} : maximale	$Gal(K^{ab}/K) \simeq \mathcal{J}_K / \mathcal{R}_K$
K^{lc} : localement cyclotomique maximale	$Gal(K^{lc}/K) \simeq \mathcal{J}_K / \mathcal{J}_K^* \mathcal{R}_K$
K^c : $\mathbb{Z}_\ell$-extension cyclotomique	$Gal(K^c/K) \simeq \mathcal{J}_K / \widetilde{\mathcal{J}_K}$
K^{nr} : non ramifiée maximale	$Gal(K^{nr}/K) \simeq \mathcal{J}_K / \mathcal{U}_K \mathcal{R}_K$

1. Valuation logarithmique sur un corps local

Dans tout ce qui suit, ℓ désigne un nombre premier fixé, et Log_{Iw} le logarithme d'Iwasawa , qui est défini sur le groupe $1+\ell\,\mathbb{Z}_\ell$ des unités principales du complété ℓ-adique de $\mathbb{Z}$ par son développement en série entière

$$\mathrm{Log}(1+x) = \sum_{k\geq 1} (-1)^{k+1}\,\frac{x^k}{k}\ ,$$

se prolonge classiquement au groupe multiplicatif $\mathbb{Z}_\ell^\times$ des éléments inversibles de $\mathbb{Z}_\ell$ au moyen de l'équation fonctionnelle

$$\mathrm{Log}(xy) = \mathrm{Log}\ x + \mathrm{Log}\ y,$$

(qui impose évidemment la condition $\mathrm{Log}\zeta = 0$ pour chaque racine de l'unité ζ dans $\mathbb{Z}_\ell^\times$), et finalement au groupe $\mathbb{Q}_\ell^\times$ tout entier avec la convention $\mathrm{Log}_{Iw}\ \ell = 0$. En particulier, si l'on convient d'écrire $x = \omega(x) < x >$ la factorisation canonique d'un élément x de $\mathbb{Z}_\ell^\times$ dans la décomposition directe

$$\mathbb{Z}_\ell^\times = \mu_\ell \times (1 + 2\ell\,\mathbb{Z}_\ell)$$

du groupe multiplicatif $\mathbb{Z}_\ell^\times$ comme produit de son sous-module de torsion μ_ℓ (d'ordre 2 ou $\ell-1$) et du sous-groupe principal $1+2\ell\mathbb{Z}_\ell$, on a $\mathrm{Log}_{Iw}\ x = \mathrm{Log}_{Iw} < x >$, pour tout x de $\mathbb{Z}_\ell^\times$; l'image du logarithme est le sous-module $2\ell\,\mathbb{Z}_\ell$ de $\mathbb{Z}_\ell$, et son noyau dans $\mathbb{Z}_\ell^\times$ est le groupe μ_ℓ des racines de l'unité dans $\mathbb{Q}_\ell$.

DÉFINITION 1.1. *Nous appelons degré ℓ-adique d'un nombre premier p la quantité :*

(i) $deg\ p = Log_{Iw}\ p = Log < p >,\quad pour\ p \neq \ell\ ;$

(ii) $deg\ \ell = \ell,\quad pour\ \ell \neq 2 \quad \& \quad deg\ \ell = 4,\quad pour\ \ell = 2.$

Prenons maintenant un corps local $K_\mathfrak{p}$, de degré fini $d_\mathfrak{p} = [K_\mathfrak{p} : \mathbb{Q}_p]$ sur $\mathbb{Q}_p$; notons $v_\mathfrak{p}$ la valuation associée ; et désignons par $|\ |_\mathfrak{p}$ la valeur absolue ℓ-adique principale qui est définie sur $K_\mathfrak{p}^\times$ par la formule

$$|x|_\mathfrak{p} = \begin{cases} < N\mathfrak{p}^{-v_\mathfrak{p}(x)} >, & \text{pour}\ \ \mathfrak{p} \nmid \ell\ , \\ < N_{K_\mathfrak{p}/\mathbb{Q}_\ell}(x) N\mathfrak{p}^{-v_\mathfrak{p}(x)} >, & \text{pour}\ \ \mathfrak{p} \mid \ell\ , \end{cases}$$

où $N\mathfrak{p}$ est la norme absolue de $\mathfrak{p}$. Considérons enfin l'application

$$h_p = -\frac{\mathrm{Log}_{Iw} |\ .\ |_\mathfrak{p}}{d_\mathfrak{p}\ deg\, p} = \frac{\mathrm{Log}_{Iw}\ N_{K_\mathfrak{p}/\mathbb{Q}_p}(\,.\,)}{d_\mathfrak{p}\ deg p}$$

qui envoie le groupe multiplicatif $K_\mathfrak{p}^\times$ dans un $\mathbb{Z}_\ell$-module du groupe additif $\mathbb{Q}_\ell$: Une vérification immédiate montre que le choix de l'indice $d_\mathfrak{p}$ au dénominateur assure, pour chaque extension finie $L_\mathfrak{P}/K_\mathfrak{p}$ de corps locaux, la commutativité du diagramme

$$\begin{array}{ccccc} K_\mathfrak{p}^\times & \xrightarrow{\text{extension}} & L_\mathfrak{P}^\times & \xrightarrow{\text{Norme}} & K_\mathfrak{p}^\times \\ {\scriptstyle h_\mathfrak{p}}\downarrow & & \downarrow{\scriptstyle h_\mathfrak{P}} & & \downarrow{\scriptstyle h_\mathfrak{p}} \\ \mathbb{Q}_\ell & \xrightarrow{\text{Identité}} & \mathbb{Q}_\ell & \xrightarrow{[L_\mathfrak{P}:K_\mathfrak{p}]} & \mathbb{Q}_\ell \end{array}$$

de sorte que la quantité $h_\mathfrak{p}(x) = -\mathrm{Log}_{Iw}|x|_\mathfrak{p}/d_\mathfrak{p} \deg p$ est indépendante du corps local contenant x dans lequel on la calcule. Nous noterons donc h_p l'application de $\overline{\mathbb{Q}}_p^\times$ dans $\mathbb{Q}_\ell$ ainsi obtenue, qui est donc définie sur le groupe multiplicatif de la clôture algébrique de $\mathbb{Q}_p$.

Pour interpréter arithmétiquement l'application $h_\mathfrak{p}$, introduisons le compactifié ℓ-adique

$$\mathcal{K}_\mathfrak{p}^\times \underset{\text{déf}}{=} \varprojlim K_\mathfrak{p}^\times/K_\mathfrak{p}^{\times\ell^n} \simeq \mathcal{U}_\mathfrak{p} \times \pi_\mathfrak{p}^{\mathbb{Z}_\ell} \quad \text{avec} \quad \begin{cases} \mathcal{U}_\mathfrak{p} = \mu_\mathfrak{p}, & \text{pour } \mathfrak{p} \nmid \ell \\ \mathcal{U}_\mathfrak{p} = 1+\mathfrak{p}, & \text{pour } \mathfrak{p} \mid \ell \end{cases}$$

du groupe multiplicatif $K_\mathfrak{p}^\times$, que nous écrivons $\mathcal{U}_\mathfrak{p}\, \pi_\mathfrak{p}^{\mathbb{Z}_\ell}$ en désignant par $\pi_\mathfrak{p}$ l'image dans $\mathcal{K}_\mathfrak{p}^\times$ d'une uniformisante de $K_\mathfrak{p}$ et en prenant pour sous groupe unité $\mathcal{U}_\mathfrak{p}$ soit le ℓ-sous-groupe de Sylow $\mu_\mathfrak{p}$ du groupe des racines de l'unité dans $K_\mathfrak{p}$ pour $\mathfrak{p} \nmid \ell$, soit le groupe $1+\mathfrak{p}$ des unités principales de $K_\mathfrak{p}$ pour $\mathfrak{p} \mid \ell$. Dans l'isomorphisme du corps de classes local, le groupe $\mathcal{K}_p^\times$ s'identifie au groupe de Galois $\mathrm{Gal}(K_\mathfrak{p}^{ab}/K_\mathfrak{p})$ de la pro-ℓ-extension abélienne maximale de $K_\mathfrak{p}$, le sous-groupe unité $\mathcal{U}_\mathfrak{p}$ au groupe d'inertie Gal $(K_\mathfrak{p}^{ab}/K_\mathfrak{p}^{nr})$ qui fixe donc la $\mathbb{Z}_\ell$-extension non ramifiée $K_\mathfrak{p}^{nr}$ de $K_\mathfrak{p}$, et le noyau

$$\mathcal{K}_\mathfrak{p}^* \underset{\text{déf}}{=} \mathrm{Ker}\ |\ |_\mathfrak{p}$$

de la valeur absolue ℓ-adique principale au sous-groupe Gal $(K_\mathfrak{p}^{ab}/K_\mathfrak{p}^{c})$ associé à la $\mathbb{Z}_\ell$-extension cyclotomique de $K_\mathfrak{p}$ (cf., par exemple , [Ja]). En d'autres termes, $\mathcal{K}_\mathfrak{p}^*$ est le groupe des normes cyclotomiques dans $\mathcal{K}_\mathfrak{p}^\times$, et l'application $h_\mathfrak{p}$ induit un isomorphisme de groupes topologiques du quotient $\mathcal{K}_\mathfrak{p}^\times/\mathcal{K}_\mathfrak{p}^* \simeq$ Gal $(K_\mathfrak{p}^c/K_\mathfrak{p})$ sur un $\mathbb{Z}_\ell$-sous-module libre de $\mathbb{Q}_\ell$ qu'il est facile de préciser :

(i) Pour $K_\mathfrak{p} = \mathbb{Q}_p$, le compactifié $\mathcal{K}_\mathfrak{p}^\times$ s'écrit :

$$\mathcal{Q}_p^\times = \begin{cases} \mu_p\, p^{\mathbb{Z}_\ell}, & \text{pour } p \neq \ell, \\ (1+\ell\,\mathbb{Z}_\ell)\, \ell^{\mathbb{Z}_\ell}, & \text{pour } p = \ell. \end{cases}$$

Et il vient dans tous les cas :

$$h_p(\mathcal{Q}_p^\times) = \frac{\mathrm{Log}_{Iw}|\mathcal{Q}_p^\times|_p}{\deg p} = \mathbb{Z}_\ell,$$

en vertu de la définition 1.1.

(ii) Lorsque $K_\mathfrak{p}$ est de degré $d_\mathfrak{p}$ sur $\mathbb{Q}_p$, la théorie du corps de classes nous donne le diagramme commutatif :

$$\begin{array}{ccccc} Gal(K_\mathfrak{p}^c/K_\mathfrak{p}) & \xleftarrow{\sim} & \mathcal{K}_\mathfrak{p}^\times/\mathcal{K}_\mathfrak{p}^* & \xrightarrow{\sim} & h_p(\mathcal{K}_\mathfrak{p}^\times) \subset \mathbb{Q}_\ell \\ {\scriptstyle res}\downarrow & & {\scriptstyle N_{K_\mathfrak{p}/\mathbb{Q}_p}}\downarrow & & {\scriptstyle d_\mathfrak{p}}\downarrow \\ Gal(\mathbb{Q}_p^c/\mathbb{Q}_p) & \xleftarrow{\sim} & \mathcal{Q}_p^\times/\mathcal{Q}_p^* & \xrightarrow{\sim} & h_p(\mathcal{Q}_p^\times) = \mathbb{Z}_\ell \end{array}$$

Et il vient ainsi :

$$(h_p(\mathcal{K}_\mathfrak{p}^\times) : \mathbb{Z}_\ell) = \frac{(h_p(\mathcal{K}_\mathfrak{p}^\times) : d_\mathfrak{p} h_\mathfrak{p}(\mathcal{K}_\mathfrak{p}^\times))}{(\mathbb{Z}_\ell : d_\mathfrak{p}\, h_\mathfrak{p}(\mathcal{K}_\mathfrak{p}^\times))} = \frac{[K_\mathfrak{p} : \mathbb{Q}_p]}{[K_\mathfrak{p} \cap \mathbb{Q}_p^c : \mathbb{Q}_p]} = [K_\mathfrak{p} : K_\mathfrak{p} \cap \mathbb{Q}_p^c].$$

Autrement dit, $h_\mathfrak{p}(\mathcal{K}_\mathfrak{p}^\times)$ est le $\mathbb{Z}_\ell$-module $[K_\mathfrak{p} : K_\mathfrak{p} \cap \mathbb{Q}_p^c]^{-1}\mathbb{Z}_\ell$.

L'ensemble de la discussion peut ainsi se résumer comme suit :

PROPOSITION 1.2. *Soient p un nombre premier, $\widehat{\mathbb{Q}}_p^c$ la $\widehat{\mathbb{Z}}$-extension cyclotomique de $\mathbb{Q}_p$, puis $K_\mathfrak{p}$ une extension quelconque de degré fini $d_\mathfrak{p}$ sur $\mathbb{Q}_p$, et $|\ |_\mathfrak{p}$ la valeur absolue ℓ-adique principale sur $K_\mathfrak{p}^\times$.*

(i) Pour tout x de $K_\mathfrak{p}^\times$, la quantité $h_p(x) = -Log_{Iw}|x|_\mathfrak{p}/d_p\, Log_{Iw}\, p$ est indépendante de l'extension finie de $\mathbb{Q}_p$ (contenant x) dans laquelle on la calcule.

(ii) La restriction $h_\mathfrak{p}$ de h_p au groupe multiplicatif $K_\mathfrak{p}^\times$ induit un $\mathbb{Z}_\ell$-morphisme du compactifié ℓ-adique $\mathcal{K}_\mathfrak{p}^\times = \varprojlim K_\mathfrak{p}^\times/K_\mathfrak{p}^{\times\ell^n}$ de $K_\mathfrak{p}^\times$ dans le groupe additif $\mathbb{Q}_\ell$, qui a pour noyau le groupe $\mathcal{K}_\mathfrak{p}^*$ des normes cyclotomiques dans $\mathcal{K}_\mathfrak{p}^\times$ et pour image le $\mathbb{Z}_\ell$-réseau $[K_\mathfrak{p} : K_\mathfrak{p} \cap \widehat{\mathbb{Q}}_p^c]^{-1}\mathbb{Z}_\ell$.

On notera que le remplacement de la $\mathbb{Z}_\ell$-extension cyclotomique $\mathbb{Q}_p^c$ de $\mathbb{Q}_p$ par la $\widehat{\mathbb{Z}}$-extension cyclotomique $\widehat{\mathbb{Q}}_p^c$ (i.e. par la composée des $\mathbb{Z}_q$-extensions cyclotomiques de $\mathbb{Q}_p$ pour tous les q premiers) ne modifie en rien le $\mathbb{Z}_\ell$-module $[K_\mathfrak{p} : K_\mathfrak{p} \cap \mathbb{Q}_p^c]^{-1}\mathbb{Z}_\ell$, puisque le degré relatif $[K_\mathfrak{p} \cap \widehat{\mathbb{Q}}_p^c : K_\mathfrak{p} \cap \mathbb{Q}_p^c]$ est étranger à ℓ.

DÉFINITION 1.3. *Les notations étant celles de la proposition, nous disons que :*

(i) $\widetilde{e}_{\mathfrak{p}} = [K_{\mathfrak{p}} : K_{\mathfrak{p}} \cap \widehat{\mathbb{Q}}_p^c]$ *est l'indice (absolu) de ramification logarithmique de* $K_{\mathfrak{p}}$ *;*

(ii) $\widetilde{f}_{\mathfrak{p}} = [K_{\mathfrak{p}} \cap \widehat{\mathbb{Q}}_p^c : \mathbb{Q}_p]$ *est son degré d'inertie logarithmique ;*

(iii) $deg\, \mathfrak{p} = \widetilde{f}_{\mathfrak{p}}\, deg\, p$ *est le degré ℓ-adique de l'idéal* $\mathfrak{p}$ *;*

(iv) *l'application* $\widetilde{v}_{\mathfrak{p}} = -Log|\ |_{\mathfrak{p}} / \, deg\, \mathfrak{p}$ *est la ℓ-valuation logarithmique attachée à* $\mathfrak{p}$.

Avec ces conventions, les résultats précédents peuvent se reformuler comme suit :

THÉORÈME 1.4. *Soit* $K_{\mathfrak{p}}$ *une extension finie de* $\mathbb{Q}_p$. *Alors :*

(i) La ℓ-valuation logarithmique $\widetilde{v}_{\mathfrak{p}}$ *est un* $\mathbb{Z}_\ell$*-épimorphisme du compactifié ℓ-adique* $\mathcal{K}_{\mathfrak{p}}^{\times}$ *de* $K_{\mathfrak{p}}^{\times}$ *sur le groupe additif* $\mathbb{Z}_\ell$*, qui a pour noyau le sous-module* $\mathcal{K}_{\mathfrak{p}}^{*}$ *des normes cyclotomiques dans* $\mathcal{K}_{\mathfrak{p}}^{\times}$.

(ii) Pour chaque premier $q \neq p$, les degrés d'inertie au sens ordinaire $f_{\mathfrak{p}}$ *et logarithmique* $\widetilde{f}_{\mathfrak{p}}$ *(respectivement les indices de ramification au sens ordinaire* $e_{\mathfrak{p}}$ *et logarithmique* $\widetilde{e}_{\mathfrak{p}}$*) on la même q-partie. En particulier ils coïncident dès qu'on a* $p \nmid [K_{\mathfrak{p}} : \mathbb{Q}_p]$.

(iii) Pour $\mathfrak{p} \nmid \ell$*, la ℓ-valuation logarithmique* $\widetilde{v}_{\mathfrak{p}}$ *est proportionnelle à la valuation ordinaire* v_p*, et on a plus précisement :*

$$\widetilde{v}_{\mathfrak{p}} = \frac{f_{\mathfrak{p}}}{\widetilde{f}_{\mathfrak{p}}}\, v_{\mathfrak{p}} = \frac{\widetilde{e}_{\mathfrak{p}}}{e_{\mathfrak{p}}}\, v_{\mathfrak{p}} = [K_{\mathfrak{p}} \cap \widehat{\mathbb{Q}}_p^{nr} \ : \ K_{\mathfrak{p}} \cap \widehat{\mathbb{Q}}_p^c] v_{\mathfrak{p}},$$

si $\widehat{\mathbb{Q}}_p^{nr}$ *(respectivement* $\widehat{\mathbb{Q}}_p^c$*) désigne la* $\widehat{\mathbb{Z}}$*-extension non ramifié (respectivement cyclotomique) de* $\mathbb{Q}_p$.

Preuve : (i) n'est autre que l'assertion (ii) de la proposition 1.2, puisqu'on a $\widetilde{v}_{\mathfrak{p}} = \widetilde{e}_{\mathfrak{p}}\, h_{\mathfrak{p}}$.

(ii) s'obtient en remarquant que, pour $q \neq p$, la $\mathbb{Z}_q$-extension non ramifiée de $\mathbb{Q}_p$ est aussi sa $\mathbb{Z}_q$-extension cyclotomique.

(iii) provient enfin de l'expression explicite de la valeur absolue ℓ-adique principale dans le cas $\mathfrak{p} \nmid \ell$, comme annoncé :

$$\widetilde{v}_{\mathfrak{p}} = -\frac{\mathrm{Log}_{Iw}|\ |_{\mathfrak{p}}}{deg\, \mathfrak{p}} = \frac{\mathrm{Log}_{Iw} N\mathfrak{p}}{\widetilde{f}_{\mathfrak{p}} deg\, p}\, v_{\mathfrak{p}} = \frac{f_{\mathfrak{p}}}{\widetilde{f}_{\mathfrak{p}}}\, v_{\mathfrak{p}} = \frac{[K_{\mathfrak{p}} \cap \widehat{\mathbb{Q}}_p^{nr} : \mathbb{Q}_p]}{K_{\mathfrak{p}} \cap \widehat{\mathbb{Q}}_p^{c} : \mathbb{Q}_p]}\, v_p \ ;$$

et l'assertion (ii) affirme que le quotient des degrés est une puissance de p.

Remarques. (i) La définition des indices $\widetilde{e}_{\mathfrak{p}}$ et $\widetilde{f}_{\mathfrak{p}}$ est indépendante du nombre premier ℓ.

(ii) Une extension $K_{\mathfrak{p}}$ de $\mathbb{Q}_p$ est logarithmiquement non ramifiée sur $\mathbb{Q}_p$ (en ce sens que l'on a $\widetilde{e}_{\mathfrak{p}} = 1$) si et seulement si elle est contenue dans la $\widehat{\mathbb{Z}}$-extension cyclotomique $\widehat{\mathbb{Q}}_p^c$ (de même qu'elle est non ramifiée au sens ordinaire si et seulement si elle est contenue dans $\widehat{\mathbb{Q}}_p^{nr}$). En particulier toute extension logarithmiquement non ramifiée de $\mathbb{Q}_p$ est abélienne (et même cyclique).

(iii) Si $L_{\mathfrak{P}}$ est une extension finie de $K_{\mathfrak{p}}$, on définit de façon immédiate l'indice de ramification relatif $\widetilde{e}_{L_{\mathfrak{P}}/K_{\mathfrak{p}}} = [L_{\mathfrak{P}} : L_{\mathfrak{P}} \cap \widehat{\mathbb{Q}}_p^c K_{\mathfrak{p}}]$ et le degré d'inertie relatif $\widetilde{f}_{L_{\mathfrak{P}}/K_{\mathfrak{p}}} = [L_{\mathfrak{P}} \cap \widehat{\mathbb{Q}}_p^c K_{\mathfrak{p}} : K_{\mathfrak{p}}]$ au sens logarithmique. On en tire comme dans le cas classique les formules de transition : $\widetilde{e}_{\mathfrak{P}} = \widetilde{e}_{L_{\mathfrak{P}}/K_{\mathfrak{p}}} \widetilde{e}_{\mathfrak{p}}$ & $\widetilde{f}_{\mathfrak{P}} = \widetilde{f}_{L_{\mathfrak{P}}/K_{\mathfrak{p}}} \widetilde{f}_{\mathfrak{p}}$, qui relient indices absolus et indices relatifs.

2. Groupe des classes logarithmiques d'un corps de nombres

DÉFINITION 2.1. *Nous appelons ℓ-groupe des diviseurs logarithmiques d'un corps de nombres K et nous notons $\mathcal{D}\ell_K$, le $\mathbb{Z}_\ell$-module libre construit sur les places finies de K :*

$$\mathcal{D}\ell_K = \bigoplus_{\mathfrak{p} \in Pl_K^0} \mathbb{Z}_\ell \, \mathfrak{p}.$$

Pour chaque diviseur logarithmique $\mathfrak{d} = \sum_{\mathfrak{p}} \nu_{\mathfrak{p}} \, \mathfrak{p}$, nous écrivons $deg_K \, \mathfrak{d} = \sum_{\mathfrak{p}} \nu_{\mathfrak{p}} \, deg \, \mathfrak{p}$ son degré dans K. Nous notons enfin $\widetilde{\mathcal{D}\ell}_K$ le sous-modules de $\mathcal{D}\ell_K$ formé des diviseurs logarithmiques de degré nul.

L'introduction du sous-module $\widetilde{\mathcal{D}\ell}_K$ est motivé par le résultat suivant :

PROPOSITION & DÉFINITION 2.2. *Pour chaque place finie $\mathfrak{p}$ de K, continuons à noter $\widetilde{v}_{\mathfrak{p}}$ l'application définie sur le tensorisé ℓ-adique $\mathcal{R}_K = \mathbb{Z} \otimes_{\mathbb{Z}} K^\times$ du groupe multiplicatif $K^\times$ induite par la ℓ-valuation logarithmique associée à $\mathfrak{p}$. L'application $\mathbb{Z}_\ell$-linéaire à valeurs dans $\mathcal{D}\ell_K$*

$$\widetilde{div}_K \mid \qquad x \mapsto \sum_{\mathfrak{p} \in Pl_K^0} \widetilde{v}_{\mathfrak{p}}(x) \, \mathfrak{p}$$

envoie $\mathcal{R}_K$ sur un sous-module $\mathcal{P}\ell_K = \widetilde{\mathcal{P}\ell}_K$ du groupe $\widetilde{\mathcal{D}\ell}_K$ des diviseurs logarithmiques de degré nul. Nous disons que le quotient $\widetilde{\mathcal{C}\ell}_K = \widetilde{\mathcal{D}\ell}_K / \widetilde{\mathcal{P}\ell}_K$ est le ℓ- groupe des classes logarithmiques du corps K.

Preuve : L'inclusion $\widetilde{\mathcal{P}\ell}_K \subset \widetilde{\mathcal{D}\ell}_K$ résulte immédiatement de la formule du produit pour les valeurs absolues ℓ-adiques. Pour tout x de $\mathcal{R}_K$, il vient, en effet (cf. [Ja], prop. 1.1.8) :

$$deg_K\, \widetilde{div}_K(x) = \sum_{\mathfrak{p}\in Pl_K^\circ} \widetilde{v}_{\mathfrak{p}}(x)\, deg\, \mathfrak{p} = -\sum_{\mathfrak{p}\in Pl_K^\circ} \mathrm{Log}_{Iw}|x|_{\mathfrak{p}} = -\mathrm{Log}_{Iw}(1) = 0.$$

Le groupe $\widetilde{C\ell}_K$ s'identifie au ℓ-groupe des classes de valeurs absolues déjà introduit dans [Ja] indépendamment de toute définition des ℓ-valuations logarithmiques : désignons, en effet, par

$$\mathcal{J}_K = \prod_{\mathfrak{p}}^{res} \mathcal{K}_{\mathfrak{p}}^\times$$

le ℓ-adifié du groupe des idèles de K (i.e. le produit des compactifiés des groupes multiplicatifs de ses complétés non complexes restreint aux familles $(x_{\mathfrak{p}})_{\mathfrak{p}}$ où $x_{\mathfrak{p}}$ est dans $\mathcal{U}_{\mathfrak{p}}$ pour presque tout $\mathfrak{p}$), et notons respectivement :

$\mathcal{U}_K = \prod_{\mathfrak{p}} \mathcal{U}_{\mathfrak{p}}$ le sous-groupe des idèles unité,

$\mathcal{J}_K^* = \prod_{\mathfrak{p}} \mathcal{K}_{\mathfrak{p}}^*$ le groupe des normes cyclotomiques locales dans $\mathcal{J}_K$,

et $\widetilde{\mathcal{J}}_K = \{(x_{\mathfrak{p}})_{\mathfrak{p}} \in \mathcal{J}_K \mid \prod_{\mathfrak{p}} |x_{\mathfrak{p}}|_{\mathfrak{p}} = 1\}$, le noyau dans $\mathcal{J}_K$ de la formule du produit.

La théorie ℓ-adique du corps de classes (cf. [Ja] ch. 1.1) interprète alors le quotient

$$\mathcal{C}_K = \mathcal{J}_K / \mathcal{R}_K$$

comme groupe de galois de la pro-ℓ-extension abélienne maximale K^{ab} de K, et son sous-groupe $\mathcal{J}_K^* \mathcal{R}_K/\mathcal{R}_K$ (respectivement $\widetilde{\mathcal{J}}_K/\mathcal{R}_K$) comme le groupe de Galois $Gal(K^{ab}/K^{lc})$ (respectivement $Gal(K^{ab}/K^c)$ associé à la sous-extension localement (respectivement globalement) cyclotomique de K. Or ici, l'application $\widetilde{div}_K$ induite sur $\widetilde{\mathcal{J}}_K$ par les ℓ-valuations logarithmiques identifie chaque facteur $\mathcal{K}_{\mathfrak{p}}^\times/\mathcal{K}_{\mathfrak{p}}^*$ de $\mathcal{J}_K/\mathcal{J}_K^*$ au $\mathbb{Z}_\ell$-module libre $\mathbb{Z}_\ell\, \mathfrak{p}$, le quotient $\widetilde{\mathcal{J}}_K/\mathcal{J}_K^*$ au ℓ-groupe $\widetilde{\mathcal{D}\ell}_K$ des diviseurs logarithmiques de degré nul, et le ℓ-groupe des classes de valeurs absolues $\widetilde{\mathcal{J}}_K/\mathcal{J}_K^* \mathcal{R}_k$ au ℓ-groupe $\widetilde{\mathcal{C}\ell}_K$ des classes logarithmiques défini ci-dessus. En particulier nous avons :

THÉORÈME & CONJECTURE 2.3. *Dans la correspondance du corps de classes, le ℓ-groupe $\widetilde{\mathcal{C}\ell}_K$ des classes logarithmiques du corps K s'identifie au groupe de Galois $Gal(K^{lc}/K^c)$ où K^c est la $\mathbb{Z}_\ell$-extension cyclotomique de K et K^{lc} la pro-ℓ-extension abélienne localement cyclotomique maximale de K. La conjecture de Gross généralisée (pour le corps K et le nombre premier ℓ) affirme donc la finitude du groupe $\widetilde{\mathcal{C}\ell}_K$.*

En particulier, la dimension δ_K du $\mathbb{Z}_\ell$-quotient libre $\widetilde{\mathcal{C}\ell}_K/\widetilde{\mathcal{C}\ell}_K^{tor}$ mesure le ℓ-défaut de cette conjecture dans K.

Considérons maintenant une extension L/K de corps de nombres. Il est naturel de définir les morphismes de transition entre $\mathcal{D}\ell_K$ et $\mathcal{D}\ell_L$ en transportant par les ℓ-valuations logarithmiques les morphismes de transition entre $\mathcal{J}_K$ et $\mathcal{J}_L$ induits par l'extension et la norme arithmétique. Il vient ainsi :

PROPOSITION 2.4. *Etant donnée une extension L/K de corps de nombres, nous regardons $\mathcal{D}\ell_K$ comme un sous-module de $\mathcal{D}\ell_L$ en écrivant pour chaque place finie $\mathfrak{p}$ de K :*

$$\mathfrak{p} = \sum_{\mathfrak{P}|\mathfrak{p}} \widetilde{e}_{L_\mathfrak{P}/K_\mathfrak{p}} \mathfrak{P}.$$

Inversement, nous définissons la norme logarithmique $\widetilde{N}_{L/K}$ en posant pour toute place $\mathfrak{P}$ au dessus de $\mathfrak{p}$:

$$\widetilde{N}_{L/K}(\mathfrak{P}) = \widetilde{f}_{L_\mathfrak{P}/K_\mathfrak{p}} \mathfrak{p}.$$

Les applications obtenues sont compatibles avec celles induites entre les sous-groupes principaux $\mathcal{P}\ell_L$ et $\mathcal{P}\ell_K$ par l'extension et la norme au sens ordinaire en ce sens qu'on a les diagrammes commutatifs :

$$\begin{array}{ccccc}
\mathcal{R}_L & \xrightarrow{div_L} & \mathcal{D}\ell_L & \xrightarrow{deg_L} & \mathbb{Z}_\ell \\
\downarrow{\scriptstyle N_{L/K}} & & \downarrow{\scriptstyle \widetilde{N}_{L/K}} & & \| \\
\mathcal{R}_K & \xrightarrow{div_K} & \mathcal{D}\ell_K & \xrightarrow{deg_K} & \mathbb{Z}_\ell
\end{array}$$

$$\begin{array}{ccccc}
\mathcal{R}_L & \xrightarrow{div_L} & \mathcal{D}\ell_L & \xrightarrow{deg_L} & \mathbb{Z}_\ell \\
\uparrow{\scriptstyle \iota_{L/K}} & & \uparrow{\scriptstyle \widetilde{\iota}_{L/K}} & & \uparrow{\scriptstyle [L:K]} \\
\mathcal{R}_K & \xrightarrow{div_K} & \mathcal{D}\ell_K & \xrightarrow{deg_K} & \mathbb{Z}_\ell
\end{array}$$

Remarques. (i) Le ℓ-groupe des diviseurs logarithmiques $\mathcal{D}\ell_K$ s'identifie formellement au tensorisé ℓ-adique $\mathbb{Z}_\ell \otimes_\mathbb{Z} Id_K$ du groupe des idéaux inversibles de l'anneau des entiers de K. Cependant l'inclusion $\mathcal{D}\ell_K \subset \mathcal{D}\ell_L$, lorsque L est une extension de K, n'est pas induite par l'extension des idéaux $Id_K \subset Id_L$, puisque les indices de ramification qui la définissent sont pris au sens logarithmique. De façon semblable, la norme logarithmique n'est pas induite par la norme des idéaux.

(ii) En formant le produit des $\mathcal{D}\ell_K$ pour tous les nombres premiers ℓ, on définit le groupe

$$\widehat{\mathcal{D}}_K = \bigoplus_{\mathfrak{p} \in Pl_K^0} \widehat{\mathbb{Z}}\, \mathfrak{p}$$

des diviseurs logarithmiques de K. Comme les indices locaux de ramification ou d'inertie pris au sens logarithmique sont indépendants du nombre premier ℓ, les mêmes formules que plus haut permettent de définir les morphismes de transition entre $\widehat{\mathcal{D}}_K$ et $\widehat{\mathcal{D}}_L$, pour chaque extension finie L/K.

Preuve de la proposition : Notons $\iota_{L/K}$ (resp. $\widetilde{\iota}_{L/K}$) les morphismes d'inclusion, $N_{L/K}$ (resp. $\widetilde{N}_{L/K}$) les morphismes normiques. Nous avons successivement, pour $x_K \in \mathcal{R}_K$ et $x_L \in \mathcal{R}_L$:
(i) D'une part :

$$\begin{aligned}\widetilde{div}_L(x_K) &= \sum_{\mathfrak{P}} \widetilde{v}_{\mathfrak{P}}(x_K)\mathfrak{P} = -\sum_{\mathfrak{P}} \mathrm{Log}_{Iw}|x|_{\mathfrak{P}} \frac{\mathfrak{P}}{\deg_L \mathfrak{P}} \\ &= -\sum_{\mathfrak{P}} \frac{[L_{\mathfrak{P}} : K_{\mathfrak{p}}]\ \mathrm{Log}_{Iw}|x|_{\mathfrak{P}}}{\widetilde{f}_{L_{\mathfrak{P}}/K_{\mathfrak{p}}} deg_K \mathfrak{p}}, \text{ i.e.}\end{aligned}$$

$$\widetilde{div}_L(x_K) = -\sum_{\mathfrak{P}} \widetilde{e}_{L_{\mathfrak{P}}/K_{\mathfrak{p}}} \frac{\mathrm{Log}_{Iw}\,|x|_{\mathfrak{p}}\,\mathfrak{P}}{deg_K\,\mathfrak{p}} = -\sum_{\mathfrak{p}} \frac{\mathrm{Log}_{Iw}\,|x|_{\mathfrak{p}}\,\mathfrak{p}}{deg_K\,\mathfrak{p}} = \widetilde{div}_K\,(x_K).$$

Et d'autre part :

$$\widetilde{N}_{L/K}(\widetilde{div}_L(x_L)) = \widetilde{N}_{L/K}(\sum_{\mathfrak{P}} \widetilde{v}_{\mathfrak{P}}(x)\mathfrak{P}) = \sum_{\mathfrak{P}} \widetilde{f}_{L_{\mathfrak{P}}/K_{\mathfrak{p}}} \widetilde{v}_{\mathfrak{P}}(x)\,\mathfrak{p}$$

$$\text{avec } \widetilde{f}_{L_{\mathfrak{P}}/K_{\mathfrak{p}}}\ \widetilde{v}_{\mathfrak{P}}(x)\mathfrak{p}) = -\widetilde{f}_{L_{\mathfrak{P}}/K_{\mathfrak{p}}} \frac{\mathrm{Log}_{Iw}\,|x|_{\mathfrak{P}}}{\deg_L \mathfrak{P}}\ \mathfrak{p} = -\frac{\mathrm{Log}_{Iw}\,|N_{L_{\mathfrak{P}}/K_{\mathfrak{p}}}(x)|}{\deg_K \mathfrak{p}}\ \mathfrak{p}$$

$$\text{i.e. } \widetilde{N}_{L/K}(\widetilde{div}_L(x_L)) = -\sum_{\mathfrak{p}} \frac{\mathrm{Log}_{Iw}|N_{L/K}(x)|_{\mathfrak{p}}}{deg_K\,\mathfrak{p}}\mathfrak{p} = \widetilde{div}_K(N_{L/K}(x_L)).$$

(ii) De façon semblable, pour $\mathfrak{P}$ au dessus de $\mathfrak{p}$, il vient :

$$deg_K(\widetilde{N}_{L/K}\mathfrak{P}) = \widetilde{f}(L_{\mathfrak{P}}/K_{\mathfrak{p}})\, deg_K\, \mathfrak{p} = \widetilde{f}(L_{\mathfrak{P}}/K_{\mathfrak{p}})\widetilde{f}_{\mathfrak{p}}\, deg\, p = \widetilde{f}_{\mathfrak{P}}\, deg\, p$$

$$\text{i.e. } deg_K(\widetilde{N}_{L/K}\mathfrak{P}) = deg_L\mathfrak{P};$$

et

$$deg_L\ \mathfrak{p} = deg_L\left(\sum_{\mathfrak{P}\,|\,\mathfrak{p}} \widetilde{e}(L_{\mathfrak{P}}/K_{\mathfrak{p}})\mathfrak{P}\right) = \sum_{\mathfrak{P}\,|\,\mathfrak{p}} \widetilde{e}(L_{\mathfrak{P}}/K_{\mathfrak{p}})\widetilde{f}(L_{\mathfrak{P}}/K_{\mathfrak{p}})\, deg_K\ \mathfrak{p}$$

$$\text{i.e. } deg_L\mathfrak{p} = [L:K]\, deg_K\ \mathfrak{p}.$$

COROLLAIRE 2.5. *L'image $deg_K(\mathcal{D}\ell_K)$ dans $\mathbb{Z}_\ell$ du ℓ-groupe des diviseurs logarithmiques $\mathcal{D}\ell_K$ est le $\mathbb{Z}_\ell$-module $2\ell[K \cap \widehat{\mathbb{Q}}^c : \mathbb{Q}]\mathbb{Z}_\ell$, où $\widehat{\mathbb{Q}}^c$ désigne la $\widehat{\mathbb{Z}}$-extension cyclotomique de $\mathbb{Q}$.*

Preuve : Dans le diagramme commutatif donné par le corps de classes, où $\mathbb{Q}^c$ est la $\mathbb{Z}_\ell$-sous-extension de $\widehat{\mathbb{Q}}^c$,

$$\begin{tikzcd}
\mathrm{Gal}(\mathbb{Q}^c K/K) \arrow[d, "\text{restriction}"] & \mathcal{D}\ell_K/\widetilde{\mathcal{D}\ell}_K \arrow[l, "\simeq"'] \arrow[r, "\deg_K"] \arrow[d, "\widetilde{N}_{K/\mathbb{Q}}"] & \deg_K(\mathcal{D}\ell_K) \arrow[d, "\text{inclusion}"] \\
\mathrm{Gal}(\mathbb{Q}^c/\mathbb{Q}) & \mathcal{D}\ell_{\mathbb{Q}}/\widetilde{\mathcal{D}\ell}_{\mathbb{Q}} \arrow[l, "\simeq"'] \arrow[r, "\deg_{\mathbb{Q}}"] & \deg_{\mathbb{Q}}(\mathcal{D}\ell_{\mathbb{Q}})
\end{tikzcd}$$

l'image $\deg_{\mathbb{Q}}(\mathcal{D}\ell_{\mathbb{Q}})$ est égale à $2\ell\,\mathbb{Z}_\ell$, comme le montre un calcul immédiat. Il vient ainsi :

$$(2\ell\ \mathbb{Z}_\ell : \deg_K(\mathcal{D}\ell_K)) = [K \cap \mathbb{Q}^c : \mathbb{Q}].$$

Disons enfin un mot sur l'action galoisienne :

PROPOSITION 2.6. *Lorsque l'extension L/K est galoisienne, le groupe de galois $G = Gal(L/K)$ opère sur le $\mathbb{Z}_\ell$-module $\mathcal{D}\ell_L$ par :*

$$\sigma(\sum_{\mathfrak{P}} \nu_{\mathfrak{P}}\, \mathfrak{P}) = \sum_{\mathfrak{P}} \nu_{\mathfrak{P}}\, \mathfrak{P}^\sigma, \quad \forall \sigma \in G.$$

On a alors les égalités pour tous x_L dans $\mathcal{R}_L$ et $\mathfrak{d}_L$ dans $\mathcal{D}\ell_L$

$$\sigma(\widetilde{div}_L(x_L)) = \widetilde{div}(x_L^\sigma) \quad et \quad deg_L(\sigma\,\mathfrak{d}_L) = deg_L(\mathfrak{d}_L),$$

ainsi que les identités entre opérateurs sur $\mathcal{D}\ell_K$ et $\mathcal{D}\ell_L$:

$$\widetilde{N}_{L/K} \circ \widetilde{\iota}_{L/K} = [K:L] \quad \& \quad \widetilde{\iota}_{L/K} \circ \widetilde{N}_{L/K} = \sum_{\sigma \in G} \sigma.$$

Preuve : C'est clair.

Remarques. (i) Par passage au quotient, les applications logarithmiques de norme et d'extension entre ℓ-groupes de diviseurs logarithmiques induisent des morphismes de transition entre ℓ-groupes de classes logarithmiques qu'il est commode de continuer à noter $\widetilde{N}_{L/K}$ et $\widetilde{\iota}_{L/K}$.

(ii) Il peut être intéressant à l'occasion de considérer le quotient, disons $\widetilde{\mathcal{D}\ell}_K^S$, de $\widetilde{\mathcal{D}\ell}_K$ par le sous-module construit sur les places contenues dans un sous-ensemble fini donné S de Pl_K^0. Dans ce cas, l'application naturelle de $\mathcal{R}_K$ dans $\widetilde{\mathcal{D}\ell}_K^S$ sera notée $\widetilde{div}_K^S$. Son conoyau $\widetilde{\mathcal{C}\ell}_K^S$ est le ℓ-groupe de S-classes logarithmiques de K.

3. Structure du groupe des unités logarithmiques

DÉFINITION 3.1. *Pour tout ensemble fini S de places ultramétriques d'un corps de nombres K, nous notons $\widetilde{\mathcal{E}}_K^S$, et nous appelons ℓ-groupe des S-unités logarithmiques du corps K, le noyau dans $\mathcal{R}_K = \mathbb{Z}_\ell \otimes_{\mathbb{Z}} K^\times$ de l'homomorphisme $\widetilde{div}_K^S$ à valeurs dans le ℓ-groupe $\widetilde{\mathcal{D}\ell}_K^S$ des S-diviseurs logarithmiques de degré nul, c'est-à-dire le sous-module pur de $\mathcal{R}_K$ défini par :*

$$\widetilde{\mathcal{E}}_K^S = \{\varepsilon \in \mathcal{R}_K \mid \widetilde{v}_{\mathfrak{p}}(\varepsilon) = 0, \quad \forall \mathfrak{p} \notin S\}.$$

Lorsque S est vide, nous écrivons $\widetilde{\mathcal{E}}_K$ pour $\widetilde{\mathcal{E}}_K^\phi$, et nous disons que $\widetilde{\mathcal{E}}_k$ est le ℓ-groupe des unités logarithmiques du corps K.

La théorie ℓ-adique du corps de classes donne du groupe $\widetilde{\mathcal{E}}_K$ une interprétation particulièrement simple :

PROPOSITION 3.2. *les unités logarithmiques d'un corps de nombres sont exactement les normes cyclotomiques.*

Preuve : D'après le théorème 1.4, les éléments de $\widetilde{\mathcal{E}}_K$ sont, en effet, les idèles principaux qui sont localement partout des normes cyclotomiques :

$$\widetilde{\mathcal{E}}_K = \{\varepsilon = (\varepsilon_{\mathfrak{p}})_{\mathfrak{p}} \in \mathcal{R}_K \mid \varepsilon_{\mathfrak{p}} \in \mathcal{K}_{\mathfrak{p}}^*, \quad \forall \mathfrak{p} \in Pl_K^\circ\}.$$

D'après le principe de Hasse appliqué à l'extension procyclique K^c/K, ce sont donc aussi les normes cyclotomiques globales.

SCOLIE 3.3. *(i) Lorsque S contient l'ensemble $Pl_K(\ell)$ des places de K au-dessus de ℓ, le ℓ-groupe $\widetilde{\mathcal{E}}_K^S$ est exactement le ℓ-groupe $\mathcal{E}_K^S = \mathbb{Z}_\ell \otimes_\mathbb{Z} E_K^S$ construit sur les S-unités au sens ordinaire du corps K (mais ce résultat est généralement en défaut pour S quelconque et, en particulier, pour S vide).*

(ii) Lorsque le corps K ne possède qu'une seule place $\mathfrak{l}$ au-dessus de ℓ, le ℓ-groupe $\widetilde{\mathcal{E}}_K$ coïncide avec celui $\mathcal{E}'_K = \mathbb{Z}_\ell \otimes E'_K$ construit sur les ℓ-unités de K :

$$\mathcal{E}'_K = \{\varepsilon \in \mathcal{R}_K \mid v_\mathfrak{p}(\varepsilon) = 0, \quad \forall\, \mathfrak{p} \nmid \ell\}.$$

Preuve : Le ℓ-groupe $\mathcal{E}_K^S$ des S-unités au sens ordinaire est défini par la condition :

$$\mathcal{E}_K^S = \{\varepsilon \in \mathcal{R}_K \mid v_\mathfrak{p}(x) = 0, \quad \forall\, \mathfrak{p} \notin S\}.$$

Maintenant, pour $\mathfrak{p} \nmid \ell$, nous avons vu que $v_\mathfrak{p}$ et $\widetilde{v}_\mathfrak{p}$ s'annulent simultanément (cf. Th.1.4. (iii)). Il en résulte que $\mathcal{E}_K^S$ coïncide avec $\widetilde{\mathcal{E}}_K^S$ dès que S contient $Pl_K(\ell)$. Enfin, lorsque $Pl_K(\ell)$ est un singleton $\{\mathfrak{l}\}$, la formule du produit nous assure que $\widetilde{v}_\mathfrak{l}(\varepsilon)$ est nul dès que $\widetilde{v}_\mathfrak{p}(\varepsilon)$ vaut 0 pour tous les $\mathfrak{p} \neq \mathfrak{l}$; autrement dit que $\widetilde{\mathcal{E}}_K$ coïncide alors avec $\mathcal{E}'_K$.

En s'aidant de la première assertion du scolie, il est facile de déterminer le $\mathbb{Z}_\ell$-rang du ℓ-groupe $\widetilde{\mathcal{E}}_K$ des unités logarithmiques à partir de celui, connu, du ℓ-groupe des unités : Ecrivons, pour simplifier, $\mathcal{E}'_K$ au lieu de $\mathcal{E}_K^S = \widetilde{\mathcal{E}}_K^S$ lorsque S est l'ensemble $Pl_K(\ell)$ des places de K au-dessus de ℓ, et notons de même $\mathcal{C}\ell'_K$ pour $\mathcal{C}\ell_K^S$ (respectivement $\widetilde{\mathcal{C}\ell}'_K$ pour $\widetilde{\mathcal{C}\ell}_K^S$) le quotient du ℓ-groupe des classes au sens ordinaire (respectivement logarithmique), par le sous-groupe construit sur les places au-dessus de ℓ. Remarquons au passage que $\widetilde{\mathcal{C}\ell}'_K$ s'identifie à un sous-groupe de $\mathcal{C}\ell'_K$, en fait au sous-groupe de $\mathcal{C}\ell'_K$ formé des classes représentées par un diviseur de degré nul, et qu'en particulier il est fini. Cela étant, en comparant la suite exacte longue

$$1 \to \widetilde{\mathcal{E}}_K \to \mathcal{E}'_K \xrightarrow{\widetilde{div}_K} \widetilde{\bigoplus_{\mathfrak{l}|\ell}} \mathbb{Z}_\ell\, \mathfrak{l} \to \widetilde{\mathcal{C}\ell}_K \to \widetilde{\mathcal{C}\ell}'_K \to 1$$

(où le symbole $\widetilde{\oplus}$ signifie que l'on se restreint aux diviseurs de degré nul) à celle classique

$$1 \to \mathcal{E}_K \to \mathcal{E}'_K \to \prod_{\mathfrak{l}|\ell} \mathfrak{l}^{\mathbb{Z}_\ell} \to \mathcal{C}\ell_K \to \mathcal{C}\ell'_K \to 1$$

nous obtenons immédiatement l'identité entre rangs essentiels

$$rg\ \widetilde{\mathcal{E}}_K = rg\ \mathcal{E}_K + 1 + rg\ \widetilde{\mathcal{C}\ell}_K,$$

où le premier terme $rg\ \mathcal{E}_K$ est donné par le théorème de Dirichlet, et le dernier $rg\ \widetilde{\mathcal{C}\ell}_K$ par la conjecture de Gross. Ainsi :

PROPOSITION 3.4. *Le rang essentiel du ℓ-groupe des unités logarithmiques d'un corps de nombres K est la somme $r_K + c_K + \delta_K$ des nombres de places réelles r_K ou complexes c_K et du défaut δ_K de la conjecture de Gross dans K. Autrement dit, on a :*

$$\widetilde{\mathcal{E}}_K \simeq \mu_K \times \mathbb{Z}_\ell^{r_K+c_K+\delta_K},$$

si μ_K désigne le ℓ-groupe des racines de l'unité dans K.

Le cas des S-unités logarithmiques s'en déduit aisément : Pour tout ensemble non vide S de places finies de K, la suite exacte logarithmique :

$$1 \to \widetilde{\mathcal{E}}_K \to \widetilde{\mathcal{E}}_K^S \xrightarrow{\widetilde{div}_K} \widetilde{\bigoplus_{\mathfrak{p}\in S}} \mathbb{Z}_\ell\, \mathfrak{p} \to \widetilde{\mathcal{C}\ell}_K \to \widetilde{\mathcal{C}\ell}_K^S \to 1$$

est évidemment à rapprocher de la suite exacte classique :

$$1 \to \mathcal{E}_K \to \mathcal{E}_K^S \to \prod_{\mathfrak{p}\in S} \mathfrak{p}^{\mathbb{Z}_\ell} \to \mathcal{C}\ell_K \to \mathcal{C}\ell_K^S \to 1.$$

Et, puisque $\widetilde{\mathcal{C}\ell}_K$ est fini sous la conjecture de Gross, il vient ainsi :

COROLLAIRE 3.5. *Sous la conjecture de Gross, pour tout ensemble non vide S de places finies de K, de cardinal $s_K \geq 1$, les rangs essentiel des ℓ-groupes $\widetilde{\mathcal{E}}_K^S$ et $\mathcal{E}_K^S$ des S-unités au sens logarithmique et ordinaire coïncident, et on a donc :*

$$\widetilde{\mathcal{E}}_K^S \simeq \mathcal{E}_K^S \simeq \mu_K \times \mathbb{Z}_\ell^{r_K+c_K+s_K-1}.$$

Tirons quelques conséquences galoisiennes des résultats précédents : Puisque les ℓ-groupes $\widetilde{\mathcal{E}}_K^S$ de S-unités logarithmiques satisfont trivialement la théorie de Galois (en ce sens que pour toute extension galoisienne L/K de corps de nombres, et tout ensemble fini S de places finies, le sous-groupe de $\widetilde{\mathcal{E}}_L^S$ fixé par $Gal(L/K)$ est exactement $\widetilde{\mathcal{E}}_K^S$), la connaissance du rang enveloppe celle du caractère. Nous pouvons donc énoncer sans, plus de calcul, l'analogue logarithmique du théorème de représentation de Herbrand :

THÉORÈME 3.6. *Soit L/K une extension galoisienne de corps de nombres satisfaisant la conjecture de Gross (pour le nombre premier ℓ), et G son groupe de Galois. Alors :*

(i) Le caractère du $\mathbb{Q}_\ell[G]$-module multiplicatif $\mathbb{Q}_\ell \otimes_{\mathbb{Z}_\ell} \widetilde{\mathcal{E}}_L$ construit sur les unités logarithmiques du corps L est la somme des induits à G des

caractères unités attachés aux sous-groupes de décomposition des places archimédiennes de K :

$$\chi_{\widetilde{\mathcal{E}}_L} = \prod_{\mathfrak{p}\in Pl_K^\infty} Ind_{D_\mathfrak{p}}^G \, 1_{D_\mathfrak{p}}.$$

(ii) Pour tout ensemble non vide S de places ultramétriques de K, le caractère du $\mathbb{Q}_\ell[G]$ module $\mathbb{Q}_\ell \otimes_{\mathbb{Z}_\ell} \widetilde{\mathcal{E}}_L^S$ construit sur les S-unités logarithmiques est donné par la formule :

$$\chi_{\widetilde{\mathcal{E}}_L^S} = \left(\sum_{\mathfrak{p}\in Pl_K^\infty \cup S_K} Ind_{D_\mathfrak{p}}^G \, 1_{D_\mathfrak{p}} \right) - 1_G.$$

COROLLAIRE 3.7. *Dans une ℓ-extension cyclique L/K de corps de nombres, le quotient de Herbrand attaché au ℓ-groupe des S-unités logarithmiques*

$$q(G, \widetilde{\mathcal{E}}_L^S) = |H^2(G, \widetilde{\mathcal{E}}_L^S)|/|H^1(G, \widetilde{\mathcal{E}}_L^S)|$$

est donné sous la conjecture de Gross par les identités où $d_\mathfrak{p}(L/K) = |D_\mathfrak{p}|$ désigne le degré local en $\mathfrak{p}$ de l'extension L/K :

(i) $q(G, \widetilde{\mathcal{E}}_L) = \prod_{\mathfrak{p}\in Pl_K^\infty} d_\mathfrak{p}(L/K)$, *lorsque S est vide ;*

(ii) $q(G, \widetilde{\mathcal{E}}_L^S) = \frac{1}{[L:K]} \prod_{\mathfrak{p}\in Pl_K^\infty \cup S_K} d_\mathfrak{p}(L/K)$, *sinon.*

Preuve : On sait, en effet, que le quotient de Herbrand attaché à un module galoisien dans une extension cyclique ne dépend que du caractère de la représentation associée. On notera, enfin, que dans la formule obtenue le degré local $d_\mathfrak{p}(L/K)$ attaché à une place archimédienne $\mathfrak{p}$ vaut 2 lorsque celle-ci, réelle dans K, se complexifie dans L, et 1 dans tous les autres cas.

4. Formule des classes logarithmiques ambiges

Comme pour les ℓ-groupes de classes au sens ordinaire, le problème de la propagation de la trivialité des ℓ-groupes logarithmiques $\widetilde{C\ell}$ ne se pose de façon naturelle que dans le cadre des ℓ-extensions : Pour chaque extension L/K de corps de nombres, nous avons vu, en effet, que le morphisme d'extension $\tilde{\iota}_{L/K}$ et la norme logarithmique $\widetilde{N}_{L/K}$ sont liés par l'identité entre opérateurs sur $\widetilde{C\ell}_K$

$$\widetilde{N}_{L/K} \circ \tilde{\iota}_{L/K} = [L:K],$$

de sorte que lorsque le degré $[L:K]$ est inversible dans $\mathbb{Z}_\ell$, le morphisme d'extension $\widetilde{\iota}_{L/K}$ identifie $\widetilde{C\ell}_K$ à un facteur direct du ℓ-groupe $\widetilde{C\ell}_L$ (plus précisement à l'image du projecteur $\frac{1}{[L:K]}\, \widetilde{\iota}_{L/K} \circ \widetilde{N}_{L/K}$).

Dans une ℓ-extension L/K, en revanche, l'application $\widetilde{\iota}_{L/K}$ n'est plus généralement injective, et il est alors possible d'obtenir des informations non triviales sur le ℓ-groupe $\widetilde{C\ell}_L$ à l'aide d'une identité de points fixes analogue à la classique formule des classes ambiges de Chevalley. Nous avons ici :

LEMME 4.1. *Soit L/K une extension galoisienne de corps de nombres, de groupe de Galois G. La cohomologie des diviseurs logarithmiques principaux est liée à celle des unités logarithmiques par les isomorphismes :*

(i) $\widetilde{\mathcal{P}\ell}_L^G/\widetilde{\mathcal{P}\ell}_K \simeq H^1(G, \widetilde{\mathcal{E}}_L)$.

(ii) $H^1(G, \widetilde{\mathcal{P}\ell}_L) \simeq Ker(H^2(G, \widetilde{\mathcal{E}}_L) \to H^2(G, \mathcal{R}_L))$.

En particulier, pour G cyclique, notant $\mathcal{N}_{L/K} = \mathbb{Z}_\ell \otimes_{\mathbb{Z}} N_{L/K}(L^\times)$ le ℓ-adifié du groupe des normes, on obtient : $H^1(G, \widetilde{\mathcal{P}\ell}_L) \simeq (\widetilde{\mathcal{E}}_K \cap \mathcal{N}_{L/K})/N_{L/K}(\widetilde{\mathcal{E}}_L)$.

Preuve : Partons de la suite exacte courte qui définit le ℓ-groupe des diviseurs logarithiques principaux :

$$1 \longrightarrow \widetilde{\mathcal{E}}_L \longrightarrow \mathcal{R}_L \xrightarrow{\widetilde{div}_L} \widetilde{\mathcal{P}\ell}_L \longrightarrow 0.$$

Ecrivons $H^1(\ )$ pour $H^1(G,\ )$; nous obtenons la suite exacte longue de cohomologie :

$$P\ell_K \hookrightarrow \widetilde{\mathcal{P}\ell}_L^G \to H^1(\widetilde{\mathcal{E}}_L) \to H^1(\mathcal{R}_L) \to H^1(\widetilde{\mathcal{P}\ell}_L) \to H^2(\widetilde{\mathcal{E}}_L) \to H^2(\mathcal{R}_L)$$

et le groupe $H^1(\mathcal{R}_L) = H^1(G, \mathcal{R}_L)$ est nul, en vertu du théorème 90 de Hilbert ; d'où le résultat annoncé.

LEMME 4.2. *Supposons toujours L/K galoisienne de groupe G. Nous avons alors :*

(i) $\mathcal{D}\ell_L^G/\mathcal{D}\ell_K \simeq \oplus_{\mathfrak{p}}\ \mathbb{Z}_\ell/\widetilde{e}_{\mathfrak{p}}(L/K)\mathbb{Z}_\ell$, *où $\mathfrak{p}$ parcourt les places finies logarithmiquement ramifiées dans l'extension L/K.*

(ii) $H^1(G, \mathcal{D}\ell_L) = 0$.

Remarque. D'après le théorème 1.4 (ii), une extension quelconque L/K de corps de nombres ne se ramifie logarithmiquement qu'en un nombre fini de places ultramétriques, à savoir :

(i) celles, étrangères à $[L/K]$, qui se ramifient modérément (au sens ordinaire) dans L/K ; et

(ii) celles, divisant $[K/L]$, en lesquelles l'extension L/K n'est pas localement cyclotomique.

Aux places archimédiennes, il n'y a jamais ramification : nous parlons, s'il y a lieu, de complexification.

Preuve : L'égalité immédiate $\mathcal{D}\ell_L^G = \mathcal{D}\ell_K + \sum_{\mathfrak{p}} e_{\mathfrak{p}}(L/K)^{-1}\mathbb{Z}_\ell \mathfrak{p}$ nous donne (i) par passage au quotient. Quant à (ii), ce n'est rien d'autre que la version logarithmique du théorème 90 de Hilbert pour les idéaux.

LEMME 4.3. *Soit $K^c = K\mathbb{Q}^c$ la $\mathbb{Z}_\ell$-extension cyclotomique de K. Sous les mêmes hypothèses, il vient :*

(i) $(\mathcal{D}\ell_L^G/\mathcal{D}\ell_K)/(\widetilde{\mathcal{D}\ell}_L^G/\widetilde{\mathcal{D}\ell}_K) \simeq deg_L\,\mathcal{D}\ell_L^G/deg_L\,\mathcal{D}\ell_K$.

(ii) $(deg_K\,\mathcal{D}\ell_K : deg_L\,\mathcal{D}\ell_L) = [L \cap K^c : K]$.

(iii) $H^1(G, \widetilde{\mathcal{D}\ell}_L) \simeq deg_L\,\mathcal{D}\ell_L/deg_L\,\mathcal{D}\ell_L^G$
$\simeq \mathbb{Z}_\ell/([L^c : K^c]\mathbb{Z}_\ell + \sum_{\mathfrak{p}} \frac{[L^c:K^c]}{\widetilde{e}_{\mathfrak{p}}(L/K)} \frac{deg_K \mathfrak{p}}{deg_K\,\mathcal{D}\ell_K}\mathbb{Z}_\ell)$.

Preuve : Partons de la suite exacte courte qui définit le sous-module des diviseurs de degré nul dans L :

$$1 \longrightarrow \widetilde{\mathcal{D}\ell}_L \longrightarrow \mathcal{D}\ell_L \xrightarrow{\deg_L} \deg_L \mathcal{D}\ell_L \longrightarrow 0$$

Prenant la cohomologie, et comparant la suite obtenue à celle analogue dans K, nous obtenons, compte tenu de la condition $H^1(G, \mathcal{D}\ell_L) = 0$, la suite exacte à quatre termes :

$$1 \to \widetilde{\mathcal{D}\ell}_L^G/\widetilde{\mathcal{D}\ell}_K \to \mathcal{D}\ell_L^G/\mathcal{D}\ell_K \to deg_L\mathcal{D}\ell_L/deg_L\mathcal{D}\ell_K \to H^1(G, \widetilde{\mathcal{D}\ell}_L) \to 0$$

qui nous donne les isomorphismes :

$$(\mathcal{D}\ell_L^G/\mathcal{D}\ell_K)/(\widetilde{\mathcal{D}\ell}_L^G/\widetilde{\mathcal{D}\ell}_K) \simeq deg_L\,\mathcal{D}\ell_L^G/deg_L\,\mathcal{D}\ell_K,$$

et

$$H^1(G, \widetilde{\mathcal{D}\ell}_L) \simeq deg_L\mathcal{D}\ell_L/deg_L\,\mathcal{D}\ell_L^G.$$

Cela étant, nous avons d'après le corollaire 2.5 :

$$deg_L\,\mathcal{D}\ell_L = [L \cap K^c : K]deg_K\,\mathcal{D}\ell_K,$$

si K^c désigne la $\mathbb{Z}_\ell$-extension cyclotomique de K, et par ailleurs :

$$deg_L\,\mathcal{D}\ell_L^G = [L : K]deg_K\mathcal{D}\ell_L^G = [L : K]deg_K(\mathcal{D}\ell_K + \sum_{\mathfrak{p}} \widetilde{e}_{\mathfrak{p}}(L/K)^{-1}\mathbb{Z}_\ell\,\mathfrak{p})$$

d'où finalement :

$$deg_L \mathcal{D}\ell_L / deg_L \mathcal{D}\ell_L^G \simeq \mathbb{Z}_\ell / ([L : L\cap K^c]\mathbb{Z}_\ell + \sum_{\mathfrak{p}} \frac{[L : L\cap K^c]}{\widetilde{e}_{\mathfrak{p}}(L/K)} \frac{deg_K \mathfrak{p}}{deg_K \mathcal{D}\ell_K} \mathbb{Z}_\ell),$$

comme attendu ; et chacun des quotients à droite est en fait un entier.

Compte tenu de ce résultat, il est naturel de poser :

DÉFINITION & PROPOSITION 4.4. *Nous disons qu'un diviseur logarithmique $\mathfrak{d} \in \mathcal{D}\ell_K$ d'un corps de nombres K est ℓ-primitif lorsque $deg_K \mathfrak{d}$ est une $\mathbb{Z}_\ell$-base du module libre $deg_K \mathcal{D}\ell_K$.*

Enfin, nous disons qu'une ℓ-extension L/K de corps de nombres est primitivement ramifiée (au sens logarithmique) lorsque la sous-extension $L/L\cap K^c$ est totalement ramifiée (au sens logarithmique) en au moins un diviseur primitif, ce qui a lieu si et seulement si la condition

$$H^1(G, \widetilde{\mathcal{D}\ell}_L) = 0$$

est vérifiée. Lorsque c'est le cas, l'indice $(\widetilde{\mathcal{D}\ell}_L^G : \widetilde{\mathcal{D}\ell}_K)$ est alors donné par la formule :

$$(\widetilde{\mathcal{D}\ell}_L^G : \widetilde{\mathcal{D}\ell}_K) = (\prod_{\mathfrak{p}} \widetilde{e}_{\mathfrak{p}}(L/K))/[L^c : K^c]$$

Nous pouvons dès lors énoncer le résultat principal de cette section :

THÉORÈME 4.5. *Formules des classes logarithmiques ambiges - Dans une extension galoisienne L/K de corps de nombres, le sous-groupe $\widetilde{\mathcal{C}\ell}_L^G$ des points fixes par $G = Gal(L/K)$ du ℓ-groupe $\widetilde{\mathcal{C}\ell}_L$ des classes logarithmiques est donnée par la suite exacte de $\mathbb{Z}_\ell$-modules finis :*

$$\widetilde{Cap}_{L/K} \hookrightarrow H^1(\widetilde{\mathcal{E}}_L) \to \widetilde{\mathcal{D}\ell}_L^G / \widetilde{\mathcal{D}\ell}_K \to \widetilde{\mathcal{C}\ell}_L^G / \widetilde{\iota}(\widetilde{\mathcal{C}\ell}_K) \to H^1(\widetilde{\mathcal{P}\ell}_L) \to H^1(\widetilde{\mathcal{D}\ell}_L)$$

où $\widetilde{Cap}_{L/K}$ désigne le sous-groupe de $\widetilde{\mathcal{C}\ell}_K$ qui capitule dans $\widetilde{\mathcal{C}\ell}_L$ (i.e. le noyau du morphisme d'extension $\widetilde{\iota}_{L/K}$).

En particulier, si L est une ℓ-extension cyclique primitivement ramifiée d'un corps K, et qui vérifie la conjecture de Gross, l'ordre du sous-groupe ambige $\widetilde{\mathcal{C}\ell}_L^G$ est donné par la formule :

$$|\widetilde{\mathcal{C}\ell}_L^G| = |\widetilde{\mathcal{C}\ell}_K| \, \frac{\prod_{\mathfrak{p}\in Pl_K^\infty} d_{\mathfrak{p}}(L/K) \prod_{\mathfrak{p}\in Pl_K^0} \widetilde{e}_{\mathfrak{p}}(L/K)}{[L^c : K^c] \quad (\widetilde{\mathcal{E}}_K : \widetilde{\mathcal{E}}_K \cap \mathcal{N}_{L/K})}.$$

Preuve : Partant de la suite exacte courte qui définit le ℓ-groupe $\widetilde{\mathcal{C}\ell}_L = \widetilde{\mathcal{D}\ell}_L/\widetilde{\mathcal{P}\ell}_L$, prenant les points fixes par G, et comparant la suite exacte obtenue avec celle définissant $\widetilde{\mathcal{C}\ell}_K$, nous obtenons le diagramme commutatif :

$$\begin{tikzcd}
0 \arrow[r] & \widetilde{\mathcal{P}\ell}_K \arrow[r] \arrow[d] & \widetilde{\mathcal{D}\ell}_K \arrow[r] \arrow[d] & \widetilde{\mathcal{C}\ell}_K \arrow[r] \arrow[d, "\tilde{\iota}_{L/K}"] & 0 & \\
0 \arrow[r] & \widetilde{\mathcal{P}\ell}_L^G \arrow[r] & \widetilde{\mathcal{D}\ell}_L^G \arrow[r] & \widetilde{\mathcal{C}\ell}_L^G \arrow[r] & H^1(\widetilde{\mathcal{P}\ell}_L) \arrow[r] & H^1(\widetilde{\mathcal{D}\ell}_L)
\end{tikzcd}$$

Et le lemme du serpent nous donne alors la suite exacte attendue (compte tenu de 4.1 (i)) :

$$\begin{aligned}
\widetilde{Cap}_{L/K} \hookrightarrow \widetilde{\mathcal{P}\ell}_L^G/\widetilde{\mathcal{P}\ell}_K \to \widetilde{\mathcal{D}\ell}_L^G/\widetilde{\mathcal{D}\ell}_K \to \widetilde{\mathcal{C}\ell}_L^G/\tilde{\iota}(\widetilde{\mathcal{C}\ell}_K)& \\
\to H^1(\widetilde{\mathcal{P}\ell}_L) \to H^1(\widetilde{\mathcal{D}\ell}_L)&
\end{aligned}$$

Maintenant, lorsque L/K est une ℓ-extension cyclique primitivement ramifiée, le groupe $H^1(G, \widetilde{\mathcal{D}\ell}_L)$ est nul, et l'assertion 4.1 (ii) nous permet de mettre la suite obtenue sous la forme :

$$\begin{aligned}
0 \to \widetilde{Cap}_{L/K} \to H^1(G, \widetilde{\mathcal{E}}_L) \to \widetilde{\mathcal{D}\ell}_L^G/\widetilde{\mathcal{D}\ell}_K \to \widetilde{\mathcal{C}\ell}_L^G/\tilde{\iota}_{L/K}(\widetilde{\mathcal{C}\ell}_K)& \\
\to H^2(G, \widetilde{\mathcal{E}}_L) \to \widetilde{\mathcal{E}}_K/\widetilde{\mathcal{E}}_K \cap \mathcal{N}_{L/K} \to 1&
\end{aligned}$$

En particulier, sous la conjecture de Gross, les groupes $\widetilde{\mathcal{C}\ell}$ sont finis, et il vient donc :

$$|\widetilde{\mathcal{C}\ell}_L^G| = |\widetilde{\mathcal{C}\ell}_K| \, \frac{\prod_{\mathfrak{p} \in Pl_K^0} \tilde{e}_K(L/K)}{[L^c : K^c] \ \ (\widetilde{\mathcal{E}}_K : \widetilde{\mathcal{E}}_K \cap \mathcal{N}_{L/K})} \, q(G, \widetilde{\mathcal{E}}_L) \ ,$$

d'où le résultat annoncé, en vertu du corollaire 3.7.

Remarques. (i) Lorsque L est une ℓ–extension cyclotomique de K (i.e. lorsqu'on a $L \subset K^c$), la formule des classes logarithmiques ambiges se réduit à l'égalité $|\widetilde{\mathcal{C}\ell}_L^G| = |\widetilde{\mathcal{C}\ell}_K|$.

(ii) En l'absence d'hypothèse sur la primitivité de la ramification logarithmique, la suite exacte du théorème conduit seulement à un encadrement de $|\widetilde{\mathcal{C}\ell}_L^{\,G}|$. Plus précisement, sous la conjecture de Gross, pour toute ℓ-extension cyclique L de K, il vient ainsi :

$$|\widetilde{\mathcal{C}\ell}_L^{\,G}| = |\widetilde{\mathcal{C}\ell}_K| \, \frac{\prod_{\mathfrak{p}\in Pl_K^\infty} d_{\mathfrak{p}}(L/K) \prod_{\mathfrak{p}\in Pl_K^0} \widetilde{e}_{\mathfrak{p}}(L/K)}{[L^c : K^c](\widetilde{\mathcal{E}}_K : \widetilde{\mathcal{E}}_K \cap \mathcal{N}_{L/K})} (\mathcal{D}\ell_L^{I_G} \widetilde{\mathcal{P}\ell}_L : \widetilde{\mathcal{D}\ell}_L^{\,I_G} \widetilde{\mathcal{P}\ell}_L)$$

et l'indice $(\mathcal{D}\ell_L^{I_G} \widetilde{\mathcal{P}\ell}_K : \widetilde{\mathcal{D}\ell}_L^{\,I_G} \widetilde{\mathcal{P}\ell}_L)$ à droite est l'ordre du conoyau de l'application naturelle $H^1(G, \widetilde{\mathcal{P}\ell}_L) \to H^1(G, \widetilde{\mathcal{D}\ell}_L)$.

(iii) Pour K fixé et $|G|$ borné, les divers facteurs intervenant dans l'inégalité obtenue sont eux mêmes bornés, à l'exception de celui provenant de la ramification logarithmique $\prod_{\mathfrak{p}} \widetilde{e}_{\mathfrak{p}}(L/K)$, qui est arbitrairement grand avec le nombre de places ramifiées. Il en résulte par exemple que tout corps de nombres K possède une infinité d'extensions cycliques de degré ℓ pour lesquelles l'ordre du ℓ groupe des classes logarithmiques est arbitrairement grand.

COROLLAIRE 4.6. *Soit L une ℓ-extension cyclique d'un corps de nombres K qui vérifie la conjecture de Gross, et S un ensemble fini de places ultramétriques dont l'une au moins est primitive dans L. Alors le nombres S-classes logarithmiques de L invariantes par $G = Gal(L/K)$ est donné par la formule :*

$$|\widetilde{\mathcal{C}\ell}_L^{\,SG}| = |\widetilde{\mathcal{C}\ell}_K| \frac{\prod_{\mathfrak{p}\in S\cup Pl_K^\infty} d_{\mathfrak{p}}(L/K) \prod_{\mathfrak{p}\in S} \widetilde{e}_{\mathfrak{p}}(L/K)}{[L:K]\ (\widetilde{\mathcal{E}}_K^S : \widetilde{\mathcal{E}}_K^S \cap \mathcal{N}_{L/K})} \, .$$

Preuve : Comme dans le cas classique, il suffit de reprendre les calculs précédents en remplaçant classes par S-classes et unités par S-unités. Le quotient de Herbrand correspondant est alors donné par le corollaire 3.7 ; et l'hypothèse de primitivité permet de représenter chaque classe de $\mathcal{D}\ell_L^S$ par un diviseur logarithmique de degré nul. Il vient donc ici :

$$(\widetilde{\mathcal{D}\ell}_L^{\,SG} : \widetilde{\mathcal{D}\ell}_K^{\,S}) = (\mathcal{D}\ell_L^{SG} : \mathcal{D}\ell_K^S) = \prod_{\mathfrak{p}\notin S} \widetilde{e}_{\mathfrak{p}}(L/K),$$

ce qui conduit bien au résultat annoncé.

5. Genre logarithmique et groupe des classes centrales

Tout comme dans le cadre classiques des classes d'idéaux, et indépendamment des restrictions de primitivité, la suite exacte des classes logarithmiques ambiges est rarement exploitable en dehors du cas cyclique, puisqu'elle fait alors intervenir de façon non triviale la cohomologie des unités logarithmiques laquelle n'est, en général, pas connue. Aussi n'est-il pas sans intérêt de chercher à obtenir un analogue de la formule des genres ou encore de celle des classes centrales, analogue valable pour toutes les extensions finies, éventuellement non galoisiennes.

Introduisons d'abord le genre logarithmique :

DÉFINITION 5.1. *Nous appelons ℓ-corps des genres logarithmiques attaché à une extension finie quelconque L/K de corps de nombres la plus grande pro-ℓ-extension $L^{lc} \cap LK^{ab}$ du corps L qui est localement cyclotomique sur L et provient par composition avec L d'une pro-ℓ-extension abélienne de K.*

Le groupe de Galois $\widetilde{\mathcal{G}\ell}_{L/K} = Gal(L^{lc} \cap LK^{ab}/L^c)$ est, par définition, le ℓ-groupe des genres logarithmiques de l'extension L/K.

La détermination du genre logarithmique d'une extension L/K relève du corps de classes ℓ-adique. Considérons le schéma de corps :

$$\begin{tikzcd}
L^c \arrow[r, dash] \arrow[d, dash] & LK^{lc} \arrow[r, dash] \arrow[dd, dash] & L^{lc} \cap LK^{ab} \arrow[r, dash] \arrow[d, dash] & L^{lc} \\
L^c \cap K^{ab} \arrow[rr, dash] \arrow[d, dash] & & L^{lc} \cap K^{ab} & \\
L^c \cap K^{lc} \arrow[r, dash] \arrow[d, dash] & K^{lc} & & \\
K^c & & &
\end{tikzcd}$$

Ecrivons N pour $N_{L/K}$ la norme arithmétique attachée à l'extension L/K. Comme expliqué dans la section 2, la $\mathbb{Z}_\ell$-extension cyclotomique $L^c = LK^c$ de L est associée au ℓ-groupe d'idèles $\widetilde{\mathcal{J}}_L$, et la pro-$\ell$-extension abélienne maximale L^{lc} qui est localement cyclotomique correspond elle au ℓ-sous-groupe $\mathcal{J}_L^* \mathcal{R}_L$. Le formalisme du corps de classes assure alors que sa sous-extension maximale $L^{lc} \cap LK^{ab}$ qui provient par composition d'une pro-ℓ-

extension abélienne de K est associée au saturé pour la norme arithmétique ${}^{-1}N(N(\mathcal{J}_L^*\,\mathcal{R}_L))$ du ℓ-groupe d'idèles qui fixe L^c.

De façon semblable, comme pro-ℓ-extension abélienne de K, l'extension cyclotomique K^c est associée à $\widetilde{\mathcal{J}}_K$, celle localement cyclotomique K^{lc} à $\mathcal{J}_K^*\,\mathcal{R}_K$, et $L^{lc}\cap K^{ab}$ à $N(\mathcal{J}_L^*)\mathcal{R}_K$. Il vient donc :

$$[L^{lc}\cap K^{ab}:K^{lc}] = (\mathcal{J}_K^*\,\mathcal{R}_K : N(\mathcal{J}_L^*)\mathcal{R}_K) = \frac{(\mathcal{J}_K^* : N\,\mathcal{J}_L^*)}{(\mathcal{J}_K^*\cap\mathcal{R}_K : N\,\mathcal{J}_L^*\cap\mathcal{R}_K)}$$
$$= \frac{\prod_{\mathfrak{p}\mid\infty} d_{\mathfrak{p}}^{ab}(L/K)\prod_{\mathfrak{p}\nmid\infty}\widetilde{e}_{\mathfrak{p}}^{ab}(L/K)}{(\widetilde{\mathcal{E}}_K : \widetilde{\mathcal{E}}_K\cap\mathcal{N}_{L/K}^{loc})},$$

si $\mathcal{N}_{L/K}^{loc}$ désigne le sous-groupe de $\mathcal{R}_K$ formé des éléments qui sont normes locales partout dans l'extension L/K, et si, pour chaque place $\mathfrak{p}$ de K, on convient d'écrire $d_{\mathfrak{p}}^{ab}(L/K)$ et $\widetilde{e}_{\mathfrak{p}}^{ab}(L/K)$ respectivement le degré et l'indice de ramification logarithmique de la ℓ-extension abélienne maximale $L_{\mathfrak{p}}^{ab}$ de $K_{\mathfrak{p}}$ contenue dans l'intersection $\cap_{\mathfrak{P}\mid\mathfrak{p}}L_{\mathfrak{P}}$ des complétés de L aux places au-dessus de $\mathfrak{p}$. D'où l'expression du genre logarithmique, en vertu de l'identité :

$$|\widetilde{\mathcal{G}\ell}_{L/K}| = [L^{lc}\cap LK^{ab}:L^c] = \frac{[K^{lc}:K^c]}{[L^c:K^c]}\,[L^{lc}\cap K^{ab}:K^{lc}]$$

THÉORÈME 5.2. *Dans une extension finie quelconque L/K de corps de nombres, le genre logarithmique est donné par la formule :*

$$|\widetilde{\mathcal{G}\ell}_{L/K}| = |\widetilde{\mathcal{C}\ell}_K|\,\frac{\prod_{\mathfrak{p}\in Pl_K^\infty} d_{\mathfrak{p}}^{ab}(L/K)\prod_{\mathfrak{p}\in Pl_K^0}\widetilde{e}_{\mathfrak{p}}^{ab}(L/K)}{[L^c:K^c](\widetilde{\mathcal{E}}_K:\widetilde{\mathcal{E}}_K\cap\mathcal{N}_{L/K}^{loc})}$$

Dans celle-ci $\widetilde{\mathcal{E}}_K$ désigne le ℓ-groupe des unités logarithmiques de K et $\widetilde{\mathcal{E}}_K\cap\mathcal{N}_{L/K}^{loc}$ le sous-groupe de $\widetilde{\mathcal{E}}_K$ formé des éléments de $\widetilde{\mathcal{E}}_K$ qui sont normes locales partout dans l'extension L/K. Enfin, pour chaque place $\mathfrak{p}$ de K, les quantités $d_{\mathfrak{p}}^{ab}(L/K)$ et $\widetilde{e}_{\mathfrak{p}}^{ab}(L/K)$ désignent respectivement le degré et l'indice de ramification logarithmique de la ℓ-extension abélienne locale $L_{\mathfrak{p}}^{ab}/K_{\mathfrak{p}}$ associée à L/K.

Remarques. (i) Contrairement à la formule des classes ambiges qui ne vaut que dans le cas cyclique, la formule des genres ne requiert aucune hypothèse sur la nature de l'extension L/K. Elle ne suppose pas non plus que K vérifie la conjecture de Gross (pour le premier ℓ) : lorsque celle-ci est en défaut dans K, la formule obtenue montre que $\widetilde{\mathcal{G}\ell}_{L/K}$ est infini, et le corps L ne la vérifie pas non plus.

(ii) Pour K fixé (en particulier dès que $\widetilde{\mathcal{C}\ell}_K$ et $\widetilde{\mathcal{E}}_K$ sont donnés), la formule obtenue ne fait intervenir que les propriétés galoisiennes ($[L^c : K^c]$) ou locales ($\widetilde{e}_{\mathfrak{p}}^{ab}(L/K)$, $d_{\mathfrak{p}}^{ab}(L/K), (\widetilde{\mathcal{E}}_K : \widetilde{\mathcal{E}}_K \cap \mathcal{N}_{L/K}^{loc})$) de l'extension considérée, et non ses propriétés globales.

COROLLAIRE 5.2. *Dans une ℓ-extension abélienne L/K de corps de nombres, le genre logarithmique est donné par la formule :*

$$|\widetilde{\mathcal{G}\ell}_{L/K}| = |\widetilde{\mathcal{C}\ell}_K| \frac{\prod_{\mathfrak{p}\in Pl_K^\infty} d_{\mathfrak{p}}(L/K) \prod_{\mathfrak{p}\in Pl_K^0} \widetilde{e}_{\mathfrak{p}}(L/K)}{[L^c : K^c]\ (\widetilde{\mathcal{E}}_K : \widetilde{\mathcal{E}}_K \cap \mathcal{N}_{L/K}^{loc})},$$

Preuve : L'hypothèse faite entraîne immédiatement les identités $d_{\mathfrak{p}}^{ab}(L/K) = d_{\mathfrak{p}}(L/K)$ et $\widetilde{e}_{\mathfrak{p}}^{ab}(L/K) = e_{\mathfrak{p}}(L/K)$.

Le corollaire 5.2 ci-dessus nous donne ainsi une condition nécessaire de trivialité du ℓ-groupe des classes logarithmiques dans une ℓ-extension abélienne de corps de nombres, qui généralise exactement celle obtenue dans le cas cyclique à l'aide de la formule des classes ambiges. Pour obtenir en retour un critère suffisant, il convient cependant de remplacer le quotient des genres par un invariant plus fin, le ℓ-groupe des classes logarithmiques centrales, que nous allons maintenant introduire :

DÉFINITION & THÉORÈME 5.3. *Nous appelons ℓ-groupe des classes logarithmiques centrales attaché à une ℓ-extension (galoisienne) L/K de corps de nombres le plus grand quotient ${}^G\widetilde{\mathcal{C}\ell}_L = \widetilde{\mathcal{C}\ell}_L/\widetilde{\mathcal{C}\ell}_L^{I_G}$ du groupe $\widetilde{\mathcal{C}\ell}_L$ sur lequel $G = Gal(L/K)$ opère trivialement.*

(i) La condition ${}^G\widetilde{\mathcal{C}\ell}_L = 0$ caractérise les ℓ-extensions L de K qui sont logarithmiquement principale. En d'autres termes, on a :

$$\widetilde{\mathcal{C}\ell}_L = 0 \Leftrightarrow {}^G\widetilde{\mathcal{C}\ell}_L = 0.$$

(ii) Le nombre de classes logarithmiques centrales est donné, avec les notations du théorème précédent par la formule

$$|{}^G\widetilde{\mathcal{C}\ell}_L| = |\widetilde{\mathcal{C}\ell}_K| \frac{\prod_{\mathfrak{p}\in Pl_K^\infty} d_{\mathfrak{p}}(L/K) \prod_{\mathfrak{p}\in Pl_K^0} \widetilde{e}_{\mathfrak{p}}(L/K)}{[L^c : K^c](\widetilde{\mathcal{E}}_K : \widetilde{\mathcal{E}}_K \cap \mathcal{N}_{L/K})} (\widetilde{\mathcal{D}\ell}_L^{I_G} \widetilde{\mathcal{P}\ell}_L : \widetilde{\mathcal{D}\ell}_L^{I_G} \widetilde{\mathcal{P}\ell}_L)\kappa_{L/K}$$

où $\kappa_{L/K} = (\mathcal{N}^{loc}_{L/K} : N_{L/K}\mathcal{R}_L)$ *désigne le nombre de noeuds attaché à l'extension* L/K.

Remarques. (i) Le nombre de noeuds $\kappa_{L/K}$ est un invariant purement galoisien de l'extension L/K. Par exemple, si G est abélien, il est égal à l'indice dans le carré extérieur $G \wedge G$ de G du sous-groupe engendré par les $D_\mathfrak{p} \wedge D_\mathfrak{p}$ lorsque $D_\mathfrak{p}$ décrit les groupes de décomposition des places de K. En particulier, il vaut 1 dans le cas cyclique.

(ii) Lorsque G est cyclique, il vient ainsi :

$$|{}^G\widetilde{\mathcal{C}\ell}_L| = |\widetilde{\mathcal{C}\ell}_K| \frac{\prod_{\mathfrak{p}\in Pl_K^\infty} d_{\mathfrak{p}(L/K)} \prod_{\mathfrak{p}\in Pl_K^\circ} \widetilde{e}_\mathfrak{p}(L/K)}{[L^c : K^c](\widetilde{\mathcal{E}}_K : \widetilde{\mathcal{E}}_K \cap \mathcal{N}_{L/K})} (\mathcal{D}\ell_L^{I_G} \widetilde{\mathcal{P}\ell}_L : \widetilde{\mathcal{D}\ell}_L^{I_G} \widetilde{\mathcal{P}\ell}_L),$$

ce qui redonne bien l'expression de $|\widetilde{\mathcal{C}\ell}_L^G|$ déjà calculée dans la section 4.

Preuve du théorème : L'assertion (i) est purement algébrique : si G est un ℓ-groupe fini, l'idéal d'augmentation I_G de l'algèbre ℓ-adique $\mathbb{Z}_\ell[G]$ est topologiquement nilpotent, de sorte que pour tout $\mathbb{Z}_\ell[G]$-module noethérien M, nous avons (en notations additives) :

$M = 0 \Leftrightarrow M = I_G\, M$, en vertu du lemme de Nakayama.

Tout le problème est donc d'évaluer le nombres de classes centrales. Ecrivons le pour cela comme produit de deux entiers sous la forme :

$$|{}^G\widetilde{\mathcal{C}\ell}_L| = (\widetilde{\mathcal{D}\ell}_L : \widetilde{\mathcal{D}\ell}_L^{I_G} \mathcal{P}\ell_L) = (\widetilde{\mathcal{D}\ell}_L : \mathcal{D}\ell_L^{I_G} \mathcal{P}\ell_L)(\mathcal{D}\ell_L^{I_G} \mathcal{P}\ell_L : \widetilde{\mathcal{D}\ell}_L^{I_G} \mathcal{P}\ell_L).$$

Cela étant , en termes idéliques le premier facteur s'écrit encore :

$$\begin{aligned}(\widetilde{\mathcal{D}\ell}_L : \mathcal{D}\ell_L^{I_G}\mathcal{P}\ell_L) &= (\widetilde{\mathcal{J}}_L : \mathcal{J}_L^{I_G}\mathcal{J}_L^*\mathcal{R}_L)\\ &= (\widetilde{\mathcal{J}}_L : {}^{-1}N(N(\mathcal{J}_L^*\mathcal{R}_L)))({}^{-1}(N(N\mathcal{J}_L^*\mathcal{R}_L)) : \mathcal{J}_L^{I_G}\mathcal{J}_L^*\mathcal{R}_L)\end{aligned}$$

et nous retrouvons à gauche le nombres de genres $[L^{lc} \cap LK^{ab} : L^c]$ déjà calculé. Pour évaluer la quantité restante à droite, remarquons alors qu'en associant à la classe de l'idèle $\mathfrak{x}_L \in {}^{-1}N(N(\mathcal{J}_L^*\mathcal{R}_L))$ celle de l'idèle principal $x_K \in \mathcal{N}^{loc}_{L/K}$ défini à une unité logarithmique près par la condition

$$x_K^{-1} N(\mathfrak{x}_L) \in N(\mathcal{J}_L^*),$$

nous construisons clairement un isomorphisme de $\mathbb{Z}_\ell$-modules

$${}^{-1}N(N(\mathcal{J}_L^*\mathcal{R}_L))/\mathcal{J}_L^{I_G}\mathcal{J}_L^*\mathcal{R}_L \simeq \mathcal{N}^{loc}_{L/K}/N(\mathcal{R}_L)(\widetilde{\mathcal{E}}_K \cap \mathcal{N}^{loc}_{L/K}),$$

ce qui nous donne, en fin de compte, l'identité

$$({}^{-1}N(N(\mathcal{J}_L^*\mathcal{R}_L)) : \mathcal{J}_L^{I_G}\mathcal{J}_L^*\mathcal{R}_L) = (\mathcal{N}^{loc}_{L/K} : N\,\mathcal{R}_L)/(\widetilde{\mathcal{E}}_K \cap \mathcal{N}^{loc}_{L/K} : \widetilde{\mathcal{E}}_K \cap N\mathcal{R}_L)$$

qui fait intervenir le nombre de noeuds $\kappa_{L/K} = (\mathcal{N}^{loc}_{L/K} : N\mathcal{R}_L)$ de l'extension, et conduit finalement au résultat attendu compte tenu de l'expression du nombre de genres donnée par le théorème 5.2.

COROLLAIRE 5.4. *Sous les hypothèses du théorème, le corps L est logarithmiquement principal si et seulement si les deux conditions suivantes sont réalisées :*

(i) $$\frac{|\widetilde{\mathcal{C}\ell}_K|\,\kappa_{L/K} \prod_{\mathfrak{p}\in Pl_K^\infty} d_{\mathfrak{p}}^{ab}(L/K) \prod_{\mathfrak{p}\in Pl_K^0} \tilde{e}_{\mathfrak{p}}^{ab}(L/K)}{[L^c : K^c](\widetilde{\mathcal{E}}_K : \widetilde{\mathcal{E}}_K \cap N_{L/K}\mathcal{R}_L)} = 1$$

(ii) $\mathcal{D}\ell_L^{I_G}\widetilde{\mathcal{P}\ell}_L = \widetilde{\mathcal{D}\ell}_L^{I_G}\widetilde{\mathcal{P}\ell}_L$.

Remarques. (i) La condition (ii) du corollaire est légèrement plus faible que la condition de primitivité $H^1(G, \widetilde{\mathcal{D}\ell}_L) = 1$ déjà rencontrée qui s'écrit elle : $\mathcal{D}\ell_L^{I_G} = \widetilde{\mathcal{D}\ell}_L^{I_G}$.

(ii) En dehors du cas cyclique, où s'applique le principe de Hasse, le calcul de l'indice normique $(\widetilde{\mathcal{E}}_K : \widetilde{\mathcal{E}}_K \cap N_{L/K}\mathcal{R}_L)$ ne relève pas des seules méthodes locales, mais fait intervenir effectivement l'arithmétique globale de l'extension.

COROLLAIRE 5.5. *Soit L une ℓ-extension d'un corps de nombres K logarithmiquement principal, et G son groupe de Galois. Si les trois conditions suivantes sont réalisées :*

(i) *L/K est logarithmiquement ramifiée en une place au plus, et la ramification est primitive (en ce sens qu'on a $H^1(G, \widetilde{\mathcal{D}\ell}_L) = 1$) ;*

(ii) *Les places réelles de K ne se complexifient pas dans L ;*

(iii) *Le groupe des noeuds est trivial (par exemple si G est cyclique) ;*

alors L est logarithmiquement principal.

BIBLIOGRAPHIE

[FG] L.J. Federer & B.H. Gross (with an appendix by W. Sinnot),, *Regulators and Iwasawa modules*, Invent. Math. **62** (1981), 443–457.

[Ja] J.-F. Jaulent, *L'arithmétique des ℓ-extensions*, (Thèse d'Etat) Pub. Math. Fac. Sci. Besançon Théor. Nombres 1984–85 & 1985-86, fasc. **1** (1986), 1–349.

[Ta] J. Tate, *Les conjectures de Stark sur les fonctions L d'Artin en $s = 0$*, Prog. in Math. **47**, (1984), Birkhäuser.

Jean-François Jaulent
Centre de Recherche en Mathématiques de Bordeaux
Université Bordeaux I
351, cours de la Libération
33405 TALENCE Cedex