

J. QUEYRUT

Structure galoisienne des places infinies d'un corps de nombres

Journal de Théorie des Nombres de Bordeaux, tome 5, n° 2 (1993), p. 383-410

http://www.numdam.org/item?id=JTNB_1993__5_2_383_0

© Université Bordeaux 1, 1993, tous droits réservés.

L'accès aux archives de la revue « Journal de Théorie des Nombres de Bordeaux » (<http://jtnb.cedram.org/>) implique l'accord avec les conditions générales d'utilisation (<http://www.numdam.org/conditions>). Toute utilisation commerciale ou impression systématique est constitutive d'une infraction pénale. Toute copie ou impression de ce fichier doit contenir la présente mention de copyright.

NUMDAM

Article numérisé dans le cadre du programme
Numérisation de documents anciens mathématiques

<http://www.numdam.org/>

Structure galoisienne des places infinies d'un corps de nombres

par J. QUEYRUT

0. Introduction

Soit N un corps de nombres (i. e. une extension de degré fini n du corps \mathbb{Q} des nombres rationnels) et Γ un groupe d'automorphismes de N . Le corps des invariants de N est noté F . La fonction L d'Artin est un homomorphisme sur le groupe des caractères $R(\Gamma)$ de Γ . Elle satisfait une équation fonctionnelle (voir [Ta1] et [Ta2]). La démonstration, l'équation elle-même ainsi que certaines propriétés des fonctions L font intervenir deux types d'ingrédients :

- des homomorphismes de $R(\Gamma)$ dans \mathbb{Z}
- des homomorphismes de $R(\Gamma)$ dans \mathbb{C}^* .

Par exemple, pour χ caractère de Γ , posons au voisinage de $s = 0$ (resp. $s = 1$)

$$L(s, \chi) = c_0(\chi)s^{r_0(\chi)} + O(s^{r_0(\chi)+1})$$

(resp. $L(s, \chi) = c_1(\chi)(1-s)^{r_1(\chi)} + O((1-s)^{r_1(\chi)+1})$).

Les fonctions r_0 et r_1 sont des homomorphismes de $R(\Gamma)$ dans \mathbb{Z} . Les fonctions c_0 et c_1 sont des homomorphismes de $R(\Gamma)$ dans \mathbb{C}^* . Avec ces notations l'équation fonctionnelle de la fonction L donne :

$$\frac{c_0(\chi)}{c_1(\overline{\chi})} (i\pi)^{a_3(\chi)} 2^{r_2, F\chi(1)+a_1(\chi)} = \tau(\chi)(d_F)^{\chi(1)/2} i^{r_2, F\chi(1)},$$

où $\tau(\chi)$ est la somme de Gauss galoisienne et d_F est le discriminant absolu de F sur \mathbb{Q} . Les exposants sont définis dans le paragraphe 2 et sont des homomorphismes de $R(\Gamma)$ dans \mathbb{Z} .

Les deux premiers groupes de K -théorie permettent de donner une interprétation de ces homomorphismes en terme de classes de Γ -modules

et de classes d'automorphismes. Cet aspect est développé dans le paragraphe 1. En particulier, c'est l'interprétation de τ comme une classe d'automorphismes qui est la clé des théorèmes de structure des anneaux d'entiers.

Une autre motivation vient des formules du nombre de classes.

Soit r_Γ le caractère régulier de Γ , h le nombre de classes d'idéaux de N , R le régulateur de N et w le nombre de racines de l'unité contenues dans N :

$$c_0(r_\Gamma) = -\frac{hR}{w} \quad \text{et} \quad c_1(r_\Gamma) = -\frac{2^{r_{1,N}}(2\pi)^{r_{2,N}}}{\sqrt{d_F}} \frac{hR}{w}.$$

Le problème est d'exprimer chaque facteur comme un produit sur les caractères irréductibles de Γ . Ceci est équivalent à les interpréter comme des automorphismes définis sur des Γ -modules convenables. Par exemple, la décomposition de R se fait à l'aide du régulateur de Stark; celle de d_F par la "Führerdiskriminantenproduktformel" d'Artin et Hasse. L'étude menée ici montre que, pour certains de ces invariants, les Γ -modules naturels qui interviennent sont construits à partir de l'ensemble des plongements de N dans \mathbb{C} et des places infinies de N .

Le paragraphe 2 donne une interprétation d'un certain nombre d'homomorphismes de $R(\Gamma)$ dans \mathbb{Z} à l'aide de la structure galoisienne des plongements de N dans \mathbb{C} et de celle des places infinies de N . Le théorème 3.1 du paragraphe 3 donne une interprétation en terme d'automorphisme et un calcul très simple du facteur à l'infini de la fonction L d'Artin. La dualité entre $\mathbb{Z}[Is(N)]$ et $Map(Is(N), \mathbb{Z})$, rappelée dans le paragraphe 4, permet de donner une description de la structure galoisienne additive de $\mathbb{R} \otimes_{\mathbb{Q}} N$ et multiplicative de $(\mathbb{R} \otimes_{\mathbb{Q}} N)^*$. Enfin dans le dernier paragraphe, la structure galoisienne des racines de l'unité est décrite dans ce cadre.

Notations. Si X est un ensemble et A un anneau, on note $A[X]$ le A -module libre de base X . Si de plus X est un groupe, $A[X]$ a une structure de A -algèbre pour la multiplication induite par la loi de composition dans X .

Si Δ est un sous-groupe de Γ , on note $I(\Gamma/\Delta)$ le $\mathbb{Z}[\Gamma]$ -module, noyau de l'homomorphisme de $\mathbb{Z}[\Gamma]$ sur $\mathbb{Z}[\Gamma/\Delta]$ induit par l'application qui à $\gamma \in \Gamma$ associe sa classe à droite modulo Δ .

$$0 \longrightarrow I(\Gamma/\Delta) \longrightarrow \mathbb{Z}[\Gamma] \longrightarrow \mathbb{Z}[\Gamma/\Delta] \longrightarrow 0.$$

Les $\mathbb{Z}[\Gamma]$ -modules $\mathbb{Z}[\Gamma/\Delta]$ et $I(\Gamma/\Delta)$ sont localement projectifs pour tout nombre premier p ne divisant pas l'ordre de Δ .

Si M est un \mathbb{Z} -module, on note $Map(X, M)$ l'ensemble des applications de X dans M . Il est muni de la structure de \mathbb{Z} -module induite par celle de M . De plus $Map(X, A)$ a une structure de A -algèbre induite par celle de A . L'application

$$f \mapsto \sum_{x \in X} f(x)x$$

est un isomorphisme de A -module de $Map(X, A)$ sur $A[X]$. Si Γ opère sur X , on en déduit une action de Γ sur $A[X]$ par $\gamma \sum_{x \in X} \lambda_x x = \sum_{x \in X} \lambda_x \gamma x$ et sur $Map(X, A)$ par $(\gamma f)(x) = f(\gamma^{-1}x)$. L'isomorphisme précédent est alors un isomorphisme de Γ -module. L'action de Γ conserve la structure de A -algèbre de $Map(X, A)$.

Soit r un élément non nul de A . On appelle module de Swan le sous A -module de $Map(X, A)$ formé des f tels que

$$\exists \lambda_f \in A, \exists g \in Map(X, A), \forall x \in X, f(x) = \lambda_f + rg(x).$$

On le note $Sw(Map(X, A), r)$.

1. Classification de modules et d'automorphismes

Soit S un ensemble fini de nombres premiers. Soit $\mathcal{K}_0^S(\mathbb{Z}[\Gamma])$ le groupe de Grothendieck de la catégorie des $\mathbb{Z}[\Gamma]$ -modules de type fini, localement projectifs en dehors de S . Ce groupe classe les $\mathbb{Z}[\Gamma]$ -modules précédents, modulo les suites exactes localement scindées en dehors de S , voir [Q]. La classe d'un module M dans ce groupe est notée $[M]$. Soit $R(\Gamma)$ le groupe des caractères de Γ . Il classe les $\mathbb{C}[\Gamma]$ -modules de type fini à isomorphisme près. Ces deux groupes sont reliés, en particulier, par la dualité suivante :

$$\mathcal{K}_0^S(\mathbb{Z}[\Gamma]) \times R(\Gamma) \longrightarrow \mathbb{Z}$$

qui, à la classe $[M]$ d'un $\mathbb{Z}[\Gamma]$ -module M et au caractère χ d'un $\mathbb{C}[\Gamma]$ -module V , associe l'entier défini par :

$$\langle \mathbb{C} \otimes_{\mathbb{Z}} M, V \rangle = \dim_{\mathbb{C}}(Hom_{\mathbb{C}[\Gamma]}(V, \mathbb{C} \otimes_{\mathbb{Z}} M)).$$

On a

$$\langle \mathbb{C} \otimes_{\mathbb{Z}} M, V \rangle = \langle \varphi, \chi \rangle = |\Gamma|^{-1} \sum_{\gamma \in \Gamma} \varphi(\gamma) \chi(\gamma^{-1}),$$

où φ est le caractère du $\mathbb{C}[\Gamma]$ -module $\mathbb{C} \otimes_{\mathbb{Z}} M$.

Cette application est bilinéaire non dégénérée à gauche et induit un homomorphisme, noté Tr , de $\mathcal{K}_0^S(\mathbb{Z}[\Gamma])$ sur $Hom(R(\Gamma), \mathbb{Z})$:

$$Tr : \mathcal{K}_0(\mathbb{Z}[\Gamma]) \longrightarrow Hom(R(\Gamma), \mathbb{Z})$$

$$[M] \longmapsto (\chi \mapsto Tr_\chi([M])).$$

On a les propriétés suivantes.

Soit Δ un sous-groupe de Γ , et soit V un $\mathbb{C}[\Gamma]$ -module de type fini et de caractère χ . On pose $V^\Delta = \{x \in V, \forall \delta \in \Delta, \delta(x) = x\}$ et on note χ^Δ son caractère. Alors

$$dim_{\mathbb{C}}(V^\Delta) = \langle \chi, Ind_\Delta^\Gamma(1_\Delta) \rangle = \langle V, \mathbb{C}[\Gamma/\Delta] \rangle = \chi^\Delta(1),$$

$$codim_{\mathbb{C}}(V^\Delta) = dim_{\mathbb{C}}(V) - dim_{\mathbb{C}}(V^\Delta) = \chi(1) - \chi^\Delta(1),$$

où $Ind_\Delta^\Gamma(1_\Delta)$ est le caractère de $\mathbb{C}[\Gamma] \otimes_{\mathbb{C}[\Delta]} \mathbb{C} \simeq \mathbb{C}[\Gamma/\Delta]$.

Soit $\mathcal{K}_1(\mathbb{C}[\Gamma])$ le groupe de Whitehead de la catégorie des $\mathbb{C}[\Gamma]$ -modules de type fini. Ce groupe classe les couples (M, α) où M est un $\mathbb{C}[\Gamma]$ -module de type fini et α est un $\mathbb{C}[\Gamma]$ -automorphisme de M ; la classe de (M, α) dans ce groupe est notée $[M, \alpha]$. Comme précédemment ce groupe se décrit par dualité à partir de la forme bilinéaire

$$\mathcal{K}_1(\mathbb{C}[\Gamma]) \times R(\Gamma) \longrightarrow \mathbb{C}^*$$

qui à la classe $[M, \alpha]$ et au caractère χ d'un $\mathbb{C}[\Gamma]$ -module V associe le déterminant de l'automorphisme $f \mapsto f \circ \alpha$, de $Hom_{\mathbb{C}[\Gamma]}(V, \mathbb{C} \otimes_{\mathbb{Z}} M)$, noté α_V . Cette forme est bilinéaire non dégénérée et induit un isomorphisme, noté Det , de $\mathcal{K}_1(\mathbb{C}[\Gamma])$ sur $Hom(R(\Gamma), \mathbb{C}^*)$:

$$Det : \mathcal{K}_1(\mathbb{C}[\Gamma]) \longrightarrow Hom(R(\Gamma), \mathbb{C}^*)$$

$$[M, \alpha] \longmapsto (\chi \mapsto Det_\chi([M, \alpha])).$$

En particulier, soit λ un nombre complexe non nul, et soit $[M, \lambda]$ l'élément de $\mathcal{K}_1(\mathbb{C}[\Gamma])$ où λ désigne le $\mathbb{C}[\Gamma]$ -automorphisme de M défini par la multiplication par λ . Alors pour tout χ de $R(\Gamma)$,

$$Det_\chi([M, \lambda]) = \lambda^{Tr_\chi([M])}.$$

2. Structure galoisienne de $\mathbb{Z}[Is(N)]$ et $\mathbb{Z}[S_{N,\infty}]$

Soit $Is(N)$ l'ensemble des isomorphismes de N dans le corps des nombres complexes \mathbb{C} . Le nombre d'éléments de $Is(N)$ est égal à n , le degré de N sur \mathbb{Q} (voir par exemple [Sa], page 40). Le groupe Γ opère sur $Is(N)$ par :

$$\forall \gamma \in \Gamma, \forall \sigma \in Is(N), (\gamma, \sigma) \mapsto \sigma \circ \gamma^{-1}$$

LEMME 2.1. *Le groupe Γ opère transitivement et fidèlement sur l'ensemble des isomorphismes de N dans \mathbb{C} ayant la même restriction à F .*

Démonstration. Soient σ et σ' deux isomorphismes de N dans \mathbb{C} , dont les restrictions à F coïncident. Comme N est une extension séparable de F , il existe $x \in N$ tel que $N = F[x]$; le polynôme minimal de x sur F est

$$Q(X) = \prod_{\gamma \in \Gamma} (X - \gamma(x)) \in F[X];$$

toutes ses racines sont simples. Le polynôme minimal de $\sigma(x)$ sur $\sigma(F)$ est

$$\sigma(Q(X)) = \prod_{\gamma \in \Gamma} (X - \sigma(\gamma(x))) \in \sigma(F)[X].$$

De même $\sigma'(x)$ est racine de

$$\prod_{\gamma \in \Gamma} (X - \sigma'(\gamma(x))) = \sigma'(Q(X)).$$

Comme σ et σ' coïncident sur F , $\sigma(Q(X)) = \sigma'(Q(X))$. Il existe donc $\gamma \in \Gamma$ tel que $\sigma'(x) = \sigma(\gamma(x))$.

Le groupe de Galois $Gal(\mathbb{C}/\mathbb{R})$ opère aussi sur $Is(N)$: si j désigne le générateur de $Gal(\mathbb{C}/\mathbb{R})$, l'action est donnée par :

$$\forall \sigma \in Is(N), (j, \sigma) \mapsto (j \circ \sigma) = \bar{\sigma}.$$

L'ensemble des orbites pour cette action s'identifie à l'ensemble des places infinies de N , classes d'équivalence de valeurs absolues archimédiennes de N . Soit p_N l'application qui à $\sigma \in Is(N)$ associe la classe de la valeur absolue :

$$p_N(\sigma) : N \longrightarrow \mathbb{R} \\ x \longmapsto |\sigma(x)| = \sqrt{\sigma(x)\bar{\sigma}(x)}.$$

Soit $S_{N,\infty}$ (resp. $S_{F,\infty}$) l'ensemble des places infinies de N (resp. F). Le groupe Γ opère sur $S_{N,\infty}$ par

$$\forall \gamma \in \Gamma, \forall w \in S_{N,\infty}, (\gamma, w) \mapsto w \circ \gamma^{-1}$$

de telle sorte que p_N commute avec l'action de Γ . On obtient un diagramme commutatif, où toutes les applications sont surjectives, les applications Res_F sont données par la restriction à F :

$$\begin{array}{ccc} Is(N) & \xrightarrow{Res_F} & Is(F) \\ \downarrow p_N & & \downarrow p_F \\ S_{N,\infty} & \xrightarrow{Res_F} & S_{F,\infty} \end{array}$$

Pour toute place v de F , on choisit un relèvement σ_v de v dans $Is(F)$. Pour tout $\sigma \in Is(F)$, on choisit un relèvement σ_N de σ dans $Is(N)$. Ainsi pour toute place v de F , $v_N = p_N(\sigma_{v,N})$ est une place de N dont la restriction à F est égale à v ; v_N ne dépend pas du choix de σ_v relevant v .

Si w est une place de N , on note Γ_w le sous-groupe de Γ d'isotropie de w et f_w l'ordre de Γ_w . Le groupe Γ opère transitivement sur l'ensemble des places dont la restriction est égale à v et $\forall \gamma \in \Gamma$, $\Gamma_{\gamma w} = \gamma \Gamma_w \gamma^{-1}$. On note plus simplement Γ_v le groupe d'isotropie de v_N et f_v l'ordre de Γ_v (il ne dépend pas du choix de v_N).

On note $Is(N, \mathbb{R})$ l'ensemble des isomorphismes de N dans \mathbb{R} et $Is(N, \mathbb{C})$ son complémentaire dans $Is(N)$. On pose $S_{N,\mathbb{R}} = p_N(Is(N, \mathbb{R}))$ et de même $S_{N,\mathbb{C}} = p_N(Is(N, \mathbb{C}))$. Le nombre d'éléments de $S_{N,\mathbb{R}}$ (resp. $S_{N,\mathbb{C}}$) est noté $r_{1,N}$ (resp. $r_{2,N}$). Avec cette notation, on a donc

$$r_{1,N} + 2r_{2,N} = [N : \mathbb{Q}] \quad \text{et} \quad r_{1,F} + 2r_{2,F} = [F : \mathbb{Q}].$$

Ces ensembles sont stables par Γ . L'ensemble $Is(N, \mathbb{C})$ se décompose en deux sous-ensembles disjoints, stables par Γ :

$$\begin{aligned} Is(N, \mathbb{C})_0 &= \{\tau \in Is(N, \mathbb{C}), Res_F(\tau) \in Is(F, \mathbb{C})\} \\ Is(N, \mathbb{C})_1 &= \{\tau \in Is(N, \mathbb{C}), Res_F(\tau) \in Is(F, \mathbb{R})\} \\ Is(N, \mathbb{C}) &= Is(N, \mathbb{C})_0 \cup Is(N, \mathbb{C})_1. \end{aligned}$$

De même, $S_{N,\mathbb{C}}$ se décompose en deux sous-ensembles disjoints, stables par Γ :

$$\begin{aligned} S_{N,\mathbb{C},0} &= p_N(Is(N, \mathbb{C})_0) = \{v \in S_{N,\mathbb{C}}, Res_F(v) \in S_{F,\mathbb{C}}\} \\ S_{N,\mathbb{C},1} &= p_N(Is(N, \mathbb{C})_1) = \{v \in S_{N,\mathbb{C}}, Res_F(v) \in S_{F,\mathbb{R}}\} \\ S_{N,\mathbb{C}} &= S_{N,\mathbb{C},0} \cup S_{N,\mathbb{C},1}. \end{aligned}$$

$$w = p(\tau) \in S_{N,\mathbb{C},1} \cup S_{N,\mathbb{R}} \Leftrightarrow \tau \in Is(N, \mathbb{C})_1 \cup Is(N, \mathbb{R}) \Leftrightarrow \exists \gamma \in \Gamma, \bar{\tau} \circ \gamma = \tau.$$

$$w = p(\tau) \in S_{N,\mathbb{C},1} \Leftrightarrow \tau \in Is(N, \mathbb{C})_1 \Leftrightarrow \exists \gamma \in \Gamma, \gamma \neq 1, \bar{\tau} \circ \gamma = \tau \Leftrightarrow \Gamma_w \text{ est d'ordre 2 engendré par } \gamma.$$

$$w = p(\tau) \in S_{N,\mathbb{R}} \Leftrightarrow \tau \in Is(N, \mathbb{R}) \Leftrightarrow \bar{\tau} = \tau.$$

$$w = p(\tau) \in S_{N,\mathbb{C},0} \Leftrightarrow \tau \in Is(N, \mathbb{C})_0 \Leftrightarrow \bar{\tau} \neq \tau \text{ et } Res_F(\bar{\tau}) \neq Res_F(\tau).$$

$$w = p(\tau) \in S_{N,\mathbb{C},0} \cup S_{N,\mathbb{R}} \Leftrightarrow \tau \in Is(N, \mathbb{C})_0 \cup Is(N, \mathbb{R}) \Leftrightarrow \Gamma_w \text{ est d'ordre 1.}$$

Pour tout $v \in S_{F,\infty}$, on note γ_v le générateur de Γ_v ; donc

$$\gamma_v \neq 1 \Leftrightarrow v_N \in S_{N,\mathbb{C},1}.$$

On note $S'_{F,\mathbb{R}}$ l'ensemble des places v de $S_{F,\mathbb{R}}$ telles que $\gamma_v \neq 1$, et $r'_{1,F}$ le nombre d'éléments de $S'_{F,\mathbb{R}}$. On note $S''_{F,\mathbb{R}}$ le complémentaire de $S'_{F,\mathbb{R}}$ dans $S_{F,\mathbb{R}}$.

Tous les ensembles $S_{F,\mathbb{R}}$, $S_{N,\mathbb{C}}$, $S_{N,\mathbb{C},0}$ et $S_{N,\mathbb{C},1}$ sont stables par Γ .

Si X est un sous- \mathbb{Z} -module de $\mathbb{C}[Is(N)]$, on note X^+ (resp. X^-) le sous-module propre correspondant à la valeur propre 1 (resp. -1) de j . Ainsi

$$X^+ = X \cap \frac{1+j}{2} \mathbb{C}[Is(N)] \text{ et } X^- = X \cap \frac{1-j}{2} \mathbb{C}[Is(N)].$$

Avec ces notations, on a :

LEMME 2.2. *L'application p_N se prolonge en un $\mathbb{Z}[\Gamma]$ -homomorphisme, encore noté p_N , tel que la suite suivante soit exacte :*

$$0 \longrightarrow \mathbb{Z}[Is(N)]^- \longrightarrow \mathbb{Z}[Is(N)] \xrightarrow{p_N} \mathbb{Z}[S_{N,\infty}] \longrightarrow 0.$$

De plus $\mathbb{Z}[Is(N)]^- = \mathbb{Z}[Is(N, \mathbb{C})]^-$.

Le \mathbb{C} -espace vectoriel $\mathbb{C}[Is(N)]^-$ a pour base l'ensemble des $\sigma - \bar{\sigma}$ pour σ dans $Is(N, \mathbb{C})$. Sa dimension est donc $r_{2,N}$.

La proposition suivante donne la structure galoisienne des trois modules introduits dans le lemme 2.2 :

PROPOSITION 2.3.

1) *Le $\mathbb{Z}[\Gamma]$ -module $\mathbb{Z}[Is(N)]$ est isomorphe à $\mathbb{Z}[\Gamma] \otimes_{\mathbb{Z}} \mathbb{Z}[Is(F)]$.*

Pour tout $\chi \in R(\Gamma)$, $Tr_{\chi}(\mathbb{Z}[Is(N)]) = [F : \mathbb{Q}]\chi(1)$.

2) Le $\mathbb{Z}[\Gamma]$ -module $\mathbb{Z}[S_{N,\infty}]$ est localement projectif en dehors de 2. Il est isomorphe à $\bigoplus_{v \in S_{F,\infty}} \mathbb{Z}[\Gamma/\Gamma_v] \simeq \bigoplus_{v \in S_{F,\infty}} \mathbb{Z}[\Gamma] \otimes_{\mathbb{Z}[\Gamma_v]} \mathbb{Z}$.

$$\text{Pour tout } \chi \in R(\Gamma), \text{Tr}_\chi(\mathbb{Z}[S_{N,\infty}]) = \sum_{v \in S_{F,\infty}} \chi^{\Gamma_v}(1).$$

3) Le $\mathbb{Z}[\Gamma]$ -module $\mathbb{Z}[Is(N)]^-$ est localement projectif en dehors de 2 et isomorphe à $(\mathbb{Z}[\Gamma] \otimes_{\mathbb{Z}} (\mathbb{Z}[Is(F)]^-)) \oplus (\bigoplus_{v \in S_{F,\infty}} I[\Gamma/\Gamma_v])$.

$$\text{Soit } a_2 = \text{Tr}(\sum_{v \in S_{F,\infty}} I[\Gamma/\Gamma_v]). \text{ Pour tout } \chi \in R(\Gamma),$$

$$a_2(\chi) = \sum_{v \in S_{F,\infty}} (\chi(1) - \chi^{\Gamma_v}(1)) = \sum_{v \in S_{F,\infty}} (\chi(1) - \chi^{\Gamma_v}(1)).$$

$$\text{Soit } a_3 = \text{Tr}(\mathbb{Z}[Is(N)]^-). \text{ Pour tout } \chi \in R(\Gamma),$$

$$a_3(\chi) = r_{2,F}\chi(1) + a_2(\chi).$$

Démonstration.

1) L'isomorphisme de $\mathbb{Z}[\Gamma] \otimes_{\mathbb{Z}} \mathbb{Z}[Is(F)]$ sur $\mathbb{Z}[Is(N)]$ est donné par

$$\gamma \otimes \sigma \mapsto \sigma_N \circ \gamma^{-1}.$$

L'isomorphisme réciproque est donné par

$$\tau \mapsto \gamma \otimes \text{Res}_F(\tau)$$

où γ est défini par $\text{Res}_F(\tau)_N \circ \gamma^{-1} = \tau$.

2) L'isomorphisme de $\bigoplus_{v \in S_{F,\infty}} \mathbb{Z}[\Gamma] \otimes_{\mathbb{Z}[\Gamma_v]} \mathbb{Z}$ sur $\mathbb{Z}[S_{N,\infty}]$ est donné par :

$$\left(\sum_{\gamma \in \Gamma} \gamma \otimes \lambda_{v,\gamma} \right)_{v \in S_{F,\infty}} \mapsto \sum_{v \in S_{F,\infty}} \sum_{\gamma \in \Gamma} \lambda_{v,\gamma} v_N \circ \gamma_v^{-1}.$$

Soit $w \in S_{N,\infty}$, et soit v la restriction de w à F ; il existe $\gamma_v \in \Gamma$ tel que $w = v_N \circ \gamma_v^{-1}$; l'application qui à w associe l'élément de

$$\bigoplus_{v \in S_{F,\infty}} \mathbb{Z}[\Gamma] \otimes_{\mathbb{Z}[\Gamma_v]} \mathbb{Z},$$

dont la composante en v est $\gamma_v \otimes 1$ et les autres sont nulles, induit l'isomorphisme réciproque.

3) De la suite exacte

$$0 \longrightarrow \mathbb{Z}[Is(F)]^- \longrightarrow \mathbb{Z}[Is(F)] \xrightarrow{p_F} \mathbb{Z}[S_{F,\infty}] \longrightarrow 0$$

on déduit un diagramme commutatif et exact :

$$\begin{array}{ccccccc} 0 & \longrightarrow & \mathbb{Z}[\Gamma] \otimes_{\mathbb{Z}} (\mathbb{Z}[Is(F)]^-) & \longrightarrow & \mathbb{Z}[\Gamma] \otimes_{\mathbb{Z}} \mathbb{Z}[Is(F)] & \xrightarrow{p_F} & \mathbb{Z}[\Gamma] \otimes_{\mathbb{Z}} \mathbb{Z}[S_{F,\infty}] \longrightarrow 0 \\ & & \downarrow & & \downarrow \simeq & & \downarrow \\ 0 & \longrightarrow & \mathbb{Z}[Is(N)]^- & \longrightarrow & \mathbb{Z}[Is(N)] & \xrightarrow{p_N} & \mathbb{Z}[S_{N,\infty}] \longrightarrow 0. \end{array}$$

L'application de $\mathbb{Z}[\Gamma] \otimes_{\mathbb{Z}} \mathbb{Z}[S_{F,\infty}]$ dans $\mathbb{Z}[S_{N,\infty}]$, qui à $\gamma \otimes v$ associe $v_N \circ \gamma^{-1}$, rend de plus le diagramme suivant commutatif et exact :

$$\begin{array}{ccccccc} 0 & \longrightarrow & \bigoplus_{v \in S_{F,\infty}} I[\Gamma/\Gamma_v] & \longrightarrow & \bigoplus_{v \in S_{F,\infty}} \mathbb{Z}[\Gamma] & \longrightarrow & \bigoplus_{v \in S_{F,\infty}} \mathbb{Z}[\Gamma/\Gamma_v] \longrightarrow 0 \\ & & \parallel & & \downarrow \simeq & & \downarrow \simeq \\ 0 & \longrightarrow & \bigoplus_{v \in S_{F,\infty}} I[\Gamma/\Gamma_v] & \longrightarrow & \mathbb{Z}[\Gamma] \otimes_{\mathbb{Z}} \mathbb{Z}[S_{F,\infty}] & \longrightarrow & \mathbb{Z}[S_{N,\infty}] \longrightarrow 0. \end{array}$$

Par le lemme du serpent, on a donc une suite exacte, scindée :

$$0 \longrightarrow \mathbb{Z}[\Gamma] \otimes_{\mathbb{Z}} \mathbb{Z}[Is(F)]^- \longrightarrow \mathbb{Z}[Is(N)]^- \longrightarrow \bigoplus_{v \in S_{F,\infty}} I[\Gamma/\Gamma_v] \longrightarrow 0.$$

La structure galoisienne des sous-modules de $\mathbb{Z}[S_{N,\infty}]$ donnés par la partition de $S_{N,\infty}$ décrite au début du paragraphe se déduit de la proposition précédente :

COROLLAIRE 2.4.

1) Le $\mathbb{Z}[\Gamma]$ -module $\mathbb{Z}[S_{N,\mathbb{C},1} \cup S_{N,\mathbb{R}}]$ est localement projectif en dehors de 2 ; il est isomorphe à $\bigoplus_{v \in S_{F,\mathbb{R}}} \mathbb{Z}[\Gamma/\Gamma_v] \simeq \bigoplus_{v \in S_{F,\mathbb{R}}} \mathbb{Z}[\Gamma] \otimes_{\mathbb{Z}[\Gamma_v]} \mathbb{Z}$.

Soit $a_1 = Tr(\mathbb{Z}[S_{N,\mathbb{C},1} \cup S_{N,\mathbb{R}}])$. Pour tout $\chi \in R(\Gamma)$,

$$a_1(\chi) = \sum_{v \in S_{F,\mathbb{R}}} \chi^{\Gamma_v}(1).$$

Soit $a'_1 = \text{Tr}(\mathbb{Z}[S_{N,\mathbb{C},1}])$. Pour tout $\chi \in R(\Gamma)$,

$$a'_1(\chi) = \sum_{v \in S'_{F,\mathbb{R}}} \chi^{\Gamma_v}(1).$$

2) Pour tout $\chi \in R(\Gamma)$,

- a) $a_1(\chi) + a_2(\chi) = r_{1,F}\chi(1)$,
- b) $\text{Tr}_\chi(\mathbb{Z}[S_{N,\infty}]) = r_{2,F}\chi(1) + a_1(\chi)$,
- c) $\text{Tr}_\chi(\mathbb{Z}[S_{N,\mathbb{C},1}]) = r'_{1,F}\chi(1) - a_2(\chi)$,
- d) $\text{Tr}_\chi(\mathbb{Z}[S_{N,\mathbb{C},0}]) = r_{2,F}\chi(1)$,
- e) $\text{Tr}_\chi(\mathbb{Z}[S_{N,\mathbb{C}}]) = (r_{2,F} + r'_{1,F})\chi(1) - a_2(\chi) = r_{2,F}\chi(1) + a'_1(\chi)$,
- f) $\text{Tr}_\chi(\mathbb{Z}[S_{N,\mathbb{R}}]) = (r_{1,F} - r'_{1,F})\chi(1) = a_1(\chi) - a'_1(\chi)$.

3) Il existe des $\mathbb{Z}[\Gamma]$ -isomorphismes :

$$\begin{aligned} \mathbb{Z}[S_{N,\mathbb{C},1}] &\simeq \bigoplus_{v \in S'_{F,\mathbb{R}}} \mathbb{Z}[\Gamma] \otimes_{\mathbb{Z}[\Gamma_v]} \mathbb{Z} \\ \mathbb{Z}[S_{N,\mathbb{C},0}] &\simeq \mathbb{Z}[\Gamma] \otimes_{\mathbb{Z}} \mathbb{Z}[S_{F,\mathbb{C}}] \\ \mathbb{Z}[S_{N,\mathbb{R}}] &\simeq \mathbb{Z}[\Gamma] \otimes_{\mathbb{Z}} \mathbb{Z}[S''_{F,\mathbb{R}}]. \end{aligned}$$

Donc $\mathbb{Z}[S_{N,\mathbb{R}}]$ et $\mathbb{Z}[S_{N,\mathbb{C},0}]$ sont projectifs et $\mathbb{Z}[S_{N,\mathbb{C},1}]$ est localement projectif en dehors de 2.

COROLLAIRE 2.5. Pour tout $\chi \in R(\Gamma)$,

- a) $\text{Tr}_\chi(\mathbb{Z}[Is(N)]) = (r_{1,F} + 2r_{2,F})\chi(1)$,
- b) $\text{Tr}_\chi(\mathbb{Z}[Is(N, \mathbb{R})]) = (r_{1,F} - r'_{1,F})\chi(1)$,
- c) $\text{Tr}_\chi(\mathbb{Z}[Is(N, \mathbb{C})]) = (r'_{1,F} + 2r_{2,F})\chi(1)$.

En particulier, on retrouve le nombre de plongements réels et complexes en spécifiant les formules précédentes à $\chi = r_\Gamma$.

COROLLAIRE 2.6. Soit r_Γ le caractère de $\mathbb{C}[\Gamma]$. Alors

$$r_{1,N} = (r_{1,F} - r'_{1,F})r_\Gamma(1) \quad \text{et} \quad r_{2,N} = r_{2,F}r_\Gamma(1) + a_2(r_\Gamma).$$

Soit $h_{2,\mathbb{C}}$ le $\mathbb{Z}[\Gamma]$ -automorphisme de $\mathbb{Z}[S_{N,\infty}]$ qui à $w \in S_{N,\infty}$ associe $f_w w$.

Remarque. Pour tout caractère χ de Γ ,

$$\begin{aligned} \text{Det}_\chi([\mathbb{C}[S_{N,\infty}], h_{2,\mathbb{C}}]) &= \text{Det}_\chi([\mathbb{C}[S_{N,\mathbb{C}}], 2]) \\ &= 2^{\text{Tr}_\chi(\mathbb{Z}[S_{N,\mathbb{C}}])} = 2^{(r_{2,F} + r'_{1,F})\chi(1) - a_2(\chi)}. \end{aligned}$$

Pour terminer cette étude, le corollaire suivant donne la structure galoisienne des sous-modules de $\mathbb{Z}[Is(N)]$ donnés par la partition de $Is(N)$ décrite au début du paragraphe :

COROLLAIRE 2.7.

1) L'application p_N induit un isomorphisme de $\mathbb{Z}[Is(N)]^+$ sur $h_{2,\mathbb{C}}(\mathbb{Z}[S_{N,\infty}])$.

2) $\mathbb{Z}[Is(N)]^+ = \mathbb{Z}[Is(N, \mathbb{R})] \oplus \mathbb{Z}[Is(N, \mathbb{C})]^+$ et p_N est un $\mathbb{Z}[\Gamma]$ -isomorphisme de $\mathbb{Z}[Is(N, \mathbb{R})]$ sur $\mathbb{Z}[S_{N,\mathbb{R}}]$, $p_N(\mathbb{Z}[Is(N, \mathbb{C})]^+) = 2\mathbb{Z}[S_{N,\mathbb{C}}]$.

3) Pour tout $\chi \in R(\Gamma)$, $\text{Tr}_\chi(\mathbb{Z}[Is(N)]^+) = r_{2,F}\chi(1) + a_1(\chi)$.

4) Pour tout $\chi \in R(\Gamma)$,

a) $\text{Tr}_\chi(\mathbb{Z}[Is(N, \mathbb{C})]^+) = (2r_{2,F} + r'_{1,F})\chi(1) - a_2(\chi)$.

b) $\text{Tr}_\chi(\mathbb{Z}[Is(N, \mathbb{C})]_0) = 2r_{2,F}\chi(1)$. Le $\mathbb{Z}[\Gamma]$ -module $\mathbb{Z}[Is(N, \mathbb{C})]_0$ est isomorphe à $\mathbb{Z}[\Gamma] \otimes_{\mathbb{Z}} \mathbb{Z}[Is(F, \mathbb{C})]$, l'isomorphisme commutant avec j , pour j opérant sur $\mathbb{Z}[Is(F, \mathbb{C})]$.

$$\text{Tr}_\chi(\mathbb{Z}[Is(N, \mathbb{C})]_0^+) = \text{Tr}_\chi(\mathbb{Z}[Is(N, \mathbb{C})]_0^-) = r_{2,F}\chi(1).$$

c) $\text{Tr}_\chi(\mathbb{Z}[Is(N, \mathbb{C})]_1) = r'_{1,F}\chi(1)$. Le $\mathbb{Z}[\Gamma]$ -module $\mathbb{Z}[Is(N, \mathbb{C})]_1$ est isomorphe à $\mathbb{Z}[\Gamma] \otimes_{\mathbb{Z}} \mathbb{Z}[S'_{F,\mathbb{R}}]$, l'isomorphisme commutant avec j , pour j opérant sur $\mathbb{Z}[\Gamma] \otimes_{\mathbb{Z}} \mathbb{Z}[S'_{F,\mathbb{R}}]$ par $(j, \gamma \otimes v) \mapsto \gamma\gamma_v \otimes v$.

$$\text{Tr}_\chi(\mathbb{Z}[Is(N, \mathbb{C})]_1^+) = r'_{1,F}\chi(1) - a_2(\chi)$$

$$\text{Tr}_\chi(\mathbb{Z}[Is(N, \mathbb{C})]_1^-) = a_2(\chi).$$

5) La suite de $\mathbb{Z}[\Gamma]$ -modules suivante est exacte :

$$0 \longrightarrow \mathbb{Z}[Is(N)]^+ \oplus \mathbb{Z}[Is(N)]^- \longrightarrow \mathbb{Z}[Is(N)] \longrightarrow \mathbb{Z}/2\mathbb{Z}[S_{N,\mathbb{C}}] \longrightarrow 0$$

3. Lien avec la partie à l'infini de la fonction L d'Artin

Soit $\Gamma(s) = \int_0^\infty e^{-y} y^s \frac{dy}{y}$. Elle vérifie la relation

$$\Gamma\left(\frac{s}{2}\right)\Gamma\left(\frac{s+1}{2}\right) = \Gamma(s)2^{1-s}\pi^{1/2}.$$

Soit

$$\Gamma_{\mathbb{R}}(s) = \pi^{-s/2}\Gamma(s/2).$$

Cette fonction vérifie donc la relation : $\Gamma_{\mathbb{R}}(s) \Gamma_{\mathbb{R}}(s + 1) = 2^{1-s}\Gamma_{\mathbb{R}}(2s)$.

Alors $\Gamma_{\mathbb{R}}(1) = 1$ et 0 est un pôle simple de résidu 2.

Le théorème suivant donne une expression particulièrement simple de la partie infinie de la fonction L d'Artin, en l'interprétant à l'aide d'un $\mathbb{C}[\Gamma]$ -automorphisme défini sur $\mathbb{C}[Is(N)]$.

THÉORÈME 3.1. *Soit $L_{\infty}(s)$ le $\mathbb{C}[\Gamma]$ -automorphisme de*

$$\mathbb{C}[Is(N)] = \mathbb{C}[Is(N)]^+ \oplus \mathbb{C}[Is(N)]^-$$

défini par la multiplication par $\Gamma_{\mathbb{R}}(s)$ sur $\mathbb{C}[Is(N)]^+$ et la multiplication par $\Gamma_{\mathbb{R}}(s + 1)$ sur $\mathbb{C}[Is(N)]^-$. Pour chaque place v de F et tout caractère χ de Γ , soit $L_v(s, \chi)$ la fonction locale d'Artin (voir [Ta2], page 18).

Alors $\forall \chi \in R(\Gamma)$

$$Det_{\chi}([\mathbb{C}[Is(N)], L_{\infty}(s)]) = \prod_{v \in S_{F, \infty}} L_v(s, \chi).$$

Démonstration. Par définition de $L_{\infty}(s)$ et en utilisant la formule de [Ta2] page 18, on a, en posant $n = [F : \mathbb{Q}]$,

$$\begin{aligned} & Det_{\chi}([\mathbb{C}[Is(N)], L_{\infty}(s)]) \\ &= \Gamma_{\mathbb{R}}(s)^{Tr_{\chi}(\mathbb{C}[Is(N)]^+)} \Gamma_{\mathbb{R}}(s + 1)^{Tr_{\chi}(\mathbb{C}[Is(N)]^-)} \\ &= \Gamma_{\mathbb{R}}(s)^{r_{2, F}\chi(1) + a_1(\chi)} \Gamma_{\mathbb{R}}(s + 1)^{r_{F, 2}\chi(1) + a_2(\chi)} \\ &= \pi^{-[s(r_{F, 2}\chi(1) + a_1(\chi)) + (s+1)(r_{F, 2}\chi(1) + a_2(\chi))]/2} \times \\ & \quad \Gamma\left(\frac{s}{2}\right)^{r_{F, 2}\chi(1) + a_1(\chi)} \Gamma\left(\frac{s+1}{2}\right)^{r_{F, 2}\chi(1) + a_2(\chi)} \\ &= \pi^{-[sn\chi(1) + r_{F, 2}\chi(1) + a_2(\chi)]/2} \Gamma\left(\frac{s}{2}\right)^{a_1(\chi)} \Gamma\left(\frac{s+1}{2}\right)^{a_2(\chi)} [\Gamma\left(\frac{s}{2}\right)\Gamma\left(\frac{s+1}{2}\right)]^{r_{F, 2}\chi(1)} \\ &= 2^{r_{F, 2}\chi(1)(1-s)} \pi^{-[a_2(\chi) + sn\chi(1)]/2} \Gamma\left(\frac{s}{2}\right)^{a_1(\chi)} \Gamma\left(\frac{s+1}{2}\right)^{a_2(\chi)} \Gamma(s)^{r_{F, 2}\chi(1)} \\ &= \prod_{v \in S_{F, \infty}} L_v(s, \chi). \end{aligned}$$

4. Dualité

Soit $Map(Is(N), \mathbb{Z})$ l'ensemble des applications de l'ensemble $Is(N)$ dans \mathbb{Z} . Cet ensemble a une structure de $\mathbb{Z}[\Gamma]$ -module pour l'action définie par

$$\gamma f : \sigma \mapsto f(\sigma \circ \gamma).$$

Il existe une forme bilinéaire invariante par l'action de Γ , non dégénérée :

$$\begin{aligned} \mathbb{Z}[Is(N)] \times Map(Is(N), \mathbb{Z}) &\longrightarrow \mathbb{Z} \\ \left(\sum_{\sigma \in Is(N)} \lambda_{\sigma} \sigma, f \right) &\longmapsto \sum_{\sigma \in Is(N)} \lambda_{\sigma} f(\sigma). \end{aligned}$$

On en déduit donc un $\mathbb{Z}[\Gamma]$ -isomorphisme de $\mathbb{Z}[Is(N)]$ sur

$$Hom(Map(Is(N), \mathbb{Z}), \mathbb{Z}).$$

De même l'ensemble $Map(S_{N, \infty}, \mathbb{Z})$ des applications de $S_{N, \infty}$ dans \mathbb{Z} a une structure de $\mathbb{Z}[\Gamma]$ -module.

Soit $Map(Is(N), \mathbb{Z})^+$ (resp. $Map(Is(N), \mathbb{Z})^-$) l'ensemble des f dans $Map(Is(N), \mathbb{Z})$ tels que $\forall \sigma \in Is(N) f(\sigma) = f(\bar{\sigma})$ (resp. $f(\sigma) = -f(\bar{\sigma})$).

LEMME 4.1.

1) L'application transposée de p_N donne une suite exacte de $\mathbb{Z}[\Gamma]$ -modules :

$$0 \longrightarrow Map(S_{N, \infty}, \mathbb{Z}) \xrightarrow{t_{p_N}} Map(Is(N), \mathbb{Z}) \longrightarrow Map(Is(N), \mathbb{Z})^- \longrightarrow 0$$

le deuxième homomorphisme transforme $f \in Map(Is(N), \mathbb{Z})$ en l'application $\sigma \mapsto f(\sigma) - f(\bar{\sigma})$.

2) L'application t_{p_N} est un isomorphisme de $Map(S_{N, \infty}, \mathbb{Z})$ sur $Map(Is(N), \mathbb{Z})^+$.

3) L'homomorphisme qui à $f \in Map(Is(N), \mathbb{Z})$ associe

$$\left(\sigma \mapsto \frac{f_{p_N}(\sigma)}{2} (f(\sigma) + f(\bar{\sigma})), \sigma \mapsto f(\sigma) - f(\bar{\sigma}) \right)$$

donne une suite exacte de $\mathbb{Z}[\Gamma]$ -modules :

$$\begin{aligned} 0 \longrightarrow Map(Is(N), \mathbb{Z}) &\longrightarrow Map(Is(N), \mathbb{Z})^+ \oplus Map(Is(N), \mathbb{Z})^- \\ &\longrightarrow Map(S_{N, \mathbb{C}}, \mathbb{Z}/2\mathbb{Z}) \longrightarrow 0 \end{aligned}$$

la deuxième application étant induite par l'application qui à f dans l'ensemble $Map(Is(N), \mathbb{Z})$ associe l'application $g : w \mapsto \sum_{\sigma, p_N(\sigma=w)} f(\sigma)$.

Démonstration. L'application ${}^t p_N$ est injective car p_N est surjective. On choisit un système de représentants de $Is(N)/Gal(\mathbb{C}, \mathbb{R})$. Si g appartient à $Map(Is(N), \mathbb{Z})^-$, alors l'application f définie par $\sigma \mapsto g(\sigma)$, $\bar{\sigma} \mapsto 0$ est un antécédent de g car $f(\bar{\sigma}) - f(\sigma) = -g(\sigma) = g(\bar{\sigma})$. Il suffit de remarquer que $Map(S_{N, \infty}, \mathbb{Z})^- = Map(S_{N, \mathbb{C}}, \mathbb{Z})^-$. L'exactitude en $Map(Is(N), \mathbb{Z})$ équivaut à l'affirmation 2 qui est évidente. Pour la troisième partie, il suffit de remarquer que $f_{p_N(\sigma)} = 1$ (resp. 2) si σ appartient à $Is(N, \mathbb{R})$ (resp. $Is(N, \mathbb{C})$).

Remarque. Pour tout caractère χ de Γ ,

$$Det_{\chi}([Map(S_{N, \mathbb{C}}, \mathbb{C}), 2]) = 2^{Tr_{\chi}(Z[S_{N, \mathbb{C}}])} = 2^{(r_2, F + r'_{1, F})\chi(1) - a_2(\chi)}.$$

5. Structure galoisienne de $\mathbb{R} \otimes_{\mathbb{Q}} N$

Le produit tensoriel $\mathbb{C} \otimes_{\mathbb{Q}} N$ a une structure d'algèbre et une structure de $\mathbb{C}[\Gamma]$ -module pour Γ opérant sur N . Cette action de Γ préserve la structure d'algèbre.

L'application $T_{N, \mathbb{C}}$ de $\mathbb{C} \otimes_{\mathbb{Q}} N$ dans $Map(Is(N), \mathbb{C})$ définie par

$$\forall \sigma \in Is(N), T_{N, \mathbb{C}}(\lambda \otimes x)(\sigma) = \lambda \sigma(x)$$

est un $\mathbb{C}[\Gamma]$ -isomorphisme. C'est de plus une isométrie lorsque l'on munit $\mathbb{C} \otimes_{\mathbb{Q}} N$ de la forme bilinéaire symétrique non dégénérée invariante par Γ

$$Tr_{N/\mathbb{Q}} : (\lambda \otimes x, \mu \otimes y) \mapsto \lambda \mu tr_{N/\mathbb{Q}}(xy)$$

et $Map(Is(N), \mathbb{C})$ de la forme bilinéaire symétrique non dégénérée invariante par Γ , pour laquelle l'ensemble

$$Is(N)^* = \{\delta_{\sigma}, \delta_{\sigma}(\sigma) = 1, \forall \sigma' \in Is(N), \sigma \neq \sigma', \delta_{\sigma}(\sigma') = 0\}$$

est une base orthonormée. Cette forme vérifie donc :

$$(f, f') \mapsto \sum_{\sigma \in Is(N)} f(\sigma) f'(\sigma).$$

L'application $T_{N, \mathbb{C}}$ est alors un isomorphisme d'algèbre si $Map(Is(N), \mathbb{C})$ est muni de la multiplication définie par :

$$\forall \sigma \in Is(N), (ff')(\sigma) = f(\sigma) f'(\sigma).$$

Les formes bilinéaires précédentes sont les formes déduites de la forme trace des \mathbb{C} -algèbres $\mathbb{C} \otimes_{\mathbb{Q}} N$ et $Map(Is(N), \mathbb{C})$.

On fait agir $Gal(\mathbb{C}/\mathbb{R})$ sur $Map(Is(N), \mathbb{C})$ (resp. $Map(S_{N,\infty}, \mathbb{C})$) en posant

$$\forall \sigma \in Is(N), (jf)(\sigma) = j(f(j \circ \sigma) = \overline{f(\overline{\sigma})}).$$

Ainsi l'ensemble $Map(Is(N), \mathbb{C})^{Gal(\mathbb{C}/\mathbb{R})}$ des éléments fixés par $Gal(\mathbb{C}/\mathbb{R})$ est une $\mathbb{R}[\Gamma]$ -algèbre. Si on fait opérer j sur $\mathbb{C} \otimes_{\mathbb{Q}} N$ par son action sur \mathbb{C} , alors $T_{N,\mathbb{C}}$ commute avec l'action de j .

Pour la suite, on pose $tr_{\mathbb{C}/\mathbb{R}} = 1 + j \in \mathbb{Z}[Gal(\mathbb{C}/\mathbb{R})]$; ainsi pour f dans l'ensemble $Map(Is(N), \mathbb{C})$, $tr_{\mathbb{C}/\mathbb{R}}(f)$ est l'application $\sigma \mapsto f(\sigma) + \overline{f(\overline{\sigma})}$.

On a donc le résultat suivant :

THÉORÈME 5.1. *La restriction $T_{N,\mathbb{R}}$ de T_N à $\mathbb{R} \otimes_{\mathbb{Q}} N$ est un isomorphisme de $\mathbb{R}[\Gamma]$ -module et d'algèbre sur $Map(Is(N), \mathbb{C})^{Gal(\mathbb{C}/\mathbb{R})}$; c'est aussi une isométrie pour les formes associées aux formes traces.*

La définition et la compatibilité des actions de $Gal(\mathbb{C}/\mathbb{R})$ et de Γ donnent donc le diagramme commutatif de Γ -modules suivant (les plongements étant des homomorphismes d'algèbre) :

$$\begin{array}{ccc} \mathbb{C} \otimes_{\mathbb{Q}} N & \xrightarrow{T_{N,\mathbb{C}}} & Map(Is(N), \mathbb{C}) \\ \uparrow \downarrow tr_{\mathbb{C}/\mathbb{R}} & & \uparrow \downarrow tr_{\mathbb{C}/\mathbb{R}} \\ \mathbb{R} \otimes_{\mathbb{Q}} N & \xrightarrow{T_{N,\mathbb{R}}} & Map(Is(N), \mathbb{C})^{Gal(\mathbb{C}/\mathbb{R})} \end{array}$$

La trace de $Map(Is(N), \mathbb{C})$ en tant que \mathbb{R} -algèbre est la composée de l'application $tr_{\mathbb{C}/\mathbb{R}}$ ci-dessus et de la trace de $Map(Is(N), \mathbb{C})^{Gal(\mathbb{C}/\mathbb{R})}$ en tant que \mathbb{R} -algèbre.

L'application $tr_{Is/S}$ qui à $f \in Map(Is(N), \mathbb{C})$ associe

$$w \mapsto \sum_{\sigma, p_N(\sigma)=w} f(\sigma)$$

donne une suite exacte scindée de $Gal(\mathbb{C}/\mathbb{R})$ - et de Γ -modules :

$$0 \longrightarrow Ker(tr_{Is/S}) \longrightarrow Map(Is(N), \mathbb{C}) \xrightarrow{tr_{Is/S}} Map(S_{N,\infty}, \mathbb{C}) \longrightarrow 0.$$

D'où une suite exacte scindée de Γ -modules :

$$0 \rightarrow Ker(tr_{Is/S})^{Gal(\mathbb{C}/\mathbb{R})} \rightarrow Map(Is(N), \mathbb{C})^{Gal(\mathbb{C}/\mathbb{R})} \rightarrow Map(S_{N,\infty}, \mathbb{R}) \rightarrow 0.$$

LEMME 5.2.

1) $H^1(\text{Gal}(\mathbb{C}/\mathbb{R}), \text{Map}(Is(N), \mathbb{C})) = 0$, $H^1(\text{Gal}(\mathbb{C}/\mathbb{R}), \text{Ker}(tr_{Is/S})) = 0$ et $H^1(\text{Gal}(\mathbb{C}/\mathbb{R}), \text{Map}(S_{N,\infty}, \mathbb{C})) = 0$.

2) La multiplication par i induit un $\mathbb{R}[\Gamma]$ -isomorphisme de

$$\text{Map}(Is(N, \mathbb{C}), \mathbb{R})^-$$

sur

$$\text{Map}(Is(N, \mathbb{C}), i\mathbb{R})^{\text{Gal}(\mathbb{C}/\mathbb{R})} = \text{Ker}(tr_{Is/S})^{\text{Gal}(\mathbb{C}/\mathbb{R})}.$$

3) L'application ${}^t p_N$ est un homomorphisme d'algèbre de $\text{Map}(S_{N,\infty}, \mathbb{C})$ dans $\text{Map}(Is(N), \mathbb{C})$, injectif et qui commute avec l'action de $\text{Gal}(\mathbb{C}/\mathbb{R})$. La restriction de ${}^t p_N$ à $\text{Map}(S_{N,\infty}, \mathbb{R})$ est donc un $\mathbb{R}[\Gamma]$ -isomorphisme d'algèbre de $\text{Map}(S_{N,\infty}, \mathbb{R})$ sur $\text{Map}(Is(N), \mathbb{R})^{\text{Gal}(\mathbb{C}/\mathbb{R})} = \text{Map}(Is(N), \mathbb{R})^+$.

Démonstration.

1) Le $\text{Gal}(\mathbb{C}/\mathbb{R})$ -module $\text{Map}(Is(N), \mathbb{C})$ se décompose en somme directe $\text{Map}(Is(N, \mathbb{R}), \mathbb{C}) \oplus \text{Map}(Is(N, \mathbb{C}), \mathbb{C})$. On a

$$H^1(\text{Gal}(\mathbb{C}/\mathbb{R}), \text{Map}(Is(N, \mathbb{R}), \mathbb{C})) = 0$$

par le théorème de la base normale. Comme $\text{Map}(Is(N, \mathbb{C}), \mathbb{C})$ est un $\text{Gal}(\mathbb{C}/\mathbb{R})$ -module induit,

$$H^1(\text{Gal}(\mathbb{C}, \mathbb{R}), \text{Map}(Is(N, \mathbb{C}), \mathbb{C})) = 0$$

par le lemme de Shapiro. Par le théorème de la base normale,

$$H^1(\text{Gal}(\mathbb{C}/\mathbb{R}), \text{Map}(S_{N,\infty}, \mathbb{C})) = 0.$$

Le dernier résultat s'en déduit par la suite exacte de cohomologie (qui est ici scindée).

2) Les résultats 2 et 3 se démontrent par simple vérification.

Le diagramme suivant est donc commutatif et scindé :

$$\begin{array}{ccccccc} 0 & \longrightarrow & \text{Map}(Is(N, \mathbb{C}), \mathbb{R})^- & \longrightarrow & R \otimes_{\mathbb{Q}} N & \xrightarrow{{}^t \tau_{N,R}} & \text{Map}(S_{N,\infty}, \mathbb{R}) \longrightarrow 0 \\ & & \downarrow \times i & & \downarrow \tau_{N,R} & & \parallel \\ 0 & \longrightarrow & \text{Map}(Is(N, \mathbb{C}), i\mathbb{R})^{\text{Gal}(\mathbb{C}/\mathbb{R})} & \longrightarrow & \text{Map}(Is(N), \mathbb{C})^{\text{Gal}(\mathbb{C}/\mathbb{R})} & \xrightarrow{{}^t \tau_{N,R}} & \text{Map}(S_{N,\infty}, \mathbb{R}) \longrightarrow 0 \end{array}$$

où l'on note $T_{N,\mathbb{R}}^+$ l'application qui à $\lambda \otimes x \in \mathbb{R} \otimes_{\mathbb{Q}} N$ associe

$$w \mapsto \sum_{\sigma, p_N(\sigma)=w} \lambda\sigma(x) ;$$

de même on note $T_{N,\mathbb{R}}^-$ la projection de $\mathbb{R} \otimes_{\mathbb{Q}} N$ sur $Map(Is(N, \mathbb{C}), \mathbb{R})^-$; c'est l'application qui à $\lambda \otimes x \in \mathbb{R} \otimes_{\mathbb{Q}} N$ associe

$$\sigma \mapsto \frac{\lambda(\sigma(x) - \bar{\sigma}(x))}{i}.$$

Remarque. Pour tout caractère χ de Γ ,

$$Det_{\chi}([Map(Is(N, \mathbb{C}), \mathbb{C})^-, i]) = i^{Tr_{\chi}(Z[Is(N)]^-)} = i^{r_2 + r_1 \chi(1) + a_2(\chi)} = i^{a_3(\chi)}.$$

La définition et la compatibilité des actions de $Gal(\mathbb{C}, \mathbb{R})$ et de Γ donnent donc le diagramme commutatif de Γ -modules suivant (les plongements étant des homomorphismes d'algèbre) :

$$\begin{array}{ccc} Map(S_{N,\infty}, \mathbb{C}) & \xrightleftharpoons[\iota_{p_N}]{tr_{Is/S}} & Map(Is(N), \mathbb{C}) \\ \uparrow \downarrow tr_{\mathbb{C}/\mathbb{R}} & & \uparrow \downarrow tr_{\mathbb{C}/\mathbb{R}} \\ Map(S_{N,\infty}, \mathbb{R}) & \xrightleftharpoons[\iota_{p_N}]{tr_{Is/S}} & Map(Is(N), \mathbb{C})^{Gal(\mathbb{C}/\mathbb{R})} \end{array}$$

6. Structure galoisienne de $(\mathbb{R} \otimes_{\mathbb{Q}} N)^*$

La structure galoisienne de $(\mathbb{R} \otimes_{\mathbb{Q}} N)^*$ est décrite en généralisant les deux isomorphismes classiques suivants :

$$\begin{aligned} \mathbb{R} \times \mathbb{Z}/2\mathbb{Z} &\longrightarrow \mathbb{R}^* \\ (\lambda, \varepsilon) &\longmapsto (-1)^\varepsilon e^\lambda, \end{aligned}$$

dont l'application réciproque est $x \longmapsto (\ln(|x|), \text{sign}(x))$, où pour x réel $\text{sign}(x)$ est défini par $(-1)^{\text{sign}(x)} = x/|x|$, et

$$\begin{aligned} \mathbb{R} \times \mathbb{R}/2\pi\mathbb{Z} &\longrightarrow \mathbb{C}^* \\ (a, \theta) &\longmapsto e^{a/2} e^{i\theta}, \end{aligned}$$

dont l'application réciproque est $z \longmapsto (\ln(z\bar{z}), \text{arg}(z))$.

Soit U le groupe des nombres complexes de module 1 ; il est isomorphe à $\mathbb{R}/2\pi\mathbb{Z}$; cet isomorphisme conserve l'action de $\text{Gal}(\mathbb{C}, \mathbb{R})$ si on fait opérer j sur $\mathbb{R}/2\pi\mathbb{Z}$ par la multiplication par -1 .

Si w est une place de N et σ_w tel que $p_N(\sigma_w) = w$, on pose

$$\begin{aligned} \forall x \in N \quad \|x\|_w &= |\sigma_w(x)| && \text{si } w \in S_{N, \mathbb{R}}, \\ \|x\|_w &= \sigma_w(x)\bar{\sigma}_w(x) && \text{si } w \in S_{N, \mathbb{C}}. \end{aligned}$$

Cette définition ne dépend pas du choix de σ tel que $p_N(\sigma) = w$.

Comme $T_{N, \mathbb{C}}$ est un isomorphisme d'algèbre, $T_{N, \mathbb{C}}$ induit un $\mathbb{Z}[\Gamma]$ -isomorphisme de $(\mathbb{C} \otimes_{\mathbb{Q}} N)^*$ sur $\text{Map}(\text{Is}(N), \mathbb{C}^*)$.

Soit \exp_{I_S} (respectivement \exp_S) l'application de $\text{Map}(\text{Is}(N), \mathbb{C})$ (respectivement $\text{Map}(S_{N, \infty}, \mathbb{C})$) dans $\text{Map}(\text{Is}(N), \mathbb{C}^*)$ (resp. $\text{Map}(S_{N, \infty}, \mathbb{C}^*)$) qui à f associe l'application définie par

$$\sigma \longmapsto \exp(f(\sigma)).$$

L'application $n_{I_S/S}$ qui à $f \in \text{Map}(\text{Is}(N), \mathbb{C}^*)$ associe

$$w \longmapsto \prod_{\sigma, p_N(\sigma)=w} f(\sigma)$$

donne un diagramme exact et commutatif, où les homomorphismes préservent à la fois l'action de Γ et celle de $\text{Gal}(\mathbb{C}, \mathbb{R})$ et où les suites verticales sont scindées :

$$\begin{array}{ccccccc}
 & & 0 & & 0 & & 1 \\
 & & \downarrow & & \downarrow & & \downarrow \\
 0 & \longrightarrow & K & \longrightarrow & \text{Ker}(tr_{I_s/S}) & \xrightarrow{\text{exp}_{I_s}} & \text{Ker}(n_{I_s/S}) \longrightarrow 1 \\
 & & \downarrow & & \downarrow & & \downarrow \\
 0 & \longrightarrow & \text{Map}(Is(N), 2i\pi\mathbb{Z}) & \longrightarrow & \text{Map}(Is(N), \mathbb{C}) & \xrightarrow{\text{exp}_{I_s}} & \text{Map}(Is(N), \mathbb{C}^*) \longrightarrow 1 \\
 & & \downarrow tr_{I_s/S} & & \downarrow tr_{I_s/S} & & \downarrow n_{I_s/S} \\
 0 & \longrightarrow & \text{Map}(S_{N,\infty}, 2i\pi\mathbb{Z}) & \longrightarrow & \text{Map}(S_{N,\infty}, \mathbb{C}) & \xrightarrow{\text{exp}_S} & \text{Map}(S_{N,\infty}, \mathbb{C}^*) \longrightarrow 1 \\
 & & \downarrow & & \downarrow & & \downarrow \\
 & & 0 & & 0 & & 1
 \end{array}$$

Les suites horizontales ne sont pas scindées. Toutefois, l'isomorphisme réciproque défini par l'application exp_{I_s} (resp. exp_S) de $\text{Map}(Is(N), \mathbb{C}^*)$ (resp. $\text{Map}(S_{N,\infty}, \mathbb{C}^*)$) dans $\text{Map}(Is(N), \mathbb{C})/\text{Map}(Is(N), 2i\pi\mathbb{Z})$ (resp. $\text{Map}(S_{N,\infty}, \mathbb{C})/\text{Map}(S_{N,\infty}, 2i\pi\mathbb{Z})$) est noté ln_{I_s} (resp. ln_S).

En notant $\text{exp}_{\mathbb{C}} = (T_{N,\mathbb{C}})^{-1} \circ \text{exp}_{I_s} \circ T_{N,\mathbb{C}}$, on déduit du diagramme précédent la proposition :

PROPOSITION 6.1.

La suite de $\text{Gal}(\mathbb{C}/\mathbb{R})$ - et Γ -modules suivante est exacte :

$$0 \longrightarrow \text{Map}(Is(N), 2i\pi\mathbb{Z}) \xrightarrow{(T_{N,\mathbb{C}})^{-1}} \mathbb{C} \otimes_{\mathbb{Q}} N \xrightarrow{\text{exp}_{\mathbb{C}}} (\mathbb{C} \otimes_{\mathbb{Q}} N)^* \longrightarrow 1.$$

LEMME 6.2.

- 1) $H^1(\text{Gal}(\mathbb{C}/\mathbb{R}), \text{Map}(Is(N), \mathbb{C}^*)) = H^1(\text{Gal}(\mathbb{C}/\mathbb{R}), \text{Map}(Is(N), U)) = 0$,
 $H^1(\text{Gal}(\mathbb{C}/\mathbb{R}), \text{Map}(S_{N,\infty}, \mathbb{C}^*)) = 0$.
- 2) $H^1(\text{Gal}(\mathbb{C}/\mathbb{R}), \text{Map}(S_{N,\infty}, 2i\pi\mathbb{Z}))$ est isomorphe à $\text{Map}(S_{N,\infty}, \mathbb{Z}/2\mathbb{Z})$,
 et $H^1(\text{Gal}(\mathbb{C}/\mathbb{R}), \text{Map}(Is(N), 2i\pi\mathbb{Z}))$ est isomorphe à $\text{Map}(S_{N,\mathbb{R}}, \mathbb{Z}/2\mathbb{Z})$.
- 3) $\text{Ker}(n_{I_s/S})^{\text{Gal}(\mathbb{C}/\mathbb{R})} = \text{Map}(Is(N), U)^{\text{Gal}(\mathbb{C}/\mathbb{R})}$.
- 4) La multiplication par $2i\pi$ induit un isomorphisme :

$$\text{Map}(Is(N), \mathbb{C}, \mathbb{Z})^- \xrightarrow{\times 2i\pi} \text{Map}(Is(N), 2i\pi\mathbb{Z})^{\text{Gal}(\mathbb{C}/\mathbb{R})}.$$

Démonstration.

Pour M égal à \mathbb{C}^* , U ou $2i\pi\mathbb{Z}$, le $Gal(\mathbb{C}/\mathbb{R})$ -module $Map(Is(N), M)$ (resp. $Map(S_{N,\infty}, M)$) se décompose en somme directe

$$Map(Is(N, \mathbb{R}), M) \oplus Map(Is(N, \mathbb{C}), M)$$

(resp. $Map(S_{N,\mathbb{R}}, M) \oplus Map(S_{N,\mathbb{C}}, M)$).

1) Comme $Map(Is(N, \mathbb{C}), M)$ est un $Gal(\mathbb{C}/\mathbb{R})$ -module induit, les groupes de cohomologie H^1 correspondants sont nuls.

2) Les groupes

$$H^1(Gal(\mathbb{C}/\mathbb{R}), Map(S_{N,\infty}, \mathbb{C}^*)),$$

$$H^1(Gal(\mathbb{C}/\mathbb{R}), Map(Is(N, \mathbb{R}), \mathbb{C}^*))$$

et

$$H^1(Gal(\mathbb{C}/\mathbb{R}), Map(Is(N, \mathbb{R}), U))$$

sont nuls par le théorème 90 de Hilbert.

3) On part de la suite exacte :

$$0 \longrightarrow Map(S_{N,\infty}, 2i\pi\mathbb{Z}) \xrightarrow{\times 2} Map(S_{N,\infty}, 2i\pi\mathbb{Z}) \longrightarrow$$

$$Map(S_{N,\infty}, \mathbb{Z}/2\mathbb{Z}) \longrightarrow 0$$

où la deuxième application est donnée par la division par $2i\pi$.

Comme $Map(S_{N,\infty}, 2i\pi\mathbb{Z})^{Gal(\mathbb{C}/\mathbb{R})}$ est nul, la suite de cohomologie donne l'isomorphisme entre

$$H^1(Gal(\mathbb{C}/\mathbb{R}), Map(S_{N,\infty}, 2i\pi\mathbb{Z}))$$

et

$$Map(S_{N,\infty}, \mathbb{Z}/2\mathbb{Z}).$$

Donc

$$H^1(Gal(\mathbb{C}/\mathbb{R}), Map(Is(N), 2i\pi\mathbb{Z}))$$

$$= H^1(Gal(\mathbb{C}/\mathbb{R}), Map(Is(N, \mathbb{R}), 2i\pi\mathbb{Z}))$$

$$= H^1(Gal(\mathbb{C}/\mathbb{R}), Map(S_{N,\mathbb{R}}, 2i\pi\mathbb{Z}))$$

$$\simeq Map(S_{N,\mathbb{R}}, \mathbb{Z}/2\mathbb{Z}).$$

4) Soit $f \in \text{Map}(Is(N), \mathbb{C}^*)$ telle que $\forall \sigma \in Is(N, \mathbb{C}), f(\sigma) = \overline{f(\bar{\sigma})}$. Alors $f(\sigma)f(\bar{\sigma}) = 1$ si et seulement si $f(\sigma) \in U$.

5) Le dernier résultat se vérifie directement.

On obtient donc les deux suites exactes suivantes, où les homomorphismes préservent l'action de Γ :

$$0 \rightarrow \text{Map}(Is(N), 2i\pi\mathbb{Z})^{Gal(\mathbb{C}/\mathbb{R})} \rightarrow \text{Map}(Is(N), \mathbb{C})^{Gal(\mathbb{C}/\mathbb{R})} \xrightarrow{\text{exp}_{Is}} \\ \text{Map}(Is(N), \mathbb{C}^*)^{Gal(\mathbb{C}/\mathbb{R})} \xrightarrow{\partial} H^1(Gal(\mathbb{C}/\mathbb{R}), \text{Map}(Is(N), 2i\pi\mathbb{Z})) \rightarrow 0,$$

$$0 \rightarrow \text{Map}(S_{N,\infty}, \mathbb{C})^{Gal(\mathbb{C}/\mathbb{R})} \xrightarrow{\text{exp}_\infty} \text{Map}(S_{N,\infty}, \mathbb{C}^*)^{Gal(\mathbb{C}/\mathbb{R})} \xrightarrow{\partial} \\ H^1(Gal(\mathbb{C}/\mathbb{R}), \text{Map}(S_{N,\infty}, 2i\pi\mathbb{Z})) \rightarrow 0.$$

Du lemme 6.2 et en utilisant la suite exacte de cohomologie, on déduit le corollaire suivant :

COROLLAIRE 6.3. *Le diagramme de la page suivante est un diagramme commutatif de Γ -modules avec suites exactes :*

$$\begin{array}{ccccccc}
 0 & \longrightarrow & \text{Map}(Is(N, C), Z) & \xrightarrow{\times 2\pi} & \text{Map}(Is(N, C), R) & \xrightarrow{\text{exp}_{1z}} & \text{Map}(Is(N, U)Gal(C/R)) \longrightarrow 0 \\
 \downarrow & & \downarrow & & \downarrow \times i & & \downarrow \\
 0 & \longrightarrow & \text{Map}(Is(N, Z)) & \xrightarrow{\times 2\pi} & \text{Map}(Is(N, C)Gal(C/R)) & \xrightarrow{\text{exp}_{1z}} & \text{Map}(Is(N, C^*)Gal(C/R)) \longrightarrow 0 \\
 \downarrow & & \downarrow & & \downarrow \text{tr}_{1z/s} & & \downarrow \\
 0 & \longrightarrow & 0 & \longrightarrow & \text{Map}(S_{N, \infty}, R) & \xrightarrow{\text{exp}_s} & \text{Map}(S_{N, \infty}, R^*) \longrightarrow 0 \\
 & & & & \downarrow & & \downarrow \\
 & & & & 0 & \longrightarrow & \text{Map}(S_{N, C}, Z/2Z) \longrightarrow 0 \\
 & & & & & & \downarrow \\
 & & & & & & 0
 \end{array}$$

En notant $\exp_{N,\mathbb{R}} = (T_{N,\mathbb{R}})^{-1} \circ \exp_{I_S} \circ T_{N,\mathbb{R}}$ et $\text{sign}_{\mathbb{R}}$ le composé de $T_{N,\mathbb{R}}$ et de l'homomorphisme $\text{Map}(Is(N), \mathbb{C}^*)^{\text{Gal}(\mathbb{C}/\mathbb{R})} \rightarrow \text{Map}(S_{N,\mathbb{R}}, \mathbb{Z}/2\mathbb{Z})$ du diagramme ci-dessus, on déduit du diagramme précédent la proposition :

THÉORÈME 6.4. *La suite de Γ -modules suivante est exacte :*

$$0 \rightarrow \text{Map}(Is(N), \mathbb{Z})^- \xrightarrow{2i\pi(T_{N,\mathbb{R}})^{-1}} \mathbb{R} \otimes_{\mathbb{Q}} N \xrightarrow{\exp_{N,\mathbb{R}}} (\mathbb{R} \otimes_{\mathbb{Q}} N)^* \xrightarrow{\text{sign}_{N,\mathbb{R}}} \text{Map}(S_{N,\mathbb{R}}, \mathbb{Z}/2\mathbb{Z}) \rightarrow 0.$$

Remarque. Pour tout caractère χ de Γ ,

$$\begin{aligned} \text{Det}_{\chi}([\text{Map}(Is(N), \mathbb{C})^-, 2i\pi]) &= (2i\pi)^{\text{Tr}_{\chi}(\mathbb{C}[Is(N)])^-} \\ &= (2i\pi)^{r_{2,F}\chi(1)+a_2(\chi)} = (2i\pi)^{a_3(\chi)}, \\ \text{Det}_{\chi}([\text{Map}(S_{N,\mathbb{R}}, \mathbb{C}), 2]) &= 2^{\text{Tr}_{\chi}(\mathbb{C}[S_{N,\mathbb{R}}])} \\ &= 2^{(r_{1,F}-r'_{1,F})\chi(1)}. \end{aligned}$$

La suite exacte :

$$0 \rightarrow \text{Map}(S_{N,\infty}, \mathbb{R}) \xrightarrow{\exp_S} \text{Map}(S_{N,\infty}, \mathbb{R}^*) \rightarrow \text{Map}(S_{N,\infty}, \mathbb{Z}/2\mathbb{Z}) \rightarrow 0$$

est scindée par l'application \ln_S qui à f dans l'ensemble $\text{Map}(S_{N,\infty}, \mathbb{R}^*)$ associe $w \mapsto \ln(|f(w)|)$.

THÉORÈME 5.3. *Soit $\text{Ln}_{N,\mathbb{R}}$ (resp. $\text{sign}_{N,\mathbb{R}}$) l'application de $(\mathbb{R} \otimes_{\mathbb{Q}} N)^*$ dans $\text{Map}(S_{N,\infty}, \mathbb{R})$ (resp. $\text{Map}(S_{N,\infty}, \mathbb{Z}/2\mathbb{Z})$) définie par*

$$\text{Ln}_{N,\mathbb{R}}(\lambda \otimes x) : w \mapsto \ln(|\lambda|^{f_{N,w}} \|x\|_w)$$

respectivement

$$\text{sign}_{N,\mathbb{R}}(\lambda \otimes x) : w \mapsto \text{sign}(\lambda \sigma_w(x)).$$

La suite suivante de Γ -modules est exacte :

$$0 \rightarrow \text{Map}(Is(N, \mathbb{C}), \mathbb{Z})^- \xrightarrow{\times 2\pi} \text{Map}(Is(N, \mathbb{C}), \mathbb{R})^- \xrightarrow{\exp_{N,\mathbb{R}} \circ (T_{N,\mathbb{R}})^{-1}} (\mathbb{R} \otimes_{\mathbb{Q}} N)^* \xrightarrow{\text{Ln}_{N,\mathbb{R}} \oplus \text{sign}_{N,\mathbb{R}}} \text{Map}(S_{N,\infty}, \mathbb{R}) \oplus \text{Map}(S_{N,\mathbb{R}}, \mathbb{Z}/2\mathbb{Z}) \rightarrow 0.$$

Remarque. Les conventions choisies entraînent que :

$$\forall \lambda \otimes x \in (\mathbb{R} \otimes_{\mathbb{Q}} N)^*, \quad \sum_{w \in S_{N,\infty}} \text{Ln}_{N,\mathbb{R}}(\lambda \otimes x)(w) = [N : \mathbb{Q}] \ln |\lambda| + \ln(|N_{N/\mathbb{Q}}(x)|)$$

7. Structure galoisienne des racines de l'unité

Soit μ_N le groupe des racines de l'unité contenues dans N . L'ordre de μ_N est noté $|\mu_N|$, c'est un entier pair. On pose :

$$m_N = |\mu_N|/2, \text{ si } |\mu_N|/2 \text{ est impair}$$

$$m_N = |\mu_N| \text{ sinon.}$$

En application des paragraphes précédents, la structure galoisienne du groupe des unités peut être décrite. Ce point de vue doit pouvoir permettre d'aborder l'interprétation algébrique de l'équation fonctionnelle des séries L d'Artin d'une façon nouvelle.

Soit σ_0 un automorphisme de N dans \mathbb{C} et soit ζ une racine primitive m_N -ème de l'unité contenue dans N tels que $\sigma_0(\zeta) = e^{2i\pi/m_N}$. Pour tout σ dans $Is(N)$, il existe un unique entier i_σ compris entre 0 et $m_N - 1$, (inversible modulo m_N si $m_N \neq 1$) tel que :

$$\sigma(\zeta) = \sigma_0(\zeta)^{i_\sigma}.$$

L'entier i_σ ne dépend pas du choix de la racine ζ ; si i'_σ est l'entier défini à partir de l'automorphisme σ'_0 , alors il existe un entier k inversible modulo m_N , ($ki_{\sigma'_0} \equiv 1 \pmod{m_N}$), tel que $\forall \sigma \in Is(N)$, $i_\sigma \equiv ki'_\sigma \pmod{m_N}$. Comme $\overline{\sigma_0}(\zeta) = \sigma_0(\zeta)^{-1}$, $i_{\overline{\sigma}}$ est congru à $-i_\sigma$ modulo m_N , ($i_{\overline{\sigma}} = m_N - i_\sigma$).

DEFINITION 7.1. Soit $\{x\}$ la partie fractionnaire du nombre rationnel x ; ainsi $x - \{x\} \in \mathbb{Z}$ et $0 \leq \{x\} < 1$. On appelle module de Stickelberger, noté $MS(N)$, le sous \mathbb{Z} -module de $Map(Is(N), \mathbb{Q})$ engendré par les applications f_τ définies par :

$$f_\tau(\sigma) = \frac{1}{2} - \left\{ \frac{i_\tau i_\sigma}{m_N} \right\}.$$

Exemples.

1) Soit $N = \mathbb{Q}(\zeta_m)$ où ζ_m est une racine primitive m -ème de l'unité. Pour tout σ dans $Is(N)$, il existe $\gamma_\sigma \in Gal(N, \mathbb{Q})$ tel que $\sigma \circ \gamma_\sigma = \sigma_0$. L'isomorphisme de $\mathbb{Z}[Gal(N/\mathbb{Q})]$ -module

$$f \mapsto \sum_{\tau \in Is(N)} f(\tau) \gamma_\tau$$

de $Map(Gal(N, \mathbb{Q}), \mathbb{Q})$ sur $\mathbb{Q}[Gal(N/\mathbb{Q})]$ transforme $MS(N)$ en l'idéal engendré par l'élément de Stickelberger θ_0 , (voir [W], page 95).

2) Si μ_N est d'ordre 2, $\zeta = 1$ et pour tout σ dans $Is(N)$, $\sigma(\zeta) = \sigma_0(\zeta)$, donc $i_\sigma = 0$; $MS(N)$ est le sous \mathbb{Z} -module de $Map(Is(N), \mathbb{Q})$ engendré par les applications f_τ telles que $\forall \sigma \in Is(N)$, $f_\tau(\sigma) = \frac{1}{2}$.

3) Si μ_N est d'ordre supérieur à 2, alors $Is(N, \mathbb{R})$ et $S_{N, \mathbb{R}}$ sont vides.

PROPOSITION 7.2. *Supposons que μ_N est d'ordre supérieur à 2. Le module $MS(N)$ est un $\mathbb{Z}[\Gamma]$ -module inclus dans $Map(Is(N), \mathbb{Q})^-$. Soit*

$$\mu_{N, \infty} = 2i\pi(MS(N) + Map(Is(N), \mathbb{Z}))^-.$$

La restriction de $\exp_{N, \mathbb{R}} \circ (T_{N, \mathbb{R}})^{-1}$ à $\mu_{N, \infty}$ transforme

$$F : \sigma \mapsto 2i\pi \sum_{\tau \in Is(N)} \lambda_\tau \left(\frac{1}{2} - \left\{ \frac{i_\tau i_\sigma}{m_N} \right\} \right)$$

en

$$(-1)^{\sum \tau \lambda_\tau} \zeta^{-\sum \tau \lambda_\tau i_\tau}$$

et donne une suite exacte de $\mathbb{Z}[\gamma]$ -modules :

$$0 \longrightarrow Map(Is(N), \mathbb{Z})^- \xrightarrow{\times 2i\pi} \mu_{N, \infty} \longrightarrow \mu_N \longrightarrow 0.$$

Démonstration. Comme $i_{\bar{\sigma}} = m_N - i_\sigma$, on a $\frac{1}{2} - \left\{ \frac{i_\tau i_{\bar{\sigma}}}{m_N} \right\} = -\frac{1}{2} + \left\{ \frac{i_\tau i_\sigma}{m_N} \right\}$. Donc $MS(N)$ est inclus dans $Map(Is(N), \mathbb{Z})^-$.

Comme $\sigma(\zeta) = \exp\left(\frac{2i\pi i_\sigma}{m_N}\right)$ et que $\exp_{N, \mathbb{R}} \circ (T_{N, \mathbb{R}})^{-1} = (T_{N, \mathbb{R}})^{-1} \circ \exp_{Is}$, on a

$$\begin{aligned} \exp_{Is(F)}(\sigma) &= \exp\left(2i\pi \sum_{\tau \in Is(N)} \lambda_\tau \left(\frac{1}{2} - \left\{ \frac{i_\tau i_\sigma}{m_N} \right\} \right)\right) \\ &= \exp\left(2i\pi \sum_{\tau \in Is(N)} \lambda_\tau \left(\frac{1}{2} - \frac{i_\tau i_\sigma}{m_N} \right)\right) \\ &= (-1)^{\sum \tau \lambda_\tau} \sigma(\zeta^{-\sum \tau \lambda_\tau i_\tau}) \end{aligned}$$

et cet élément est bien l'image par $(T_{N, \mathbb{R}})^{-1}$ de $(-1)^{\sum \tau \lambda_\tau} \zeta^{\sum \tau \lambda_\tau i_\tau}$. La surjectivité vient du fait que par définition de ζ , $-\zeta$ engendre μ_N .

PROPOSITION 7.3. *Supposons que μ_N est d'ordre 2. Soit*

$$\mu_{N, \infty} = 2i\pi(MS(N) + Map(Is(N), \mathbb{Z}))^-$$

C'est le sous-module de $Map(Is(N), \mathbb{R})^-$ formé des éléments f tels que

$$\forall \sigma \in Is(N), f(\sigma) - f(\bar{\sigma}) \in i\pi\mathbb{Z},$$

$$\exists \lambda_f \in \mathbb{Z}, \exists g \in Map(Is(N), \mathbb{Z}), \forall \sigma \in Is(N), f(\sigma) = i\pi\lambda_f + 2i\pi g(\sigma).$$

La restriction de $\exp_{N, \mathbb{R}} \circ (T_{N, \mathbb{R}})^{-1}$ à $\mu_{N, \infty}$ transforme $f \in \mu_{N, \infty}$ en $(-1)^{\lambda_f}$ et donne une suite exacte de $\mathbb{Z}[\Gamma]$ -modules :

$$0 \rightarrow Map(Is(N), \mathbb{Z})^- \xrightarrow{\times 2i\pi} \mu_{N, \infty} \rightarrow \mu_N \xrightarrow{sign_{N, \mathbb{R}}} Sw(Map(S_{N, \mathbb{R}}, \mathbb{Z}), 2)/2Map(S_{N, \mathbb{R}}, \mathbb{Z}) \rightarrow 0$$

Démonstration. On part de la suite exacte :

$$0 \longrightarrow Map(Is(N), 2i\pi\mathbb{Z}) \longrightarrow 2i\pi(MS(N) + Map(Is(N), \mathbb{Z})) \xrightarrow{\exp_{Is}} \mu_N \longrightarrow 0.$$

Puis on applique la suite exacte de cohomologie, l'image de $sign_{N, \mathbb{R}}$ est l'ensemble des f dans $Map(S_{N, \mathbb{R}}, \mathbb{Z}/2\mathbb{Z})$ qui sont constantes. En identifiant $Map(S_{N, \mathbb{R}}, \mathbb{Z}/2\mathbb{Z})$ et $Map(S_{N, \mathbb{R}}, \mathbb{Z})/2Map(S_{N, \mathbb{R}}, \mathbb{Z})$, on obtient le résultat.

Remarque. Considérons la suite exacte de \mathcal{K} -théorie pour S contenant 2 (voir [Q]) :

$$\mathcal{K}_1(\mathbb{C}[\Gamma]) \xrightarrow{\delta} \mathcal{K}_{0, rel}^S(\mathbb{Z}[\Gamma]) \longrightarrow \mathcal{K}_0^S(\mathbb{Z}[\Gamma]) \longrightarrow \mathcal{K}_0(\mathbb{C}[\Gamma]).$$

1) On suppose que μ_N est d'ordre supérieur ou égal à 2. Donc, dans $\mathcal{K}_{0, rel}^S(\mathbb{Z}[\Gamma])$,

$$\begin{aligned} & [Map(Is(N), \mathbb{Z})^-, 2i\pi, (MS(N) + Map(Is(N), \mathbb{Z}))^-] \\ &= [Map(Is(N), \mathbb{Z})^-, 2i\pi, Map(Is(N), \mathbb{Z})^-] \\ & \quad + [Map(Is(N), \mathbb{Z})^-, Id, MS(N) + Map(Is(N), \mathbb{Z})^-] \\ &= \delta([\mathbb{C}[Is(N)]^-, 2i\pi]) + [MS(N) \cap Map(Is(N), \mathbb{Z})^-, Id, MS(N)]. \end{aligned}$$

Soit θ_0 le $\mathbb{Q}[\Gamma]$ -endomorphisme de $Map(Is(N), \mathbb{C})$ défini par

$$\forall f \in Map(Is(N), \mathbb{Q}), \theta_{0, N}(f) : \tau \mapsto \sum_{\sigma \in Is(N)} \left(\frac{1}{2} - \left\{ \frac{i_\tau i_\sigma}{m_N} \right\} \right) f(\sigma).$$

Alors $MS(N) = \theta_{0, N}(Map(Is(N), \mathbb{Z}))$.

On a $\theta_{0,N}(\overline{f}) = -\theta_{0,N}(f)$, donc $\theta_{0,N}(Map(Is(N), \mathbb{C})^+) = 0$.

De plus

$$\begin{aligned}
 [MS(N) \cap Map(Is(N), \mathbb{Z})^-, Id, MS(N)] = \\
 [MS(N) \cap Map(Is(N), \mathbb{Z})^-, Id, Map(Is(N), \mathbb{Z})^-] \\
 + [Map(Is(N), \mathbb{Z})^-, Id, MS(N)].
 \end{aligned}$$

Alors $[Map(Is(N), \mathbb{Z})^-, Id, MS(N)] = \delta([Map(Is(N), \mathbb{C})^-, \theta_{0,N}])$.

2) On suppose que μ_N est d'ordre 2. Si $Map(S_N, \mathbb{R}, \mathbb{Z})$ est non vide, alors pour tout f dans $\mu_{N,\infty}$, le coefficient λ_f est nul. La multiplication par $2i\pi$ est donc un isomorphisme de $Map(Is(N), \mathbb{Z})^-$ sur $\mu_{N,\infty}$. Le $\mathbb{Z}[\Gamma]$ -module $MS(N) + Map(Is(N), \mathbb{Z})$ est isomorphe à $Sw(Map(Is(N), \mathbb{Z}), 2)$. Si Γ est d'ordre impair, ce $\mathbb{Z}[\Gamma]$ -module est localement libre, stablement libre sur tout ordre maximal contenant $\mathbb{Z}[\Gamma]$. On a le diagramme commutatif suivant

$$\begin{array}{ccccccc}
 0 & \longrightarrow & \mathbb{Z} \oplus Map(Is(N), \mathbb{Z})_0 & \xrightarrow{h_1 \oplus Id} & \mathbb{Z} \oplus Map(Is(N), \mathbb{Z})_0 & \longrightarrow & \mu_N \longrightarrow 0 \\
 & & \downarrow \varphi \oplus Id & & \downarrow \varphi \oplus h_1 & & \parallel \\
 0 & \longrightarrow & Map(Is(N), \mathbb{Z}) & \xrightarrow{h_1} & Sw(Map(Is(N), \mathbb{Z}), 2) & \longrightarrow & \mu_N \longrightarrow 0
 \end{array}$$

où h_2 désigne la multiplication par 2 et $Map(Is(N), \mathbb{Z})_0$ désigne le noyau de l'application Tr de $Map(Is(N), \mathbb{Z})$ dans \mathbb{Z} qui à f associe $\sum_{\sigma \in Is(N)} f(\sigma)$ et φ applique $z \in \mathbb{Z}$ en l'application f telle que $\forall \sigma \in Is(N), f(\sigma) = z$.

Soit la suite exacte de \mathcal{K} -théorie pour S contenant 2 :

$$\mathcal{K}_1(\mathbb{Q}[\Gamma]) \xrightarrow{\delta} \mathcal{K}_{0,rel}^S(\mathbb{Z}[\Gamma]) \longrightarrow \mathcal{K}_0^S(\mathbb{Z}[\Gamma]) \longrightarrow \mathcal{K}_0(\mathbb{Q}[\Gamma]).$$

Donc dans $\mathcal{K}_{0,rel}^S(\mathbb{Z}[\Gamma])$

$$\begin{aligned}
 [Map(Is(N), \mathbb{Z}), h_2, MS(N) + Map(Is(N), \mathbb{Z})] = \\
 [\mathbb{Z} \oplus Map(Is(N), \mathbb{Z})_0, h_2 \oplus Id, \mathbb{Z} \oplus Map(Is(N), \mathbb{Z})_0] = \delta([\mathbb{Q}, h_2]).
 \end{aligned}$$

Par l'application Det , on a un isomorphisme entre

$$\mathcal{K}_1(\mathbb{Q}[\Gamma])$$

et

$$Hom_{G_{\mathbb{Q}}}^+(R(\Gamma), \overline{\mathbb{Q}}^*);$$

alors $Det_x([\mathbb{Q}, h_2]) = 2^{\langle x, 1 \rangle} = Det_x([\mathbb{Q}[\Gamma], 2e + 1 - e])$ où e désigne l'idempotent $|\Gamma|^{-1} \sum_{\gamma \in \Gamma} \gamma$. Pour tout nombre premier p ne divisant pas $2|\Gamma|$, $2e + 1 - e \in \mathbb{Z}_p[\Gamma]^*$. Pour tout nombre premier p différent de 2, $2e + 1 - e$ est une unité de tout ordre maximal contenant $\mathbb{Z}_p[\Gamma]$.

Les deux propositions précédentes se résument en le théorème :

THÉORÈME 7.4. *La suite de $\mathbb{Z}[\Gamma]$ -modules suivante est exacte*

$$0 \rightarrow Map(Is(N), \mathbb{Z})^- \xrightarrow{\times 2i\pi} \mu_{N, \infty} \rightarrow \mu_N \xrightarrow{sign_{N, \mathbb{R}}} Sw(Map(S_{N, \mathbb{R}}, \mathbb{Z}), 2) / 2Map(S_{N, \mathbb{R}}, \mathbb{Z}) \rightarrow 0.$$

BIBLIOGRAPHIE

- [Q] J. QUEYRUT, *S-groupe des classes d'un ordre arithmétique*, J. Algebra **76** (1982), 234-260.
- [Sa] P. SAMUEL, *Théorie algébrique des nombres*, Hermann, Paris, 1971.
- [Ta1] J. TATE, Thesis, J. W. S. Cassels and A. Fröhlich, *Algebraic Number Theory*, Academic Press, London, 1967.
- [Ta2] J. TATE, *Les conjectures de Stark sur les fonctions L d'Artin en $s = 0$* , Birkhäuser, 1984.
- [W] L. WASHINGTON, *Introduction to Cyclotomic Fields*, Graduate Texts in Mathematics, Springer-Verlag, 1982.

Jacques Queyrut
 Centre de Recherche en Mathématiques de Bordeaux
 CeReMaB, URA 226
 Université Bordeaux I
 351, cours de la Libération
 F-33405 Talence Cedex 05
 FRANCE