Journal de Théorie des Nombres de Bordeaux

F. M. Dekking

Marches automatiques

Journal de Théorie des Nombres de Bordeaux, tome 5, nº 1 (1993), p. 93-100

<http://www.numdam.org/item?id=JTNB_1993__5_1_93_0>

© Université Bordeaux 1, 1993, tous droits réservés.

L'accès aux archives de la revue « Journal de Théorie des Nombres de Bordeaux » (http://jtnb.cedram.org/) implique l'accord avec les conditions générales d'utilisation (http://www.numdam.org/conditions). Toute utilisation commerciale ou impression systématique est constitutive d'une infraction pénale. Toute copie ou impression de ce fichier doit contenir la présente mention de copyright.

Numdam

Article numérisé dans le cadre du programme
Numérisation de documents anciens mathématiques
http://www.numdam.org/

Journal de Théorie des Nombres
de Bordeaux **5** *(1993), 93–100*

Marches automatiques

par F. M. DEKKING

1. Introduction

Soit A un ensemble, G un groupe abélien localement compact, à base dénombrable, avec unité e, et soit

$$f : A \to G$$

une application de A dans G.

Alors chaque suite infinie $x = (x_n)_{n\geq 1}$ avec $x_n \in A$ pour $n = 1, 2, \ldots$ détermine une *marche* $(S_n(x))_{n\geq 0}$ sur G par $S_0(x) = e$ et

$$S_n(x) = f(x_1) + \cdots + f(x_n). \tag{1.1}$$

Dans [DM] est étudié l'exemple donné par $A = \mathbb{R}$, $G = \mathbb{C}$ et $f(x) = e^{2\pi i x}$.

Ici nous nous intéressons aux *marches automatiques* associées à des suites x engendrées par automates. Nous nous plaçons dans le cadre des suites engendrées par "tag machine" ([Co]), donc x est dit *automatique* si x est une projection d'un point fixe d'une substitution (pas nécessairement de longueur constante) sur l'ensemble A^* des mots composés de lettres de A (qu'on suppose de cardinalité finie). En élargissant l'alphabet A et en changeant la fonction f si nécessaire, on voit qu'on ne perd pas de généralité en supposant que x soit point fixe d'une substitution.

Les conditions sur G entraînent que G est métrisable. Soit $\|\ .\ \|$ une norme associée à une métrique invariante sur G. Nous considérons les propriétés suivantes d'une marche sur G.

$(S_n(x))$ est *récurrente* si pour chaque $\epsilon > 0$ il existe n tel que $\| S_n(x) \| < \epsilon$.

$(S_n(x))$ est *ultimement récurrente* s'il existe k tel que $(S_n(x)) - S_k(x))_{n\geq 0}$

Manuscrit reçu le 24 mars 1992.
Les résultats contenus dans cet article ont été exposés au colloque "Thémate", (CIRM, Luminy, Mai 1991).

est récurrente.

$(S_n(x))$ est *transiente* si $(S_n(x))$ n'est pas ultimement récurrente.

$(S_n(x))$ est *bornée* si $\{\| S_n(x) \|, n \geq 0\}$ est borné.

Pour un groupe G discret on a

$(S_n(x))$ est récurrente si et seulement si Card $\{n \geq 0,\ S_n(x) = e\} = \infty$.

$(S_n(x))$ est transiente si et seulement si Card $\{n \geq 0,\ S_n(x) = S_k(x)\}$ est fini pour chaque $k \geq 0$.

$(S_n(x))$ est bornée si et seulement si Card $\{S_n(x),\ n \geq 0\} < \infty$.

Le problème qui se pose est de classifier les marches automatiques selon récurrence, transience ou la propriété d'être borné.

Il est facile de trouver des exemples où la marche est bornée. Prenons $G = \mathbb{R}$, $A = \{a, b\}$, x la suite de Thue-Morse (point fixe de la substitution $a \mapsto ab,\ b \mapsto ba$, avec $x_1 = a$), et $f : A \to G$ définie par $f(a) = +1,\ f(b) = -1$. Puisque x se décompose en mots ab et ba, nous avons

$$\| S_n(x) \| \leq 1,\ n \geq 0.$$

Pour des exemples de marches automatiques bornées dans $\mathbb{R}^3$, associées au pliage de fil de fer, voir [MS].

Dans le cas $G = \mathbb{R}$ les marches automatiques $(S_n(x))_{n \geq 0}$ ont été étudiées par Dumont et Thomas ([DT], [Du]). Leur résultat principal est que si Λ est la valeur propre de Frobenius de la matrice M de la substitution (M est supposée primitive), et λ la deuxième (en module) valeur propre (supposée unique, et satisfaisant à $\lambda > 1$), alors si $n \to \infty$:

$$S_n(x) = (v, f)n + (\log_\Lambda(n))^\alpha\, n^{\log_\Lambda \lambda} F(n) + o\left((\log_\Lambda(n))^\alpha\, n^{\log_\Lambda \lambda}\right),$$

où v est défini par $Mv = \Lambda v$ et $\sum_{a \in A} v_a = 1$, où $\alpha + 1$ est l'ordre de λ dans le polynôme minimal de M, et où $F : [1, \infty) \to \mathbb{R}$ est une fonction continue et bornée.

Ce résultat permet de conclure à la transience de la marche dès que $(v, f) \neq 0$, mais ne permet pas de résoudre le cas général par manque d'information sur les zéros de la fonction F. Qu'il n'est pas simple d'obtenir cette information c'est ce que montre l'analyse du cas Card $(A) = 2$, $G = \mathbb{Z}$ faite par Wen et Wen [WW], qui donnent une classification complète des marches automatiques dans ce cas.

Prenons un exemple. Soit $A = \{a, b\}$, σ la substitution définie par

$$\sigma(a) = aaba, \ \sigma(b) = babb,$$

et f défini par $f(a) = +1$, $f(b) = -1$. Il découle de [WW] que la marche $(S_n(\sigma^\infty(a)))$ est transiente, mais que $(S_n(\sigma^\infty(b)))$ est récurrente.

Donc la classification ne dépend pas seulement de la substitution σ, mais aussi de la première lettre du point fixe. Dans la section suivante nous allons montrer que l'un de ces deux point fixes a un comportement "typique".

2. Le point de vue stationnaire

Un autre aspect pas très satisfaisant de la classification dans la section 1 est que, tandis que la transience est une propriété asymptotique de la marche, ceci n'est pas vrai pour la récurrence : un shift d'une marche qui n'est pas récurrente peut être récurrent. Ceci conduit à considérer avec x toute l'orbite $\mathcal{O}(x) = \{T^n x, \ n \geq 0\}$, avec $T : A^{\mathbb{N}} \to A^{\mathbb{N}}$ défini par $(Tx)_k = x_{k+1}$. Soit x point fixe d'une substitution σ dont la matrice est primitive. Soit $X_\sigma \subset A^{\mathbb{N}}$ la fermeture de l'orbite $\mathcal{O}(x)$. Il est bien connu (voir par exemple [Qu]) que les boréliens $\mathcal{B}$ de X_σ admettent une unique mesure T-invariante μ_σ. Ainsi on associe à chaque substitution primitive un système dynamique ergodique $(X_\sigma, T, \mathcal{B}, \mu_\sigma)$.

Pour les systèmes ergodiques on a un résultat général dû à K. Schmidt ([Sc]). Pour une autre démonstration, voir [Be].

THÉORÈME 1. *Soit pour* $x \in A^{\mathbb{N}} = X$, $(S_n(x)) = (\sum_{k=1}^n f(x_k))$ *la marche déterminée par une fonction* $f : A \to G$. *Si* $(X, T, \mathcal{B}, \mu)$ *est ergodique, alors,*

- *soit* $\mu\{x \in X, \ (S_n(x)) \text{ récurrente}\} = 1$,
- *soit* $\mu\{x \in X, \ (S_n(x)) \text{ transiente}\} = 1$.

Dans le cas $G = \mathbb{R}$ il y a une façon simple de faire la classification (on peut consulter [D1] pour une démonstration).

THÉORÈME 2. *Si* $(X, T, \mathcal{B}, \mu)$ *est ergodique et si* $(S_n(x))$ *est la marche déterminée par une fonction* $f : A \to \mathbb{R}$, *alors*

$$\mu\{x \in X, \ (S_n(x)) \text{ récurrente }\} = 1 \Leftrightarrow \int_X f(x_1) d\mu(x) = 0.$$

Pour le cas d'un système X_σ engendré par une substitution primitive σ on a pour chaque lettre a

$$\mu_\sigma([a]) = v_a,$$

où $[a] = \{x \in X_\sigma,\ x_1 = a\}$, et où $(v_a)_{a\in A}$ est encore le vecteur propre normalisé de Frobenius de la matrice de σ ([Qu, V.14]), donc

$$\int_X f(x_1)d\mu_\sigma(x) = (v, f).$$

Le Théorème 1 implique que μ_σ-presque tous les points sont récurrents si et seulement si $(v, f) = 0$. Donc dans l'exemple à la fin de la section 1 la suite $x = \sigma^\infty(b)$ a un comportement typique.

Dans le cas $G = \mathbb{R}^2$ ou même $G = \mathbb{Z}^2$, le problème de la classification μ_σ-presque sûrement des marches automatiques est ouvert (cf. [D1]).

3. Marches automatiques sur des graphes

On peut étendre la notion de marche sur un groupe discret à des marches sur des graphes. Soit $\mathcal{G} = (V, E)$ un graphe orienté : V est l'ensemble des sommets, $E \subset V \times V$ l'ensemble des arcs, nous écrivons $v \to w$ si $(v, w) \in E$. On considère un graphe orienté étiqueté, avec A l'ensemble des étiquettes, avec la propriété

(3.1) $\qquad \forall v \in V\ \forall a \in A$ il existe $w \in V$ unique tel que $v \xrightarrow{a} w$.

Une suite infinie $x \in A^{\mathbb{N}}$ et un sommet v_0 déterminent une marche $(S_n(x))$ sur $\mathcal{G}$ par

$$S_0(x) = v_0,\ S_{n+1}(x) = v \text{ si } S_n(x)x_{n+1}v,\ n = 0, 1, 2, \ldots.$$

PROPOSITION. *Une marche sur un groupe discret G est une marche sur un graphe étiqueté.*

Démonstration. Soit $f : A \to G$ la fonction qui détermine la marche. Prenons $V = G$, $v_0 = e$ et $v \xrightarrow{a} w$ si $w = v + f(a)$. Puisque l'équation $g + x = h$ dans un groupe a une solution unique, $\mathcal{G}$ satisfait à (3.1). $\square$

Un cas intéressant est le cas où on a

$$\{f(a),\ a \in A\} = \{g_1, g_1^{-1}, \ldots, g_m, g_m^{-1}\},$$

avec $\{g_1, \ldots, g_m\}$ un ensemble de générateurs pour G. Dans ce cas le graphe $\mathcal{G}$ est un graphe de Cayley du groupe G.

Exemple 1. $G =< g_1, g_2, g_3 \mid g_1^2 = g_2^2 = g_3^2 = e >$. Ici $\mathcal{G} = \mathcal{A}_2$, l'arbre homogène d'ordre 2. En remplaçant les arcs orientés g_1 et g_1^{-1} par un seul arc étiqueté (et de même pour g_2, g_3), une marche automatique sur $\mathcal{A}_2$ déterminée par une suite automatique $x \in \{a,b,c\}^{\mathbb{N}}$ est récurrente, c'est-à-dire (Card $\{n \geq 0,\ S_n(x) = v_0\} = \infty$), si, et seulement si, x contient une infinité de palindromes de longueur paire au début de x.

4. Marches orientées

Dans une marche *orientée* sur un groupe la position $S_{n+1}(x)$ ne dépend pas seulement de la position $S_n(x)$ et de la lettre x_{n+1}, mais aussi du dernier pas $S_n(x) - S_{n-1}(x)$. Appelons $O_n(x) = S_n(x) - S_{n-1}(x)$ *l'orientation.* La suite x gouverne maintenant l'orientation, donc pour tout $a \in A$ nous avons une application $\varphi_a : H \to H$, H sous-ensemble de G, et pour $n \geq 0$

$$O_{n+1}(x) = \varphi_{x_{n+1}}(O_n(x)). \tag{4.1}$$

La marche est déterminée par $O_0(x) \in H$, et pour $n \geq 0$

$$S_{n+1}(x) = S_n(x) + O_{n+1}(x).$$

Dans [WW] est considéré le cas $G = \mathbb{Z}$, $H = \{-1,+1\}$, $A = \{a,b\}$, avec $\varphi_a(+1) = -1$, $\varphi_a(-1) = +1$ et $\varphi_b(+1) = +1$, $\varphi_b(-1) = -1$.

Pour les marches sur les graphes orientés étiquetés, $O_n(x)$ sera l' étiquette de l'arc $S_{n-1}(x), S_n(x)$. Donc une *marche orientée* sur un graphe S, satisfaisant à la propriété (3.1), associée à une suite $x \in A^{\mathbb{N}}$ et un ensemble d'étiquettes H, est donnée par des applications $\varphi_a : H \to H$ pour chaque $a \in A$ et

$$S_{n+1}(x) = v \quad \text{si} \quad S_{n-1}(x) \xrightarrow{h} S_n(x) \quad \text{et} \quad S_n(x) \xrightarrow{\varphi_{x_{n+1}}(h)} v.$$

Wen et Wen ([WW]) considèrent la marche orientée sur $\mathcal{A}_2$ donnée par $A = \{r,d,g\}$, $H = \{g_1, g_2, g_3\}$ et

$$\begin{aligned}
&\varphi_r(g_1) = a,\ \varphi_r(g_2) = b,\ \varphi_r(g_3) = g_3,\\
&\varphi_d(g_1) = b,\ \varphi_d(g_2) = c,\ \varphi_d(g_3) = g_1,\\
&\varphi_g(g_1) = c,\ \varphi_g(g_2) = a,\ \varphi_g(g_3) = g_2.
\end{aligned}$$

Soit $\sigma : B^* \to B^*$ la substitution donnée par

$$\sigma(r) = rg,\ \sigma(g) = gd,\ \sigma(d) = dr.$$

Peyrière a posé le problème de la classification de la marche $(S_n(\sigma^\infty(r))$ sur $\mathcal{A}_2$.

Proposition. *Soit $x = \sigma^\infty(r)$ et soit $\| \cdot \|$ la norme usuelle sur $\mathcal{A}_2$ (si v, w ($v \neq w$) $\in V(\mathcal{A}_2)$, il y a une suite unique d'arcs $v \to v_1 \to \dots v_{n-1} \to w$, et $\| v - w \| := n$). Alors*

$$\| S_n(x) - S_0(x) \| \geq \frac{n}{4} - 7.$$

On en déduit que la marche automatique $(S_n(x))$ est transiente, et de capacité nulle :

$$Cap\ ((S_n(x)) := \limsup_{R\to\infty} \frac{\log Card\{\{S_n(x),\ n \geq 0\} \cap \{v \in V(\mathcal{A}_2),\ \| v - S_0(x) \| \leq R\}\}}{R \log 2} = 0.$$

Démonstration. Soit $V = V(\mathcal{A}_2)$, et soit $\psi_a : V \times H \to V \times H$ défini pour chaque $a \in A$ par

$$\psi_a(v, h) = (w, \varphi_a(h)) \quad \text{si} \quad v \overset{\varphi_a(h)}{\to} w,$$

et soit $\psi_{a_1 \dots a_n} = \psi_{a_n} \circ \dots \circ \psi_{a_1}$. On a évidemment

$$(S_n(x), O_n(x)) = \psi_{x_1 \dots x_n}(S_0(x), O_0(x)). \tag{4.2}$$

On vérifie facilement que

$$\begin{cases} \psi_{grg} = \psi_d, \\ \psi_{drd} = \psi_g, \\ \psi_{grd} = \psi_{drg} = \psi_r, \\ \psi_{rr} = Id. \end{cases} \tag{4.3}$$

On en déduit que

$$\begin{aligned} &\psi_{\sigma^4 r} = \psi_{rggdgddr}, \\ &\psi_{\sigma^4 g} = \psi_g \circ \psi_{rr} \circ \psi_{drd} \circ \psi_{gd} = \psi_{gdgg}, \\ &\psi_{\sigma^4 d} = \psi_{gd} \circ \psi_{grg} \circ \psi_{rr} \circ \psi_d = \psi_{ddgd}. \end{aligned}$$

On vérifie en plus que dans toutes les combinaisons $\psi_{\sigma^4 a}\,\psi_{\sigma^4 b}\,\psi_{\sigma^4 c}$ (avec $a, b, c \in A$), après enlèvement de tous les ψ_r par les relations (4.3), il reste au moins deux ψ_g ou ψ_d dans $\psi_{\sigma^4 b}$. Puisque $\sigma^4(x) = x$, ceci implique que dans chaque $\psi_{x_1} \cdots {}_{x_{8n}}$ après enlèvement de tous les ψ_r (sauf au début et à la fin) il reste au moins $2n$ applications ψ_d ou ψ_g. Mais sous ces deux applications on s'éloigne toujours de $S_0(x)$ en l'absence des ψ_r, donc $\| S_{8n}(x) \| \geq 2n$, d' où $\| S_n(x) \| \geq n/4 - 7$ pour chaque $n \geq 0$. □

Cette proposition donne lieu à plusieurs questions. Est ce que la méthode employée marche dans le cas général ? Probablement la réponse est affirmative. (Le lecteur peut se convaincre que même avec des substitutions avec beaucoup de r on peut conclure à la transience, par exemple pour la substitution donnée par $r \to rg$, $g \to rd$, $r \to r$). Est-ce qu'il existe des marches automatiques orientées récurrentes sur $\mathcal{A}_2$? Dans [WW] est donné l'exemple

$$r \to rdrdrdr,\ d \to ddrdrdr,\ g \to ggrgrgr.$$

Cette marche passe par tous les sommets de l'arbre, donc est de capacité 1. Nous allons donner un exemple récurrent d'une tout autre nature, de capacité 0.

Proposition. *La marche orientée sur $\mathcal{A}_2$ selon la somme des chiffres en base 3 modulo 3 est récurrente, non bornée, et de capacité nulle.*

Démonstration. (Esquisse). La substitution σ associée à la somme des chiffres en base 3 modulo 3 est donnée par

$$\sigma(r) = rgd,\ \sigma(g) = gdr,\ \sigma(d) = drg.$$

La récurrence de la marche se déduit immédiatement de la propriété suivante qui se démontre par récurrence (sic), en utilisant (4.3) :

soit $v_n = (gd)^{2^{n-1}}$, i. e. $v_n = gdgd\ldots gd$ de longueur 2^n, alors pour tout $n \geq 1$

$$\{\psi_{\sigma^n r}, \psi_{\sigma^n g}, \psi_{\sigma^n d}\} = \{\psi_r, \psi_{v_n r}, \psi_{r v_n}\}.$$

Une analyse un peu plus profonde montre que la marche est "presque linéaire", donc de capacité nulle. □

Nous allons finir avec le résultat suivant.

Théorème. *Une marche automatique orientée est une marche automatique (non-orientée).*

Démonstration. On peut écrire

$$S_n(x) = \sum_{k=1}^{n} \varphi_{x_k} \circ \varphi_{x_{k-1}} \circ \ldots \varphi_{x_1}(O_0(x)).$$

Dans [D2] il est démontré que la suite $(\varphi_{x_n} \circ \cdots \circ \varphi_{x_1})_{n \geq 1}$ est automatique si x est automatique. Donc $(S_n(x))$ est de la forme (1.1). $\square$

De ce théorème on déduit que le problème de la classification des marches automatiques orientées sur l'arbre homogène d'ordre 2 est équivalent au problème des palindromes pairs posé à la fin de la section 3.

BIBLIOGRAPHIE

[Be] H. C. P. BERBEE, *Recurrence and transience for random walks with stationary increments*, Z. Wahrsch. verw. Geb. **56** (1981), 531–536.

[Co] A. COBHAM, *Uniform tag sequences*, Math. Systems Theory **6** (1972), 164–192.

[D1] F. M. DEKKING, *On transience and recurrence of generalized random walks*, Z. Wahrsch. verw. Geb. **61** (1982), 459–465.

[D2] F. M. DEKKING, *Iteration of maps by an automaton*, (preprint, 1991).

[DM] F. M. DEKKING et M. MENDÈS FRANCE, *Uniform distribution modulo one: a geometrical viewpoint*, J. Reine Angew. Math. **329** (1981), 143–153.

[DT] J.-M. DUMONT et A. THOMAS, *Systèmes de numération et fonctions fractales relatifs aux substitutions*, Theor. Comp. Science **65** (1989), 153–169.

[Du] J.-M. DUMONT, *Summation formulae for substitutions on a finite alphabet*, Number Theory and Physics (Eds: J.-M. Luck, P. Moussa, M. Waldschmidt). Springer Lect. Notes Physics **47** (1990), 185–194.

[MS] M. MENDÈS FRANCE et J. SHALLIT, *Wirebending and continued fractions*, J. Combinatorial Theory Sér A **50** (1989), 1–23.

[Qu] M. QUEFFÉLEC, *Substitution dynamical systems - spectral analysis*, Lect. Notes Math. **1294** (1987), Springer Verlag, Berlin.

[Sc] K. SCHMIDT, *Lectures on cocycles of ergodic transformation groups*, Lect. in Math 1., Mac Millan 1977, Delhi-Bombay-Calcutta-Madras.

[WW] Z.-X WEN et Z.-Y.WEN, *Marches sur les arbres homogènes suivant une suite substitutive*, Séminaire de Théorie des Nombres de Bordeaux, Sér. II, **4** (1992), 155–186.

F. M. Dekking
Faculty of Mathematics and Informatics
Dept. of Statistics Probabilistics Probability
and Operations Research
Mekelweg 4, 2628 CD Delft
PAYS-BAS