JOURNAL DE THÉORIE DES NOMBRES DE BORDEAUX

DOMINIQUE BARBOLOSI

Automates et fractions continues

Journal de Théorie des Nombres de Bordeaux, tome 5, nº 1 (1993), p. 1-22
<http://www.numdam.org/item?id=JTNB_1993__5_1_1_0>

Journal de Théorie des Nombres
de Bordeaux **5** *(1993), 1–22*

Automates et fractions continues

par Dominique Barbolosi

I. Introduction

Soit $\Omega = [0,1]$ et soient les intervalles $I_+(k) =]1/2k, 1/2k-1]$ pour $k = 1,2,3,\cdots$ et $I_-(k) =]1/2k-1, 1/2k-2]$ pour $k = 2,3,4,\cdots$, on pose :

$$I_+ = \bigcup_{k\geq 1} I_+(k) \qquad \text{et} \qquad I_- = \bigcup_{k\geq 2} I_-(k).$$

Soit W la transformation de Ω dans Ω définie par :

$$\begin{aligned} W(x) &= 0 && \text{si } x = 0, \\ W(x) &= x^{-1} - [x^{-1}] && \text{si } x \in I_+, \\ W(x) &= 1 - (x^{-1} - [x^{-1}]) && \text{si } x \in I_-. \end{aligned}$$

et soient b, ε les applications définies sur Ω par :

$$\begin{aligned} &b(x) = [x^{-1}] \text{ si } x \in I_+ \text{ et } b(x) = 1 + [x^{-1}] && \text{si } x \in I_-, \\ &\varepsilon(x) = +1 \quad \text{si } x \in I_+ \text{ et } \varepsilon(x) = -1 && \text{si } x \in I_-, \end{aligned}$$

(on convient de poser $b(0) = \infty$ et $\varepsilon(0) = 1$).

Pour tout ξ élément de Ω on a alors,

$$\xi = (b(\xi) + \varepsilon(\xi)W(\xi))^{-1},$$

et en posant pour simplifier $\varepsilon(W^m(\xi)) = \varepsilon_{m+1}$ et $b(W^m(\xi)) = b_{m+1}$, on obtient :

$$\xi = \underline{1}/\overline{b_1} + \underline{\varepsilon_1}/\overline{b_2} + \cdots + \underline{\varepsilon_{n-1}}/\overline{b_n} + \varepsilon_n W^n(\xi),$$

Manuscrit reçu le 13 septembre 1991, version définitive le 13 mai 1992.
Les résultats contenus dans cet article ont été exposés au colloque "Thémate", (CIRM, Luminy, Mai 1991).

avec pour tout i élément de $\{1, 2, \cdots, n\}$, $b_i \in 2\mathbb{N}+1$, $\varepsilon_i \in \{-1, +1\}$ et $b_i + \varepsilon_i \geq 2$.

Dans le cas où ξ est irrationnel ce W-développement est unique, on l'appelle développement de ξ en fraction continue à quotients partiels impairs (en abrégé f.c.i). Ce développement en f.c.i a été étudié par G. J. Rieger dans [5], [6], [7] et par F. Schweiger dans [8], [9], [10].

On posera $\frac{A_n}{B_n} = \underline{1}/\overline{b_1} + \underline{\varepsilon_1}/\overline{b_2} + \cdots + \underline{\varepsilon_{n-1}}/\overline{b_n}$ et on notera FCI(ξ) la suite des convergents de ξ, $(\frac{A_n}{B_n})_n$, pour le développement en f.c.i. On a alors la relation matricielle, (cf. [10]),

$$\begin{pmatrix} A_{n-1} & A_n \\ B_{n-1} & B_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & b_1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & \varepsilon_1 \\ 1 & b_2 \end{pmatrix} \cdots \begin{pmatrix} 0 & \varepsilon_{n-1} \\ 1 & b_n \end{pmatrix}.$$

De même les développements en fraction continue régulière et à l'entier le plus proche seront notés en abrégé respectivement f.c.r. et f.c.e.p., et les suites respectives des convergents de ξ pour ces deux développements $(p_n/q_n)_n$ et $(E_n/F_n)_n$ seront notées FCR(ξ) et FCEP(ξ). T désignera l'opérateur de Ω dans Ω défini par $T(0) = 0$ et $T(x) = x^{-1} - [x^{-1}]$ si $x \neq 0$, le T-développement associé à un irrationnel ξ de Ω est naturellement le développement en f.c.r. de ξ.

Notons que le développement de ξ en f.c.i. peut encore s'écrire sous une deuxième forme :

$$\xi = \underline{1}/\overline{c_1} + \underline{1}/\overline{c_2} + \cdots + \underline{1}/\overline{c_n} + \sigma_n W^n(\xi),$$

avec $c_i = \sigma_{i-1} b_i$, $\sigma_i = \varepsilon_1 \varepsilon_2 \cdots \varepsilon_i$ et $\sigma_0 = 1$.

Ainsi, suivant que l'on considère son développement en f.c.r. ou en f.c.i. (deuxième forme), ξ peut être représenté soit comme un mot infini sur l'alphabet $\mathcal{A}_0 = \mathbb{N}^*$, soit comme un mot infini sur l'alphabet $\mathcal{A}_1 = 2\mathbb{Z}+1$.

Dans cet article nous utilisons cette deuxième forme pour associer au développement de ξ une factorisation unique (cf. théorème 5) de la matrice des convergents

$$\begin{pmatrix} p_{n-1} & p_n \\ q_{n-1} & q_n \end{pmatrix}$$

On en déduit un algorithme automatique pour décrire exactement l'ensemble FCI(ξ) par simple lecture du développement en f.c.r. de ξ (cf. théorème 5). La méthode utilise un morphisme de monoïde libre de l'alphabet $\mathcal{A} = \mathbb{Z}$ dans le groupe $GL_2(\mathbb{Z})$. Une étude plus précise de FCEP(ξ) est également donnée (cf. théorème 6). Dans un cas comme dans l'autre on montre que l'ensemble des convergents $\frac{p_n}{q_n}$ qui n'apparaissent pas dans FCI(ξ), (respectivement FCEP(ξ)), est reconnaissable par un automate. On en déduit par cette méthode que

$$\mathrm{FCEP}(\xi) \subset \mathrm{FCI}(\xi), \quad (\xi \in \Omega \setminus \mathbb{Q}).$$

Cette inclusion, associé à un résultat de H. Jager et de C. Kraaikamp [3] redonne simplement le résultat de F. Schweiger [10] : pour tout $\xi \in \Omega \setminus \mathbb{Q}$, on a pour une infinité de n,

$$B_n|B_n\xi - A_n| \leq \frac{1}{\sqrt{5}}.$$

Ce travail constitue une partie de ma thèse [1] dont le sujet m'a été proposé par P. Liardet que je tiens à remercier pour l'aide constante qu'il m'a apportée.

II. Passage du développement en f.c.r. au développement en f.c.i.

Commençons par établir quelques formules utiles :

LEMME 1. *Soit $\xi := [0; a_1, a_2, a_3, \cdots]$ le développement en f.c.r. de $\xi \in \Omega \setminus \mathbb{Q}$. Alors :*

(i) si $a_2 = 1$, on a

$$\begin{aligned}\xi &= \underline{1}/\overline{a_1} + \underline{1}/\overline{1} + \underline{1}/\overline{a_3} + T^3\xi \\ &= \underline{1}/\overline{(a_1+1)} - \underline{1}/\overline{(a_3+1)} + T^3\xi,\end{aligned}$$

(i') si $a_2 > 1$, on a

$$\begin{aligned}\xi &= \underline{1}/\overline{a_1} + \underline{1}/\overline{a_2} + T^2\xi \\ &= \underline{1}/\overline{(a_1+1)} - \underline{1}/\overline{1} + \underline{1}/\overline{(a_2-1)} + T^2\xi,\end{aligned}$$

(ii) si $a_1 = 1$, on a

$$\begin{aligned}1 - \xi &= \underline{1}/\overline{(a_2+1)} + T^2\xi \\ &= \underline{1}/\overline{(a_2+2)} - (1 - T^2\xi),\end{aligned}$$

(ii') si $a_1 > 1$, on a

$$\begin{aligned} 1 - \xi &= \underline{1}/\overline{1} + \xi/(1-\xi) \\ &= \underline{1}/\overline{1} + \underline{1}/\overline{(a_1 - 1)} + T\xi \\ &= \underline{1}/\overline{1} + \underline{1}/\overline{a_1} - (1 - T\xi). \end{aligned}$$

Démonstration. Toutes ces égalités s'obtiennent par calcul direct; notons cependant qu'elles se déduisent aussi des relations matricielles suivantes plus générales, avec des nombres réels a, b, c et ε quelconques :

$$\left\{ \begin{array}{l} \begin{pmatrix} 0 & \varepsilon \\ 1 & a \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & b \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & \varepsilon \\ 1 & a+1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & b-1 \end{pmatrix}, \\ \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & a \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & b \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & a+1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & b+1 \end{pmatrix}, \end{array} \right.$$

et

$$\left\{ \begin{array}{l} \begin{pmatrix} -1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & b \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & b+1 \end{pmatrix}, \\ \begin{pmatrix} -1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & a \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & a-1 \end{pmatrix}. \end{array} \right.$$

Soit k le plus petit entier tel que le quotient a_k du développement de ξ en f.c.r. donné au lemme 1 soit pair, (on écarte le cas où tous les quotients partiels sont impairs). Soit $\xi = \underline{1}/\overline{b_1} + \underline{\varepsilon_1}/\overline{b_2} + \cdots + \underline{\varepsilon_{m-1}}/\overline{b_m} + \varepsilon_m W^m \xi$ le développement de ξ en f.c.i. Alors $W^m\xi = T^m\xi$, $\varepsilon_m = 1$ et $b_m = a_m$ pour $m = 1, \cdots, k-1$.

Si $a_{k+1} = 1$, le lemme donne

$$\begin{aligned} &T^{k-1}\xi = \underline{1}/\overline{(a_k + 1)} - W^k\xi, \\ &W^k\xi = (1 - T^k\xi), \\ &b_k = a_k + 1, \\ &\varepsilon_k = -1, \end{aligned}$$

et suivant la parité de a_{k+2} :

$$\begin{aligned} &T^{k-1}\xi = \underline{1}/\overline{(a_k + 1)} - \underline{1}/\overline{(a_{k+2} + 1)} + W^{k+1}\xi, \\ &W^{k+1}\xi = T^{k+2}\xi, \\ &b_{k+1} = a_{k+2} + 1, \\ &\varepsilon_{k+1} = 1, \end{aligned}$$

ou

$$\begin{aligned}
T^{k-1}\xi &= \underline{1}/\overline{(a_k+1)} - \underline{1}/\overline{(a_{k+2}+2)} - W^{k+1}\xi,\\
W^{k+1}\xi &= 1 - T^{k+2}\xi,\\
b_{k+1} &= a_{k+2}+2,\\
\varepsilon_{k+1} &= -1.
\end{aligned}$$

Si $a_{k+1} > 1$, on a encore

$$\begin{aligned}
T^{k-1}\xi &= \underline{1}/\overline{(a_k+1)} - W^k\xi,\\
W^k\xi &= (1 - T^k\xi),\\
b_k &= a_k+1,\\
\varepsilon_k &= -1,
\end{aligned}$$

puis

$$\begin{aligned}
T^{k-1}\xi &= \underline{1}/\overline{(a_k+1)} - \underline{1}/\overline{1} + W^{k+1}\xi,\\
W^{k+1}\xi &= T^k\xi/(1 - T^k\xi),\\
b_{k+1} &= 1,\\
\varepsilon_{k+1} &= 1,
\end{aligned}$$

et suivant la parité de a_{k+2} :

$$\begin{aligned}
T^{k-1}\xi &= \underline{1}/\overline{(a_k+1)} - \underline{1}/\overline{1} + \underline{1}/\overline{(a_{k+1}-1)} + W^{k+2}\xi,\\
W^{k+2}\xi &= T^{k+1}\xi,\\
b_{k+2} &= a_{k+1}-1,\\
\varepsilon_{k+1} &= 1,
\end{aligned}$$

ou

$$\begin{aligned}
T^{k-1}\xi &= \underline{1}/\overline{(a_k+1)} - \underline{1}/\overline{1} + \underline{1}/\overline{a_{k+1}} - W^{k+2}\xi,\\
W^{k+2}\xi &= 1 - T^{k+1}\xi,\\
b_{k+2} &= a_{k+1},\\
\varepsilon_{k+1} &= -1.
\end{aligned}$$

Nous pouvons continuer cette transformation du développement en f.c.r. de ξ en le développement en f.c.i., plus précisement, on a :

THÉORÈME 1. *Soit* $\xi := [0; a_1, a_2, a_3, \cdots]$ *le développement en f.c.r. de* $\xi \in \Omega \setminus \mathbb{Q}$, *soit* $\xi = \underline{1}/\overline{b_1} + \underline{\varepsilon_1}/\overline{b_2} + \cdots + \underline{\varepsilon_{k-1}}/\overline{b_k} + \varepsilon_k W^k\xi$, *le W-développement de* ξ *à l'ordre* k *et soit* $\rho : \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ *l'application définie par*

$$\rho(n) := n + \operatorname{Card}\{k < n;\ b_{k+1} > 1 \text{ et } \varepsilon_k = -1\} - \operatorname{Card}\{k < n;\ b_{k+1} = 1 \text{ et } \varepsilon_k = -1\}.$$

Alors, pour chaque k, l'une des trois possibilités suivantes est satisfaite :

(i) $\varepsilon_k = 1$, $(\varepsilon_{k-1}, b_k) \neq (-1, 1)$ *et* $W^k\xi = T^{\rho(k)}\xi$,

(ii) $\varepsilon_k = 1$, $(\varepsilon_{k-1}, b_k) = (-1, 1)$ *et* $W^k\xi = T^{\rho(k)}\xi/(1 - T^{\rho(k)}\xi)$,

(iii) $\varepsilon_k = -1$ *et* $W^k\xi = 1 - T^{\rho(k)}\xi$.

D'autre part, lorsque $\varepsilon_k = -1$, *on a* $b_{k+1} = 1$ *si et seulement si* $a_{\rho(k)+1} > 1$ *et dans ces conditions :* $W^{k+1}\xi = T^{\rho(k)}\xi/(1 - T^{\rho(k)}\xi)$.

Démonstration. Posons $u = W^k\xi = \underline{1}/\overline{b_{k+1}} + \underline{\varepsilon_{k+1}}/\overline{b_{k+2}} + \cdots$ et $v = T^{k'}\xi$. Supposons que $k' = \rho(k)$ et que l'une des conditions (i), (ii), (iii) soit satisfaite.

Dans le cas $u = v$, $(\varepsilon_k = 1)$, selon la parité de $a_{k'+1}$, le lemme 1 donne :

$$\varepsilon_{k+1} = 1, \qquad b_{k+1} = a_{k'+1}, \qquad Wu = Tv, \qquad \rho(k+1) = \rho(k) + 1,$$

ou

$$\varepsilon_{k+1} = -1, \quad b_{k+1} = a_{k'+1} + 1, \quad Wu = 1 - Tv, \qquad \rho(k+1) = \rho(k) + 1.$$

Dans le cas où $u = v/(1 - v)$, $(\varepsilon_k = 1)$, comme on a $0 < u < 1$, alors nécessairement $a_{k'+1} \geq 2$, d'où

$$u = \underline{1}/\overline{(a_{k'+1} - 1)} + Tv$$

et selon la parité de $a_{k'+1}$:

$$\varepsilon_{k+1} = 1, \quad b_{k+1} = a_{k'+1} - 1, \quad Wu = Tv, \quad \rho(k+1) = \rho(k) + 1,$$

ou

$$\varepsilon_{k+1} = -1, \quad b_{k+1} = a_{k'+1}, \quad Wu = 1 - Tv, \quad \rho(k+1) = \rho(k) + 1,$$

Soit maintenant le cas où $u = 1 - v$, $(\varepsilon_k = -1)$. Si $a_{k'+1} = 1$, suivant la parité de $a_{k'+2}$, le lemme 1 (ii) donne :

$$\varepsilon_{k+1} = 1, \quad b_{k+1} = a_{k'+2} + 1, \quad Wu = T^2v, \quad \rho(k+1) = \rho(k) + 2,$$

ou

$$\varepsilon_{k+1} = -1, \quad b_{k+1} = a_{k'+2} + 2, \quad Wu = 1 - T^2v, \quad \rho(k+1) = \rho(k) + 2.$$

En particulier, on a toujours $(\varepsilon_k, b_{k+1}) \neq (-1, 1)$. Si l'on suppose maintenant $a_{k'+1} > 1$, la partie (ii') du lemme 1 donne :

$$\varepsilon_{k+1} = 1, \quad b_{k+1} = 1, \quad Wu = v/(1-v), \quad \rho(k+1) = \rho(k),$$

avec notamment $(\varepsilon_k, b_{k+1}) = (-1, 1)$ et l'on est ramené au cas précédent. L'une des trois propriétés (i), (ii), (iii) est donc vérifiée pour $k+1$. Pour $k = 0$, la propriété (i) est évidente avec $\rho(0) = 0$, d'où le théorème par récurrence sur k. □

Lagrange a montré [4] que tout nombre quadratique ξ a un développement en f.c.r. ultimement périodique. Dans ce cas, $T^{\rho(k)}\xi$ ne prend qu'un nombre fini de valeurs et l'une des trois possibilités du théorème 1 a lieu périodiquement, pour k assez grand, selon un multiple de la longueur de période du développement de ξ. Il en résulte donc le

COROLLAIRE 1. *Pour que ξ soit un nombre quadratique, il faut et il suffit que son W-développement soit ultimement périodique.*

Le théorème 1 peut s'expliquer en termes d'homographies. En effet, il montre que le W-développement de ξ à l'ordre k ne dépend que de son T-développement à l'ordre $\rho(k)$, de sorte que l'on obtient :

COROLLAIRE 2. *Pour tout entier $k \geq 0$ et tout $t \in [0,1]$, avec les notations et définitions du théorème 1, on a :*

$$\underline{1}/\overline{a_1} + \underline{1}/\overline{a_2} + \cdots + \underline{1}/\overline{a_{\rho(k)}} + t = \underline{1}/\overline{b_1} + \underline{\varepsilon_1}/\overline{b_2} + \cdots + \underline{\varepsilon_{k-1}}/\overline{b_k} + h_k(t),$$

où $h_k(.)$ est l'homographie définie à partir de la fonction $\rho(.)$ par :

(a) $h_k(t) := t$ *si* $\rho(k-1) < \rho(k)$ *et* $\rho(k+1) = \rho(k) + 1$,

(b) $h_k(t) := t/(1-t)$ *si* $\rho(k-1) = \rho(k)$, (*et alors* $\rho(k+1) = \rho(k) + 1$),

(c) $h_k(t) := t - 1$ *dans les autres cas, en notant que :*

$$\rho(k+1) = \rho(k) + 2 \quad \text{si } a_{\rho(k)+1} = 1,$$
$$\rho(k+1) = \rho(k) \quad \text{si } a_{\rho(k)+1} > 1.$$

On peut maintenant comparer facilement les convergents p_k/q_k du développement en f.c.r. de ξ et les convergents A_n/B_n du développement en f.c.i. :

THÉORÈME 2. *Avec les notations précédentes, on a :*

si $\varepsilon_k = 1$: $\dfrac{A_k}{B_k} = \frac{p_{\rho(k)}}{q_{\rho(k)}}$, *et alors* $\rho(k+1) = \rho(k) + 1$,

si $\varepsilon_k = -1$:

$$\frac{A_k}{B_k} = \frac{p_{\rho(k)+1}}{q_{\rho(k)+1}}, \text{ lorsque } \rho(k+1) = \rho(k) + 2,$$

$$\frac{A_k}{B_k} = \frac{p_{\rho(k)-1} + p_{\rho(k)}}{q_{\rho(k)-1} + q_{\rho(k)}} \ (\neq \frac{p_{\rho(k)+1}}{q_{\rho(k)+1}}), \text{ lorsque } \rho(k+1) = \rho(k),$$

(et ce dernier cas correspond aux indices k tels que $(\varepsilon_k, b_{k+1}) = (-1, 1)$).

Démonstration. Lorsque $\varepsilon_k = 1$, on est dans les cas (a) ou (b) du corollaire 2. Le cas (a) donne la première égalité du théorème 2 en $t = 0$. D'après la définition de $\rho(.)$, le cas (b) équivaut à $(\varepsilon_{k-1}, b_k) = (-1, 1)$, or $-\underline{1}/\overline{1} + t/(1-t) = t - 1$, d'où

$$\underline{1}/\overline{a_1} + \underline{1}/\overline{a_2} + \cdots + \underline{1}/\overline{a_{\rho(k)}} + t = \underline{1}/\overline{b_1} + \underline{\varepsilon_1}/\overline{b_2} + \cdots + \underline{\varepsilon_{k-2}}/\overline{b_{k-1}} - 1 + t,$$

et en prenant $t = 0$, on trouve encore $A_k/B_k = p_{\rho(k)}/q_{\rho(k)}$. Dans le cas (c), en prenant $t = 1$, on obtient

$$(*) \quad \underline{1}/\overline{a_1} + \underline{1}/\overline{a_2} + \cdots + \underline{1}/\overline{a_{\rho(k)}} + 1 = \underline{1}/\overline{b_1} + \underline{\varepsilon_1}/\overline{b_2} + \cdots + \underline{\varepsilon_{k-1}}/\overline{b_k},$$

ce qui donne :

$$\frac{(p_{\rho(k)-1} + p_{\rho(k)})}{(q_{\rho(k)-1} + q_{\rho(k)})} = \frac{A_k}{B_k}.$$

Lorsque $\rho(k+1) = \rho(k) + 2$, alors $a_{\rho(k)+1} = 1$, de sorte que :

$$p_{\rho(k)+1} = p_{\rho(k)-1} + p_{\rho(k)} \text{ et } q_{\rho(k)+1} = q_{\rho(k)-1} + q_{\rho(k)},$$

et dans ce cas, on n'a pas un médian mais un convergent. Lorsque $\rho(k+1) = \rho(k)$, cette fois-ci on a $a_{\rho(k)+1} > 1$, et l'on a bien un médian. $\square$

III. Fractions continues et monoïdes

1. Monoïdes libres

Soit $\mathcal{A}$ un ensemble et soit $\mathcal{A}^*$ le monoïde libre engendré par $\mathcal{A}$. Les éléments de $\mathcal{A}^*$ seront vus comme des mots sur l'alphabet $\mathcal{A}$. Si $\alpha =$

$a_1a_2\cdots a_m$ est un tel mot, formé par juxtaposition de lettres a_i de $\mathcal{A}$, on dit que α est de longueur m et on écrit $|\alpha| := m$. Le mot vide est noté $\wedge$, il correspond à l'élément neutre de $\mathcal{A}^*$ et sa longueur est 0. La loi du monoïde $\mathcal{A}^*$ correspond à la *concaténation* $(\alpha,\beta) \to \alpha\beta$ des mots; si $\alpha = a_1a_2\cdots a_m$ et $\beta = b_1b_2\cdots b_n$ alors $\alpha\beta = a_1a_2\cdots a_m b_1 b_2\cdots b_n$. Dans la suite on choisit pour $\mathcal{A}$ l'ensemble des entiers relatifs $\mathbb{Z}$ et on introduit sur $\mathcal{A}^*$ l'automorphisme de conjugaison $\alpha \to \overline{\alpha}$ obtenu en remplaçant chaque lettre par son opposée au sens de la structure de groupe habituelle de $\mathbb{Z}$. On s'intéressera aux sous-alphabets $\mathcal{A}_0 = \mathbb{N}^*$ et $\mathcal{A}_1 = 2\mathbb{Z}+1$. A tout irrationnel ξ de $[0,1]$ son développement en f.c.r. $\xi = [0; a_1, a_2\cdots]$ fournit une suite de mots $a := (a_1a_2\cdots a_k)_{k\geq 1}$, dans $(\mathcal{A}_0)^*$, et de même, le développement en f.c.i. de $\xi = \underline{1/\overline{b_1}} + \underline{\varepsilon_1/\overline{b_2}} + \cdots$ écrit sous la deuxième forme à savoir

$$\xi = [0; c_1, c_2, \cdots],\ (c_k = \varepsilon_0\varepsilon_1\cdots\varepsilon_{k-1}b_k,\ \varepsilon_0 = 1),$$

fournit une autre suite de mots $c' := (c_1c_2\cdots c_k)_{k\geq 1}$ dans $\mathcal{A}_1^*$. Notons que ces mots sont soumis aux inégalités

$$|c_n| + \tau(c_n.c_{n+1}) \geq 2, \text{ pour tout entier } n \geq 1, \tag{1}$$

où $c_n.c_{n+1}$ désigne le produit de c_n par c_{n+1} dans $\mathbb{Z}$ et $\tau(x) := x/|x|$ sur $\mathbb{R}^*$. Notre objectif est de considérer les produits matriciels étudiés au chapitre II comme les images d'un même homomorphisme de monoïde.

Soit K le sous-groupe de $GL_2(\mathbb{Z})$ engendré par les matrices

$$L := \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix},\ R := \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 1 \end{pmatrix},\ J := \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix},\ S := \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix},$$

$$-I := \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}.$$

Classiquement, le groupe $SL_2(\mathbb{Z})$ est engendré par L et SJ de sorte que $K = GL_2(\mathbb{Z})$ puisque $GL_2(\mathbb{Z}) = (SL_2(\mathbb{Z})) \cup S.(SL_2(\mathbb{Z}))$. Notons les relations élémentaires suivantes, (en désignant par I la matrice identité) :

$$J^2 = S^2 = (-I)^2 = I,\ (JS)^2 = -I,$$

$$(JS)(SJ) = (SJ)(JS) = I,\ SJS = -J.$$

En particulier $K_0 = \{I, -I, S, -S\}$ et $K_1 = \{I, -I, JS, SJ\}$ forment des sous-groupes commutatifs isomorphes. Nous définissons également une conjugaison sur $GL_2(\mathbb{Z})$ au moyen de l'automorphisme intérieur $g \to \overline{g}$

déterminé par S, i. e. $\overline{g} := SgS^{-1}(= SgS)$. Le groupe des points fixes de cette conjugaison est précisément le sous-groupe K_0.

Pour tout $a \in \mathbb{Z}$, (et même $\mathbb{C}$), on a $L^a = \begin{pmatrix} 1 & a \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$, $R^a = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ a & 1 \end{pmatrix}$ et les relations :

$$\text{(2)} \qquad \begin{cases} JL^a = R^aJ = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & a \end{pmatrix}, \ JSL^a = R^{-a}JS, \\ SL^a = L^{-a}S, \ SR^a = R^{-a}S. \end{cases}$$

LEMME 2. *Le monoïde engendré par les matrices R et L est libre.*

Démonstration. Soit $A = A'$ une relation entre des produits de puissances strictement positives de R et L. Quitte à multiplier à gauche par R et à droite par L, on peut supposer que cette relation est de la forme :

$$R^{a_1}L^{a_2}\cdots R^{a_{m-1}}L^{a_m} = R^{a'_1}L^{a'_1}\cdots R^{a'_{n-1}}L^{a'_n},$$

avec m et n pairs, et les entiers a_i, a'_j strictement positifs. On doit montrer l'égalité des mots $a_1a_2\cdots a_m$ et $a'_1a'_2\cdots a'_m$. Mais en termes d'homographies, l'égalité $A = A'$ se traduit par

$$[0; a_1, a_2, \cdots, a_m + t] = [0; a'_1, a'_2, \cdots, a'_n + t]$$

pour tout $t \in \mathbb{R}$. L'unicité du développement en fraction continue régulière des irrationnels entraîne $a_1a_2\cdots a_m = a'_1a'_2\cdots a'_n$.

On définit maintenant l'application $m : \mathcal{A}^* \to GL_2(\mathbb{Z})$ par $m(\wedge) = I$, $m(a) := R^aJ$ pour $a \in \mathcal{A}$ et

$$\text{(3)} \qquad m(\alpha) := \begin{cases} R^{a_1}L^{a_2}\cdots R^{a_{k-1}}L^{a_k}, & \text{si } k \text{ est pair,} \\ R^{a_1}L^{a_2}R^{a_3}\cdots L^{a_{k-1}}R^{a_k}J, & \text{si } k \text{ est impair } (\geq 3). \end{cases}$$

En remarquant que $\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & a \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & b \end{pmatrix} = R^aL^b$, on en déduit l'égalité :

$$\text{(4)} \qquad m(\alpha) = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & a_1 \end{pmatrix}\cdots\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & a_k \end{pmatrix}.$$

THÉORÈME 3. *L'application $m : \mathcal{A}^* \to GL_2(\mathbb{Z})$ définie en (3) est un morphisme injectif de monoïdes : pour tous α et β dans $\mathcal{A}^*$ on a $m(\alpha\beta) = m(\alpha)m(\beta)$. De plus*

$$m(\overline{\alpha}) = (-1)^{|\alpha|}\overline{m(\alpha)}.$$

Démonstration. Soient α et β des mots de $\mathcal{A}^*$. La formule (4) donne immédiatement $m(\alpha\beta) = m(\alpha)m(\beta)$. D'autre part, la relation sur les conjugaisons résulte directement des définitions, de la relation $SJS = -J$ et des égalités (2).

Démontrons maintenant l'injectivité de $m(\cdot)$. Si $m(\alpha) = m(\beta)$, on a aussi $m(\alpha\alpha) = m(\beta\beta)$ et comme $|\alpha\alpha|$ et $|\beta\beta|$ sont de même parité, on en déduit l'égalité $\alpha\alpha = \beta\beta$ d'après le lemme 2. □

2. Algorithmes de factorisation

Commençons par donner quelques formules.

LEMME 3. *Soit a une lettre de l'alphabet $\mathcal{A}$ $(= \mathbb{Z})$ et soient u, v des entiers relatifs. Alors on a :*

(f_1) $S = L^{-1}m(1)R^{-1}$, $R^u m(a) L^v = m(a + u + v)$,

(f_2) $m(a) = m(a + 1)Sm(1)R^{-1}$,

(f_3) $m(a1) = m(a + 1)SR$.

Démonstration. Il suffit d'effectuer les produits matriciels correspondants. □

LEMME 4. *Soit γ un mot (éventuellement vide) sur l'alphabet $\mathcal{A}$ $(= \mathbb{Z})$ et soient a, b, c des lettres de $\mathcal{A}$. Alors, on a :*

$$\begin{aligned}(i)\ & m(ab\gamma) &&= m(a+1)Sm((1)(b-1)\gamma)\\ (ii)\ & m(a1c\gamma) &&= m(a+1)Sm((c+1)\gamma).\end{aligned}$$

Démonstration. Il suffit d'appliquer le lemme précédent en tenant compte des propriétés d'homomorphisme de $m(\cdot)$. □

THÉORÈME 4. *Soit $\alpha = a_1 \cdots a_n$ un mot sur l'alphabet $\mathcal{A}_0 = \mathbb{N}^*$ de longueur n. Alors il existe une factorisation unique de $m(\alpha)$ sous la forme :*

$$m(\alpha) = m(\beta_1)S \cdots m(\beta_{k-1})Sm(\beta_k)\Delta m(\rho) \tag{5}$$

où les β_i sont des mots sur l'alphabet $\mathcal{A}_1^+ = 2\mathbb{N}+1$, la dernière lettre d_j de β_j étant telle que $d_j - 1 \geq 2$ pour $1 \leq j \leq k-1$, $d_k + \text{dét}(\Delta) \geq 2$, $\Delta \in \{I, S\}$ et ρ un mot sur l'alphabet $\mathcal{A}_0$ de longueur au plus 2, avec l'une des trois possibilités suivantes :

(C_1) $\rho = \wedge$ et $\Delta = I$,

(C_2) $\rho = a$ avec a pair $(a \in \{a_n - 1, a_n, a_n + 1\})$,

(C_3) $\rho = a'1$ avec a' pair $(a' \in \{a_{n-1} - 1, a_{n-1}, a_{n-1} + 1\}$, $a_n = 1$.

Démonstration.

Existence. Si $\alpha \in (\mathcal{A}_1^+)^*$ alors $m(\alpha) = m(\beta)\Delta m(\rho)$ avec $\alpha = \beta$, $\rho = \wedge$ et $\Delta = I$. Dans le cas contraire, écrivons α sous la forme $\alpha' a \alpha''$ avec a pair, alors, d'après le lemme 4,

$$m(\alpha) = m(\alpha'(a+1))Sm(\gamma),$$

avec γ sur l'alphabet $\mathcal{A}_0$ de longueur strictement inférieure à celle de α. On est donc ramené par induction finie à examiner les cas où α est de l'une des formes $\wedge, a, ab, a1c$ avec a, b, c entiers ≥ 1, d'où les différentes formes données en (C_1), (C_2), (C_3), par application du lemme 4 et de la propriété de morphisme de $m(\cdot)$. Les inégalités sur les d_i résultent directement de l'application des égalités du lemme 3.

Unicité. Remarquons que si $\gamma = c_1 \cdots c_j$ est un mot sur $\mathcal{A}$, on a :

$$Sm(\gamma) = \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & c_1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & c_2 \end{pmatrix} \cdots \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & c_j \end{pmatrix}. \tag{6}$$

Il en résulte que dans le cas (C_1), on a une égalité matricielle du type

$$\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & a_1 \end{pmatrix} \cdots \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & a_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & b_1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & \varepsilon_1 \\ 1 & b_2 \end{pmatrix} \cdots \begin{pmatrix} 0 & \varepsilon_{m-1} \\ 1 & b_m \end{pmatrix},$$

où $|\varepsilon_j| = 1$ et les b_j sont des entiers impairs positifs pour $1 \leq j \leq m$, tels que $b_j + \varepsilon_j \geq 2$ pour $1 \leq j \leq m-1$, et $m = |\beta_1\beta_2 \cdots \beta_k|$. En particulier, pour $t \in [0, 1]$, on a

$$\xi_t := [0; a_1, \cdots, a_n + t] = \underline{1}/\overline{b_1} + \underline{\varepsilon_1}/\overline{b_2} + \cdots + \underline{\varepsilon_{m-1}}/\overline{b_m} + t,$$

le dernier membre de ces égalités étant le W-développement de ξ_t à l'ordre m. En choisissant t irrationnel, ce développement est unique, d'où l'unicité de la factorisation (5), la dernière lettre de chacun des mots β_i, $1 \leq i \leq m-1$ étant déterminée par les indices j tels que $\varepsilon_{j-1} = -1$.

Dans les cas (C_2) et (C_3), prolongeons le mot α en αc, de sorte que $m(\beta_k)\Delta m(\rho)$ devienne respectivement $m(\beta_k)\Delta m(a+1)Sm(1(c-1))$ ou $m(\beta_k)\Delta m(a'+1)Sm(c+1)$. Prenons c pair, on est alors ramené au cas (C_1), et si $\beta_1\beta_2\cdots\beta_k = b_1\cdots b_m$, les b_j étant des entiers impairs positifs, en posant $\varepsilon_m =$ dét(Δ), on a :

$$\begin{aligned}\xi_{1/(c+t)} &= [0; a_1, \cdots, a_n, c+t]\\ &= \underline{1}/\overline{b_1} + \underline{\varepsilon_1}/\overline{b_2} + \cdots + \underline{\varepsilon_{m-1}}/\overline{b_m} + \underline{\varepsilon_m}/\overline{(a+1)} - \underline{1}/\overline{1} + \underline{1}/\overline{(c-1)} + t,\end{aligned}$$

dans le cas (C_2) et

$$\begin{aligned}\xi_{1/(c+t)} &= [0; a_1, \cdots, a_{n-1}, 1, c+t]\\ &= \underline{1}/\overline{b_1} + \underline{\varepsilon_1}/\overline{b_2} + \cdots + \underline{\varepsilon_{m-1}}/\overline{b_m} + \underline{\varepsilon_m}/\overline{(a'+1)} - \underline{1}/\overline{(c+1)} + t,\end{aligned}$$

dans le cas (C_3). L'unicité du W-développement détermine entièrement la suite (ε_j, b_j) ainsi que Δ et ρ, d'où l'unicité de la factorisation dans tous les cas. □

DÉFINITION. *Soit ξ un nombre irrationnel dans Ω de développement en fraction continue à quotients partiels impairs $\underline{1}/\overline{b_1} + \underline{\varepsilon_1}/\overline{b_2} + \cdots$. La factorisation unique (5) permet de définir l'application $\omega : \mathbb{N}^* \to \mathbb{N}^*$ par :*

$$\omega(n) := |\beta_1\beta_2\cdots\beta_k\rho|.$$

Dans le cas (C_1) du théorème 4 on a $t = T^n\xi = W^{\omega(n)}\xi$. Le cas (C_2) donne $W^{\omega(n)}\xi = 1 - T^n\xi$ puis $W^{\omega(n)+1}\xi = T^n\xi/(1-T^n\xi)$ et le cas (C_3) donne $W^{\omega(n)-1}\xi = 1 - T^{n-1}\xi = T^n\xi/(1+T^n\xi)$. Au vu du théorème 2 le cas (C_2) correspond à l'apparition des médians lorsque $a_{n+1} > 1$, avec

$$\frac{A_{\omega(n)}}{B_{\omega(n)}} = \frac{p_{n-1}+p_n}{q_{n-1}+q_n}.$$

On peut améliorer cela :

THÉORÈME 5. *Soit $\xi = [0; a_1, a_2, \cdots, a_n, \cdots]$ un nombre irrationnel dans Ω donné par son développement en f.c.r. de convergents (p_n/q_n), soit*

$$\xi = \underline{1}/\overline{b_1} + \underline{\varepsilon_1}/\overline{b_2} + \cdots + \underline{\varepsilon_{m-1}}/\overline{b_m} + \cdots$$

son développement en f.c.i. de convergents (A_m/B_m), *et soit* $\omega(\cdot)$ *la suite définie ci-dessus. Pour tout* n *on note* $(C) \to (C') \to (C'')$ *lorsque le cas* (C) *est vérifié pour* n, *le cas* (C') *est vérifié pour* $n+1$ *et le cas* (C'') *est vérifié pour* $n+2$. *Alors, avec les notations du théorème 4, on a :*

- *pour* $(C_1) \to (C_1)$: $\omega(n+1) = \omega(n)+1$, a_{n+1} *impair et*

$$\begin{pmatrix} A_{\omega(n)-1} & A_{\omega(n)} & A_{\omega(n)+1} \\ B_{\omega(n)-1} & B_{\omega(n)} & B_{\omega(n)+1} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} p_{n-1} & p_n & p_{n+1} \\ q_{n-1} & q_n & q_{n+1} \end{pmatrix},$$

- *pour* $(C_1) \to (C_2)$: $\omega(n+1) = \omega(n)+1$, a_{n+1} *pair et*

$$\begin{pmatrix} A_{\omega(n)-1} & A_{\omega(n)} & A_{\omega(n)+1} \\ B_{\omega(n)-1} & B_{\omega(n)} & B_{\omega(n)+1} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} p_{n-1} & p_n & p_n + p_{n+1} \\ q_{n-1} & q_n & q_n + q_{n+1} \end{pmatrix},$$

- *pour* $(C_2) \to (C_1)$ *ou* $(C_2) \to (C_2)$: $\omega(n+1) = \omega(n)+2$, $a_{n+1} \neq 1$ *et*

$$\begin{pmatrix} A_{\omega(n)-1} & A_{\omega(n)} & A_{\omega(n)+1} \\ B_{\omega(n)-1} & B_{\omega(n)} & B_{\omega(n)+1} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} p_{n-1} & p_{n-1} + p_n & p_n \\ q_{n-1} & q_{n-1} + q_n & q_n \end{pmatrix},$$

- *pour* $(C_2) \to (C_3) \to (C_1)$: $\omega(n+2) = \omega(n+1) = \omega(n)+1$, $a_{n+1} = 1$, a_{n+2} *pair et*

$$\begin{pmatrix} A_{\omega(n)-1} & A_{\omega(n)} & A_{\omega(n)+1} \\ B_{\omega(n)-1} & B_{\omega(n)} & B_{\omega(n)+1} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} p_{n-1} & p_{n+1} & p_{n+2} \\ q_{n-1} & q_{n+1} & q_{n+2} \end{pmatrix},$$

- *pour* $(C_2) \to (C_3) \to (C_2)$: $\omega(n+2) = \omega(n+1) = \omega(n)+1$, $a_{n+1} = 1$, a_{n+2} *impair et*

$$\begin{pmatrix} A_{\omega(n)-1} & A_{\omega(n)} & A_{\omega(n)+1} \\ B_{\omega(n)-1} & B_{\omega(n)} & B_{\omega(n)+1} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} p_{n-1} & p_{n+1} & p_{n+1} + p_{n+2} \\ q_{n-1} & q_{n+1} & q_{n+1} + q_{n+2} \end{pmatrix}.$$

Démonstration. Posons pour simplifier

$$\Sigma_n := \begin{pmatrix} p_{n-1} & p_n \\ q_{n-1} & q_n \end{pmatrix}, \Pi'_m := \begin{pmatrix} A_{m-1} & A_m \\ B_{m-1} & B_m \end{pmatrix}$$

et $\omega(n) = m$. Dans le cas (C_1), d'après le théorème 4 on a $\Sigma_n = \Pi'_m$. Dans le cas (C_2), supposons $a_{n+1} > 1$. Alors, avec les notations du théorème 4 et le lemme 3, on a en posant $m(\beta) := m(\beta_1)S \cdots Sm(\beta_k)$:

$$m(a_1 a_2 \cdots a_n a_{n+1}) = m(\beta)\Delta m(a+1)Sm((1)(a_{n+1}-1)).$$

Le lemme 3 (f_2) donne alors

$$\Sigma_n = m(\beta)\Delta m(a+1)Sm(1)R^{-1},$$

par suite $\Sigma_n = \Pi'_m \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$, d'où $\Sigma_n \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = \Pi'_m$ c'est-à-dire :

$$\begin{pmatrix} p_{n-1} & p_{n-1}+p_n \\ q_{n-1} & q_{n-1}+q_n \end{pmatrix} = \Pi'_m. \tag{7}$$

Supposons $a_{n+1} = 1$; cette fois-ci, on a $m(a_1 \cdots a_n 1) = m(\beta)\Delta m(a1)$. Le lemme 3 ($f_3$) donne donc

$$\Sigma_n = \Pi'_{m-1}\Delta m(a+1)SR,$$

d'où encore l'égalité (7). On remarquera que dans ce cas $p_{n+1} = p_{n-1} + p_n$ et $q_{n+1} = q_{n-1} + q_n$. Dans le cas (C_3), on a $a_n = 1$, et pour $c = a_{n+1}$,

$$m(a_1 \cdots a_{n-1}1c) = \Pi'_{m-2}\Delta m(a+1)Sm(c+1),$$

c'est-à-dire

$$\begin{aligned} m(a_1 \cdots a_{n-1}1) &= \Pi'_{m-2}\Delta m(a+1)SR \\ &= \Pi'_{m-1}SR, \end{aligned}$$

mais $SR = \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} = (SR)^{-1}$, de sorte qu'en utilisant $a_n = 1$ on obtient :

$$\Pi'_{m-1} = \begin{pmatrix} p_{n-2} & p_n \\ q_{n-2} & q_n \end{pmatrix}.$$

Le passage à $n+1$ donne $\omega(n+1) = \omega(n)$ avec le cas (C_1) si c est pair et le cas (C_2) sinon. Pour obtenir les divers cas du théorème il suffit de suivre les cas précédents en passant de n à $n+1$ puis à $n+2$. □

COROLLAIRE 3. *Lorsqu'un médian* $(p_n + p_{n+1})/(q_n + q_{n+1})$ *appartient à* FCI(ξ), *alors les convergents* p_n/q_n *et* p_{n+1}/q_{n+1} *sont aussi dans* FCI(ξ).

COROLLAIRE 4. *Le convergent* p_n/q_n *n'apparaît pas dans* FCI(ξ) *si et seulement si pour* $m = \omega(n)$ *on a, dans le* W*-développement de* ξ, $\varepsilon_m = -1$ *et* $b_{m+1} \geq 3$.

En effet, la disparition d'un convergent correspond au cas (C_2) → (C_3) dans le théorème, avec (C_2) vérifié pour n et $a_{n+1} = 1$.

3. Fraction continue à l'entier le plus proche (f.c.e.p.)

Soit ξ un irrationnel dans Ω. Envisageons son développement à l'entier le plus proche (f.c.e.p.) introduit par A. Hurwitz [2], à savoir

$$\xi = h_0 + \underline{e_0}/\overline{h_1} + \cdots + \underline{e_{i-1}}/\overline{h_i} + \cdots, \tag{8}$$

la suite des couples (e_i, h_i), $i \geq 0$, étant déterminée de manière unique par les conditions :

$$\begin{cases} e_i \in \{+1, -1\} \text{ pour } i \geq 0, \\ e_i + h_i \geq 2 \text{ pour } i \geq 1, \\ h_i \geq 2 \text{ pour } i \geq 1. \end{cases} \tag{9}$$

On a par ailleurs $h_0 = 1$ et $e_0 = -1$ si $0 \leq \xi < 1/2$ tandis que $h_0 = 0$ et $e_0 = +1$ si $1/2 \leq \xi \leq 1$. Rappelons que FCEP(ξ) désigne l'ensemble des convergents

$$E_n/F_n = h_0 + \underline{e_0}/\overline{h_1} + \cdots + \underline{e_{n-1}}/\overline{h_n}, \ n \geq 0.$$

Les entiers $E_n = E_n(\xi)$, $F_n = F_n(\xi)$ sont donnés par le produit matriciel :

$$\begin{pmatrix} E_{n-1} & E_n \\ F_{n-1} & F_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & h_0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & e_0 \\ 1 & h_1 \end{pmatrix} \cdots \begin{pmatrix} 0 & e_{n-1} \\ 1 & h_n \end{pmatrix}. \tag{10}$$

Nous poserons dans la suite :

$$\Xi_n := \begin{pmatrix} E_{n-1} & E_n \\ F_{n-1} & F_n \end{pmatrix}, \ n \geq 1. \tag{11}$$

A. Hurwitz a démontré que FCEP(ξ) $\subset$ FCR(ξ). Nous redonnons ce résultat sous une forme plus précise :

THÉORÈME 6. *Soit ξ un irrationnel dans Ω de développement en f.c.e.p. (8). Associons à ξ la suite $v : \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ définie par*

$$v(n) := n + \mathrm{Card}\{i;\ 0 \leq i \leq n \text{ et } e_i = -1\}.$$

Alors, pour tout $n \geq 0$, on a $E_n = p_{v(n)}$ et $F_n = q_{v(n)}$. De plus, pour $\eta_n = \underline{1}/\overline{h_{n+1}} + \underline{e_{n+1}}/\overline{h_{n+2}} + \cdots$, on a

$$\eta_n = T^{v(n)}\xi \text{ si } e_n = +1,$$
$$\eta_n = 1 - T^{v(n)-1}\xi \text{ si } e_n = -1.$$

Démonstration. A la suite $(e_i)_{i\geq 0}$ déterminée par le développement en f.c.e.p. de ξ, associons la suite $(\varepsilon_i)_{i\geq 0}$ définie par

$$\varepsilon_i = \begin{cases} 0 \text{ si } e_i = 1, \\ 1 \text{ si } e_i = -1. \end{cases}$$

D'après (6) on peut écrire :

$$\Xi_n = L^{\varepsilon_0}(S^{\varepsilon_0} m(h_1)) \cdots (S^{\varepsilon_{n-1}} m(h_n)), \tag{12}$$

et par les formules du lemme 5, on obtient simplement,

$$\Xi_n = (m(1))^{\varepsilon_0}[R^{-\varepsilon_0} m(h_1) L^{-\varepsilon_1}](m(1))^{\varepsilon_1}[R^{-\varepsilon_1} m(h_2) L^{-\varepsilon_2}] \\ \cdots (m(1))^{\varepsilon_{n-1}}[R^{-\varepsilon_{n-1}} m(h_n) L^{-\varepsilon_n}] L^{\varepsilon_n}.$$

Pour tout $i \geq 1$ on a $h_i \geq 2$ et $h_i + e_i \geq 2$, donc $h_i - \varepsilon_{i-1} - \varepsilon_i \geq 1$. Introduisons le mot h_i^*, d'une ou deux lettres sur l'alphabet $\mathcal{A}_0$, défini par $h_i^* := (h_i - \varepsilon_{i-1} - \varepsilon_i)1$ si $e_i = -1$ et $h_i^* := (h_i - \varepsilon_{i-1})$ si $e_i = +1$. D'après le lemme 3, on a la relation :

$$m(h_i^*) := R^{-\varepsilon_{i-1}} m(h_i) L^{-\varepsilon_i} m(1)^{\varepsilon_i}.$$

Le théorème 3 montre que le mot h_i^* est uniquement déterminé par cette relation. Par définition on a $|h_i^*| = 1 + \varepsilon_i$, et par suite, en remarquant que $\wedge = 1^a$ lorsque $a = 0$,

$$|1^{\varepsilon_0} h_1^* \cdots h_n^*| = n + \sum_{\substack{0 \leq i \leq n \\ e_i = -1}} 1 \; (= v(n)).$$

Par construction on a :

$$\Xi_n = m(1^{\varepsilon_0} h_1^* \cdots h_n^*) \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}^{\varepsilon_n}.$$

Regardons maintenant les matrices comme des homographies (sans changer les notations), alors si

$$\eta_n = \underline{1}/\overline{h_{n+1}} + \underline{e_{n+1}}/\overline{h_{n+2}} + \cdots,$$

par définition du développement en f.c.e.p., $\xi = \Xi_n(\varepsilon_n \eta_n)$ avec $0 < \eta_n < 1/2$. Posons :

$$\xi_n = \underline{1}/\overline{a_{n+1}} + \underline{1}/\overline{a_{n+2}} + \cdots.$$

Si $e_n = 1$, alors $\varepsilon_n = 0$ et

$$\xi = \Xi_n(\eta_n) = m(1^{\varepsilon_0} h_1^* \cdots h_n^*)(\eta_n) = m(1^{\varepsilon_0} h_1^* \cdots h_n^*)(\xi_{v(n)}).$$

L'unicité du développement en f.c.r. implique donc $\eta_n = \xi_{v(n)}$ $(= T^{v(n)}\xi)$.
Si $e_n = -1$, on a :

$$\xi = m(1^{\varepsilon_0} h_1^* \cdots h_n^*)\left(\frac{\eta_n}{1-\eta_n}\right),$$

mais l'image de $[0, 1/2]$ dans l'homographie $t \to t/1-t$ est égale à $[0,1]$ de sorte que maintenant on a $\xi_{v(n)} = \eta_n/(1-\eta_n)$, avec $a_{v(n)} = 1$. D'où $\xi_{v(n)-1} = 1/(1+\xi_{v(n)})$ et par suite $\eta_n = 1 - \xi_{v(n)-1}$. Dans tous les cas

$$\Sigma_{v(n)} = m(1^{\varepsilon_0} h_1^* \cdots h_n^*) \tag{13}$$

et par suite

$$\Xi_n = \Sigma_{v(n)} \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}^{\varepsilon_n}. \tag{14}$$

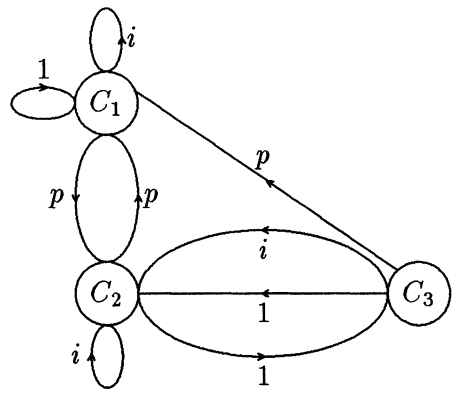
On a donc $\Xi_n = \Sigma_{v(n)}$ si $e_n = +1$. Dans le cas où $e_n = -1$, par définition de h_n^*, on a $a_{v(n)} = 1$ et $v(n) = v(n-1) + 2$, d'où $p_{v(n)} = p_{v(n)-1} + p_{v(n)-2} = p_{v(n)-1} + p_{v(n-1)}$, ce qui donne dans tous les cas :

$$\Xi_n = \begin{pmatrix} p_{v(n-1)} & p_{v(n)} \\ q_{v(n-1)} & q_{v(n)} \end{pmatrix}. \qquad \square \tag{15}$$

IV. Automates de factorisation et convergents

Un *g-automate (fini, déterministe)* est un quadruplet $(\mathcal{S}, \mathcal{G}, \Phi, S_0)$ où $\mathcal{S}$ est un ensemble fini *(l'espace des états)*, $\mathcal{G}$ est un *alphabet fini* à g éléments auquel est associé un ensemble d'*instructions* Φ formé d'applications $\Phi_x : \mathcal{S} \to \mathcal{S}$ définies pour toute lettre x de l'alphabet $\mathcal{G}$, et où S_0 est un élément particulier de $\mathcal{S}$ appelé *état initial.* Un tel automate est essentiellement donné par un graphe orienté sur $\mathcal{S}$ dont les arcs sont indexés par $\mathcal{G}$ et correspondent aux instructions de l'automate. Nous allons associer un automate au développement en f.c.i. et faire de même pour le développement en f.c.e.p. Ce qui nous intéresse est de déterminer de manière *automatique* la disparition des convergents du développement en f.c.r. de ξ dans FCI(ξ) et dans FCEP(ξ).

1. Introduisons l'alphabet $\mathcal{G} = \{1, i, p\}$ image de $\mathcal{A}_0$ par le morphisme f défini par $f(1) = 1$, $f(2n) = p$ et $f(2n-1) = i$, $n \in \mathbb{N}^*$. Soit $\mathcal{S} = \{C_1, C_2, C_3\}$ l'espace des états défini par les trois cas du théorème 4. Prenons C_1 comme état initial. Les instructions Φ_x associées aux lettres x de $\mathcal{B}$ sont données par le graphe orienté suivant :



Ce 3-automate $(\mathcal{S}, \mathcal{G}, \Phi, (C_1))$ permet de reconnaître les divers cas du théorème par simple lecture des mots $f(a_1)\cdots f(a_n)$. Plus précisement, si pour simplifier on note Φ_{a_i} au lieu de $\Phi_{f(a_i)}$, au mot $\alpha = a_1 \cdots a_n$ $(n \geq 1)$ nous associons l'application

$$\Phi_\alpha = \Phi_{a_n} \circ \cdots \circ \Phi_{a_1}$$

D'après le théorème 4, la factorisation (5) de $m(\alpha)$ est de la forme (C_i) si et seulement si $\Phi_\alpha(C_1) = (C_i)$. La lecture de cet automate donne aussi un moyen de déterminer le développement en f.c.i. à partir du développement en f.c.r. Retenons la caractérisation suivante qui résulte du théorème 5 et complète son corollaire 4 :

THÉORÈME 7. *Avec les notations précédentes, les convergents p_n/q_n n'apparaissent pas dans* FCI(ξ) *si et seulement si* $\Phi_{a_1\cdots a_n a_{n+1}}(C_1) = (C_3)$.

2. Soit $[0; a_1, \cdots, a_n, \cdots]$ le développement en f.c.r. de ξ et revenons sur son développement en f.c.e.p. (8). On passe du premier au second en "singularisant" de gauche à droite les "1" dans la suite des a_n. Plus précisément à l'étape initiale on a

$$\xi = \underline{1}/\overline{h_1} + e_1\eta_1 \text{ si } 0 < \xi < 1/2,$$

$$\xi = 1 - \underline{1}/\overline{h_1} + e_1\eta_1 \text{ si } 1/2 < \xi < 1,$$

puis on applique la formule classique de "singularisation" (cf. [1]) :

$\underline{e}/\overline{a} + \underline{1}/\overline{1} + \underline{1}/\overline{b} + x = \underline{e}/\overline{(a+1)} - \underline{1}/\overline{(b} + 1 + x).$

En termes de produit matriciel, cela revient à factoriser $m(a_1 \cdots a_n)$ en utilisant les formules suivantes (données pour a et c dans $\mathcal{A}$) et la propriété de morphisme de $m(\cdot)$:

$$m(1c) = LSm(c+1),$$

$$m(a1c) = m(a+1)Sm(c+1),$$

et plus généralement, par récurrence sur $r \geq 1$:

$$m(a1^r c) = m(a+1)(Sm(3))^{\frac{r-1}{2}} Sm(c+1) \text{ si } r \text{ est impair},$$

$$m(a1^r c) = m(a+1)(Sm(3))^{\frac{r}{2}-1} Sm(2c) \text{ si } r \text{ est pair}.$$

Introduisons la factorisation de $\alpha := a_1 \cdots a_n$ dans $\mathcal{A}_0^*$ mettant en évidence les "1" sous la forme :

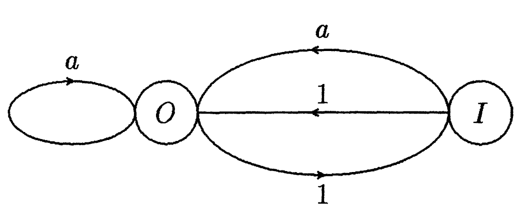
$$\alpha = 1^{r_0}\alpha_1 \cdots 1^{r_{k-1}}\alpha_k 1^{r_k},$$

où les α_i sont des mots non vides dont les lettres sont des entiers ≥ 2 avec $r_0 \geq 0$, $r_k \geq 0$, $r_j > 0$ pour $0 < j < k$. Distinguons maintenant deux cas :

(O) : l'entier r_k est pair,

(I) : l'entier r_k est impair.

Lorsqu'on passe de α à αa_{n+1}, alors on passe de (O) à (I) seulement si $a_{n+1} = 1$, on passe de (O) à (O) seulement si $a_{n+1} > 1$ et on passe de (I) à (O) quelle que soit la valeur de a_{n+1}. Soit $(\mathcal{E}, \mathcal{B}, \Psi, (O))$ le 2-automate déterminé par $\mathcal{E} = \{(O),(I)\}$, $\mathcal{B} = \{1, a\}$ et les instructions déterminées par le graphe orienté suivant :



Remarquons que pour passer du développement en f.c.r. à celui en f.c.e.p., la singularisation de "1" ne se fait que lorsqu'on passe de (O) à (I). Soit $g : \mathcal{A}_0^* \to \mathcal{B}^*$ le morphisme de monoïde défini par $g(x) := a$ si x est un entier ≥ 2 et $g(1) := 1$. Le 2-automate $(\mathcal{E}, \mathcal{B}, \Psi, (O))$ permet de reconnaître la "singularisation" des "1" (et donc la disparition des convergents du développement en f.c.r. dans FCEP(ξ)) par simple lecture des mots $g(a_1)\cdots g(a_n)$. Plus précisément, posons pour simplifier Ψ_{a_i} au lieu de $\Psi_{g(a_i)}$. Au mot $\alpha = a_1 \cdots a_n$, $(n \geq 1)$, nous associons l'application

$$\Psi_\alpha = \Psi_{a_n} \circ \cdots \circ \Psi_{a_1}.$$

On a donc démontré le résultat suivant :

THÉORÈME 8. *Avec les notations précédentes, les convergents p_n/q_n n'apparaissent pas dans* FCEP(ξ) *si et seulement si* $\Psi_{a_1 \cdots a_n a_{n+1}}(O) = (I)$.

Nous sommes maintenant en mesure de comparer très simplement les convergents pour le développement en f.c.e.p. et ceux obtenus par le développement en f.c.i. :

THÉORÈME 9. *Pour tout nombre irrationnel ξ dans Ω on a :*

$$\mathrm{FCEP}(\xi) \subset \mathrm{FCI}(\xi).$$

Démonstration. Utilisons les deux automates précédents. Soit $\alpha = a_1 \cdots a_n$. D'après le théorème 7 le convergent régulier p_n/q_n n'appartient pas à FCI(ξ) lorsque $\Phi_\alpha(C_1) = (C_2)$ et $a_{n+1} = 1$. Si $a_n > 1$ on a $\Psi_\alpha(O) = (O)$ et l'état suivant est (I), donc p_n/q_n n'appartient pas à FCEP(ξ) d'après le théorème 8. Si $a_n = 1$, on a $\alpha = \beta 1^r$ avec $r \geq 1$, $\beta = a_1 \cdots a_{n-r}$ et $a_{n-r} > 1$. Comme $\Phi_\alpha(C_1) = (C_2)$, le 3-automate $(\mathcal{S}, \mathcal{G}, \Phi, S_0)$ donné ci-dessus montre que $\Phi_\beta(C_1) = (C_2)$ et que r est pair. Mais on a aussi $\Psi_\beta(O) = (O)$ et par suite $\Psi_\alpha(O) = (O)$ et $\Psi_{\alpha 1}(O) = (I)$, donc là encore p_n/q_n n'appartient pas à FCEP(ξ). $\square$

Comme application de ce résultat, nous retrouvons un résultat de F. Schweiger [10] :

COROLLAIRE 5. *Pour tout irrationnel ξ de Ω on a :*

$$B_n |B_n \xi - A_n| < 1/\sqrt{5}$$

pour une infinité d'entiers n.

En effet, cette propriété a été démontrée pour les convergents dans FCEP(ξ) par J. Jager et C. Kraaikamp [3], d'où le résultat pour les convergents dans FCI(ξ).

Bibliographie

[1] D. BARBOLOSI, *Fractions continues à quotients partiels impairs, propriétés arithmétiques et ergodiques*, Thèse, Université de Provence, (janvier 1988).

[2] A. HURWITZ, *Über eine besondere Art der Kettenbruchentwicklung reeller Grössen*, Acta Math. **12** (1889), 367–405.

[3] C. KRAAIKAMP, *Metric and Arithmetic Results for Continued Fraction Expansions*, Thèse, Université d'Amsterdam, (avril 1990), (page 157).

[4] J.-L. LAGRANGE, *Addition au mémoire sur la résolution des équations numériques*, Mem. Ber. (= Oeuvres, II) **24** (1970).

[5] G. J. RIEGER, *Über die Länge von Kettenbrüche mit ungeraden Teilnennern*, Abh. Braunschweig. Wiss. Ges. **32** (1981), 61–69.

[6] G. J. RIEGER, *Ein Heilbronn-Satz für Kettenbrüchen mit ungeraden Teilnennern*, Math. Nachr. **101** (1981), 295–307.

[7] G. J. RIEGER, *On the metrical theory of continued fraction with odd partial quotients. Topics in classical number theory, I, II, (Budapest 1981)*, Colloq. Math. Soc. Janos Bolyai, (North Holland) **34** (1984), 1371–1418.

[8] F. SCHWEIGER, *Continued fractions with odd and even partial quotients*, Arbeitsbericht Math. Instit. der Un. Salzburg **4** (1982), 59–70.

[9] F. SCHWEIGER, *A theorem of Kuzmin-Levy type for continued fractions with odd partial quotients*, Arbeitsbericht Math. Instit. der Un. Salzburg **4** (1982), 45–50.

[10] F. SCHWEIGER, *On the approximation by continued fractions with odd and even partial quotients*, Mathematisches Institut Salzburg, Arbeitsbericht **1-2** (1984), 105–114.

[11] O. PERRON, *Die Lehre von den Kettenbrüchen*, Chelsea Publ. Comp., New-York, 1929.

Dominique Barbolosi
Facultés des Sciences et Technique de Saint-Jérôme
Université AIX-MARSEILLE III,
Service de Mathématiques
Case 322, Avenue Escadrille Normandie Niemen
13397 Marseille Cedex 04