Journal de Théorie des Nombres de Bordeaux

G. Damamme

Irrationalité de $\zeta(s)$ pour $s \leq q$ dans certains modules de Drinfeld de rang 1

Journal de Théorie des Nombres de Bordeaux, tome 5, n° 1 (1993), p. 139-149

<http://www.numdam.org/item?id=JTNB_1993__5_1_139_0>

Journal de Théorie des Nombres
de Bordeaux **5** *(1993), 139–149*

Irrationalité de $\zeta(s)$ pour $s \leq q$ dans certains modules de Drinfeld de rang 1

par G. DAMAMME

Introduction

Soit $\mathbb{F}_q$ le corps fini à q éléments, et p sa caractéristique. On considère le corps des séries de Laurent $\mathbb{F}_q((T^{-1}))$. Si $x \in \mathbb{F}_q((T^{-1}))$, $x \neq 0$, x s'écrit :

$$x = a_n T^n + \cdots + a_0 + \frac{a_{-1}}{T} + \cdots , \ (a_n \neq 0 \text{ et } n \in \mathbb{Z}).$$

On définit le degré, la valeur absolue et la signature de x par :

$$\deg x = n, \ |x| = q^n \text{ et sign } x = a_n,$$

avec pour convention $|0| = 0$ et $\deg 0 = -\infty$, sign $0 = 0$; x sera dit unitaire si sign $x = 1$.

Soit x un élément unitaire de $\mathbb{F}_q((T^{-1}))$ de degré 2, λ une constante de $\mathbb{F}_q$ (non nulle si $p = 2$), et F un polynôme unitaire de $\mathbb{F}_q[X]$ de degré 3 (de discriminant $\neq 0$ si $p \neq 2$). Alors il existe y unitaire de $\mathbb{F}_q((T^{-1}))$ vérifiant :

$$y^2 + \lambda y = F(x),$$

(et nécessairement $\deg y = 3$).

L'application :

$$\varphi : \begin{cases} \mathbb{F}_q[x,y]/(y^2 + \lambda y = F(x)) \to \mathbb{F}_q(x,y) \\ \qquad g(x,y) \mapsto g(x,y) \end{cases}$$

est un isomorphisme d'anneaux.

On posera :

$$A := \varphi\left(\mathbb{F}_q[x,y]/(y^2 + \lambda y = F(x)\right)$$
$$\text{et } k := \text{ Frac } (A).$$

Manuscrit reçu le 17 avril 1992, version révisée le 24 septembre 1992.

Comme: $\mathbb{F}_q(x,y) \subset \mathbb{F}_q((T^{-1}))$,

on a : $A \subset k \subset \mathbb{F}_q((T^{-1}))$.

Le degré, la valeur absolue et la signature des éléments de k peuvent être induits par ceux de $\mathbb{F}_q((T^{-1}))$. Dans ce cas le complété pour la valeur absolue n'est autre que :

$$k_\infty := \mathbb{F}_q((T^{-1})).$$

Remarques :

i) On a : sign $x = 1$, sign $y = 1$,

$\deg x = 2$.

Comme le degré du polynôme F en T est 6, on a : $\deg y = 3$.

ii) Si $z \in A$, z peut s'écrire :

$$z = a + by, \text{ avec } a, b \in \mathbb{F}_q[x].$$

Comme a et b sont de degré pair, et $\deg y = 3$, on a

$$\deg z = \max(\deg a, \deg b + 3),$$

par conséquent A n'a pas d'éléments de degré 1.

On remarquera que la valeur absolue définie sur A par $|z| = |\varphi(z)|$ est donc indépendante du choix de x et y. Il en est de même pour sign.

iii) On peut définir une structure de A-module de Drinfeld [5] de rang 1 auquel est associé une fonction e, analogue de la fonction exponentielle, admettant une période $\tilde{\pi}$ transcendante sur K, ([9]). La fonction zêta définie au paragraphe suivant est indépendante de la structure de module de Drinfeld mais liée à la fonction e par la relation :

$$\text{si } (q-1) \text{ divise } s \in \mathbb{N}, \text{ alors}$$

$$\zeta(s)/\tilde{\pi}^s \in K.$$

2. Fonction zêta

On suppose à partir de maintenant et jusqu'à la fin que :

$(\mathcal{C}) : Y^2 + \lambda Y = F(\lambda)$ est une courbe lisse de genre 1 choisie de façon que $\underline{A \text{ soit principal}}$.

On pose ensuite :

$$A_+ := \{z \in A, \text{sign } z = 1\},$$

(éléments unitaires de A),

$$A_{n+} := \{z \in A_+; (\deg z) = n\}.$$

Calculons card A_{+n}. Soit $z = a + by \in A_{+n}$, avec $a \in \mathbb{F}_q[x]$, $b \in \mathbb{F}_q[x]$;

si n est impair : $\deg b = n - 3$, sign $b = 1$, $\deg a < n$. Il y a $q^{(n-3)/2}$ choix pour b et $q^{(n+1)/2}$ choix pour a ;

si n est pair : $\deg a = n$, sign $a = 1$, $\deg b < n - 3$. Il y a $q^{n/2}$ choix pour a et $q^{(n-2)/2}$ choix pour b.

On trouve donc dans les deux cas :

Proposition. *Si $n \geq 2$, alors,*

$$\text{(1)} \qquad \textit{card } A_{+n} = q^{n-1}.$$

Définition et corollaire. *Si $D_n := \prod_{z \in A_{+n}} z$, alors :*

$$\text{(2)} \qquad \deg D_n = nq^{n-1}.$$

Définissons maintenant :

$$S_n(s) := \sum_{z \in A_{n+}} \frac{1}{z^s}$$

$$\text{et } \zeta(s) = \sum_{z \in A_+} \frac{1}{z^s}, \quad (s \in \mathbb{N}^*).$$

On a :

$$\text{(3)} \qquad \zeta(s) = \sum_{n=0}^{\infty} \left(\sum_{z \in A_{+n}} \frac{1}{z^n} \right) = \sum_{n=0}^{\infty} S_n(s).$$

3. Résultats de Thakur ([8])

Thakur définit $\binom{t}{q^n}$ par :

$$\binom{t}{q^n} := \frac{\prod\limits_{(\deg a)<n} (t-a)}{\prod\limits_{(\deg a)=n} a} = \frac{e_n(t)}{D_n},$$

où $e_n(t)$ est une généralisation du polynôme de Carlitz, ([1]). Il montre ensuite que $e_n(t)$ est $\mathbb{F}_q$-linéaire et pose :

$$\binom{t}{q^n} = \sum_j A_{nj} t^{q^j}.$$

En se servant du théorème de Riemann-Roch, Thakur montre alors que, si $n \geq 2$,

$$A_{n0} = (-1)^{n-1} \frac{(D_0 D_1 \cdots D_{n-1})^{q-1}}{D_n}. \tag{4}$$

Il montre d'autre part, que si $n \geq 1$ et $s \leq q$,

$$S_n(s) = A_{n0}^s. \tag{5}$$

On en déduit donc que :

$$S_n(s) = \frac{(-1)^{s(n-1)} (D_0 D_1 \cdots D_{n-1})^{s(q-1)}}{D_n^s}. \tag{6}$$

C'est cette égalité que nous allons simplifier dans le paragraphe suivant.

4. Calcul de $\zeta(s)$

Pour simplifier (4), il faut trouver un équivalent du $[k]$ défini dans le cas du module de Carlitz, ([4]). Il est donné par :

DÉFINITION.

$$I_n := \prod_{\substack{(\deg z)|n \\ \text{sign } z=1 \\ z \text{ irréductible}}} z.$$

On a ainsi : $D_1 = I_1 = 1$, *et*

THÉORÈME 1. *Si $n \geq 2$, alors*

$$D_n = I_n I_{n-2}^{q} I_{n-3}^{q^2} \cdots I_2^{q^{n-3}}. \tag{7}$$

Preuve : On va montrer que

$$D_n \quad \text{et} \quad F = I_n I_{n-2}^{q} \cdots I_k^{q^{n-k-1}} \cdots I_2^{q^{n-3}}$$

ont même décomposition en produit de facteurs irréductibles. Par définition de D_n et de I_k, et comme A est supposé principal, les diviseurs irréductibles de F et de D_n sont de degré h, $1 < h \leq n$. Soit P un polynôme irréductible unitaire de degré h, $1 < h \leq n$. Comme P divise I_k si et seulement si h divise k, la valuation de F est donnée par :

$$v_P(F) = \sum_{\substack{k \leq n-2 \\ h|k}} q^{n-k-1} + \varepsilon(h),$$

avec :

$$\varepsilon(h) = \begin{cases} 1 \text{ si } h \text{ divise } n, \\ 0 \text{ sinon.} \end{cases}$$

D'où :

$$v_P(F) = \sum_{i=1}^{[(n-2)/h]} q^{n-ih-1} + \varepsilon(h).$$

Calculons maintenant $v_P(D_n)$:

Pour chaque entier $i \geq 1$, désignons par ν_i le nombre d'éléments $z \in A_{+n}$ divisibles par P^i ; on a alors, si $ih \leq n$:

$$\nu_i = \text{ card } A_{+n-ih} = \begin{cases} q^{n-ih-1} & \text{si } n - ih \geq 2, \\ 0 & \text{si } n - ih = 1, \\ 1 & \text{si } n - ih = 0, \end{cases}$$

et

$$\nu_i = 0 \text{ si } ih > n.$$

Or :

$$\begin{aligned} v_P(D_n) = & \sum_{i=1}^{[n/h]} i(\nu_i - \nu_{i+1}) \\ = & \sum_{i=1}^{[n/h]} \nu_i \\ = & \sum_{i=1}^{[(n-2)/h]} q^{n-ih-1} + \varepsilon(h) = v_P(F). \end{aligned}$$

Comme D_n et F sont unitaires, et que A est principal, on a bien :

$$D_n = F. \qquad \square$$

COROLLAIRE 1. *Si* $n \geq 2$, *on a :*

$$D_{n+1} = \frac{1}{I_n^q}(I_{n+1} \cdots I_2)(D_n D_{n-1} \cdots D_2)^{q-1}. \tag{8}$$

Preuve :

Ecrivons (7) à l'ordre $n+1$:

$$\begin{aligned} D_{n+1} &= I_{n+1} I_{n-1}^q I_{n-2}^{q^2} \cdots I_2^{q^{n-2}} \\ &= I_{n+1} (\frac{I_{n-1}}{I_n})^q (I_n I_{n-2}^q \cdots I_2^{q^{n-3}})^q, \end{aligned}$$

d'où :

$$D_{n+1} = I_{n+1} (\frac{I_{n-1}}{I_n})^q D_n^q. \tag{9}$$

Montrons maintenant (8) par récurrence. Comme :

$$D_3 = I_3 \ , \ D_2 = I_2,$$

on a :

$$D_3 = \frac{1}{I_2^q} \ I_3 I_2 D_2^{q-1},$$

et (8) est vraie pour $n = 2$. Puis, supposons que :

$$D_n = \frac{1}{I_{n-1}^q} (I_n \cdots I_2)(D_{n-1} \cdots D_2)^{q-1}.$$

Alors d'après (9) :

$$\begin{aligned} D_{n+1} &= I_{n+1} \left(\frac{I_{n-1}}{I_n}\right)^q D_n^{q-1} \frac{1}{I_{n-1}^q} (I_n \cdots I_2)(D_{n-1} \cdots D_2)^{q-1} \\ &= \frac{1}{I_n^q} (I_{n+1} \cdots I_2)(D_n \cdots D_2)^{q-1}. \qquad \square \end{aligned}$$

D'après (6) et (8), on a pour $n \geq 2$:

$$S_n(s) = \frac{(-1)^{s(n-1)} I_{n-1}^{qs}}{(I_2 \cdots I_n)^s},$$

d'où :

COROLLAIRE 2. *Si $s \leq q$, alors,*

$$\zeta(s) = 1 + \sum_{n=2}^{\infty} \frac{(-1)^{s(n-1)} I_{n-1}^{qs}}{(I_2 \cdots I_n)^s}. \tag{10}$$

5. Irrationalité de $\zeta(s)$ pour $s \leq q$

Avec les hypothèses énoncées au début du **2**, on a :

THÉORÈME 2. *Si $s \leq q$, $\zeta(s)$ n'appartient pas à $K = \text{Frac}\, A$.*

Remarques :

a) L'hypothèse "A est principal" est essentielle dans la démonstration du théorème 1. A priori (7) n'est plus vraie si le nombre de classes d'idéaux est strictement supérieur à 1.

b) Si le genre de la courbe est 2, (7) se généralise, mais l'approximation de $\zeta(s)$ n'est pas suffisante pour démontrer directement l'irrationalité de $\zeta(s)$.

c) Les deux hypothèses sur le genre et le nombre de classes nous conduisent à trois cas seulement, ([6], [7]),

i) $A = \mathbb{F}_2[x,y]/(y^2 + y = x^3 + x + 1)$,
ii) $A = \mathbb{F}_3[x,y]/(y^2 = x^3 - x - 1)$,
iii) $A = \mathbb{F}_4[x,y]/(y^2 + y = x^3 + \theta)$, où θ vérifie : $\theta^2 + \theta + 1 = 0$.

Preuve :

On utilise le critère d'irrationalité suivant :

LEMME. *Soit A un sous anneau de K_∞ tel que pour tout $x \in A$, $x \neq 0$, on ait $|x| \geq 1$. Soit K le corps des fractions de A, et soit $\alpha \in K_\infty$. S'il existe une suite $(U_n, V_n)_{n \in \mathbb{N}}$ d'éléments de $A \times A^*$ telle que $|U_n - \alpha V_n| \neq 0$ pour tout n, et $\lim\limits_n |U_n - \alpha V_n| = 0$, alors α n'appartient pas à K.*

Preuve : Si $\alpha \in K$, posons $\alpha = \frac{R}{S}$, où $((R,S) \in A \times A^*)$. Pour tout couple $(U,V) \in A \times A^*$, on a $U - \alpha V = \frac{US - RV}{S}$, donc si $U - \alpha V \neq 0$, on a $|U - \alpha V| \geq \frac{1}{|S|}$ puisque $US - RV \neq 0$. Si $(U_n, V_n)_{n \in \mathbb{N}}$ est une suite de $A \times A^*$ telle que $\lim |U_n - \alpha V_n| = 0$, on a donc $U_n - \alpha V_n = 0$ pour n suffisamment grand, contrairement à l'hypothèse du lemme.

D'après (10), si $N \geq 2$, $\zeta(s)$ peut s'écrire sous la forme :

$$\zeta(s) = \frac{U_N}{V_N} + \sum_{n=N+1}^{\infty} S_n(s),$$

avec $(U_N, V_N) \in A \times A^*$ et $V_N = (I_2 \cdots I_N)^s$. On a donc :

$$|V_N \zeta(s) - U_N| \leq \sup_{n \geq N+1} |V_N S_n(s)|.$$

Or, si $n = N + 1$:

$$V_N S_{N+1}(s) = (I_N^q / I_{N+1})^s, \tag{12}$$

et pour $n > N + 1$:

$$|V_N S_n(s)| \leq |I_{n-1}^q / I_{n-1} I_n|^s. \tag{13}$$

On étudie donc les suites :

$$P_n := \deg I_n \text{ et } Q_n := \deg(I_{n+2}/I_{n+1}^q).$$

On a :

$$P_1 = 0, \ P_2 = 2q,$$

et d'après (2) et (9) : pour $n \geq 1$,

$$P_{n+2} - q(P_{n+1} - P_n) = q^{n+1}, \tag{14}$$

d'où :

$$Q_n = q^{n+1} - qP_n.$$

Comme la suite (q^n) vérifie (14), on trouve :

Proposition. *Si $n \geq 2$, on a :*

$$P_n = q^n - \alpha^n - \alpha'^n \tag{15}$$

et

$$Q_n = q(\alpha^n + \alpha'^n),$$

avec

$$\alpha = \frac{q + \sqrt{q(q-4)}}{2} \text{ et } \alpha' = \frac{q - \sqrt{q(q-4)}}{2}. \tag{16}$$

D'après (12) et (13) et les définitions de P_n et Q_n on a :

$$\deg(V_N S_{N+1}(s)) = -sQ_{N-1}, \tag{17}$$

$$\deg(V_N S_n(s)) \leq -s(Q_{n-2} + P_{n-1}). \tag{18}$$

On va maintenant chercher à estimer

$$|V_N\zeta(s) - U_N|$$

dans chacun des cas i), ii) et iii) : (voir remarque c))

i) si $q = 2$, alors (16) devient

$$Q_n = 4.2^{n/2} \cos \frac{n\pi}{4},$$

et

$$P_n \sim 2^n.$$

D'où :

$$Q_{n-2} + P_{n-1} \sim 2^{n-1}.$$

Pour $N \equiv 1 \bmod 8$, on a :

$$Q_{N-1} = 2^{(N+3)/2}.$$

Comme pour $n > N+1$, on a pour N suffisamment grand $Q_{n-2} + P_{n-1} > 2^{(N+3)/2}$, on conclut donc que pour $N \equiv 1 \bmod 8$ on a :

$$|V_N\zeta(s) - U_N| = |T|^{-s2^{(N+3)/2}}.$$

Il résulte donc du critère d'irrationalité que $\zeta(s)$ n'appartient pas à K.

ii) si $q = 3$, alors d'après (16)

$$Q_n = 6.3^{n/2} \cos \frac{n\pi}{6},$$

et, d'après (15),

$$P_n \sim 3^n.$$

Il en résulte comme précédemment que pour $N \equiv 1 \bmod 12$, et N suffisamment grand, on a :

$$Q_{N-1} = 2.3^{(N+1)/2},$$

et

$$|V_N\zeta(s) - U_N| = |T|^{-2s3^{(N+1)/2}},$$

donc $\zeta(s)$ n'appartient pas à K.

iii) si $q = 4$, on a

$$Q_n = 2^{n+3} \text{ et } P_n = 4^n - 2^{n+1},$$

et donc, pour tout N,

$$Q_{N-1} = 2^{N+2},$$

et pour $n > N + 1$,

$$Q_{n-2} + P_{n-1} > 2^{N+2},$$

donc

$$|V_N\zeta(s) - U_N| = |T|^{-s2^{N+2}},$$

donc $\zeta(s)$ n'appartient pas à K.

Ces approximations ne peuvent conduire à des mesures d'irrationalité de $\zeta(s)$, car elles ne sont pas du type $|V_N\zeta(s) - U_N| \leq |V_N|^{-\gamma}$, où γ soit un nombre réel positif.

BIBLIOGRAPHIE

[1] L. CARLITZ, *On certain functions connected with polynomials in a Galois field*, Duke Math. J. **1** (1935), 137–168.

[2] H. CHÉRIF et B. de MATHAN, *Irrationality measures of Carlitz zeta values in positive characteristic*, J. Number Theory **44** (1993), 260–272.

[3] G. DAMAMME, *Irrationalité de $\zeta(s)$ dans le corps des séries formelles $\mathbb{F}_q((1/t))$*, C. R. Math. Rep. Acad. Sci. Canada **9** (1987), 207–212.

[4] G. DAMAMME and Y. HELLEGOUARCH, *Transcendence of the values of the Carlitz zeta function by Wade's method*, J. Number Theory **39** (1991), 257–278.

[5] V. DRINFELD, *Elliptic modules (English translation)*, Math. Sbornik **23** (1974), 561–592.

[6] D. HAYES, *Explicit class field theory in global function fields*, G. C. Rota (ed). Studies in Algebra and Number theory. Academic press (1979), 173–217.

[7] J. LEITZEL, M. MADAN, C. QUEEN, *On congruence function fields of class number one*, J. Number Theory **7** (1975), 11–27.

[8] D. S. THAKUR, *Drinfeld modules and arithmetic in the function fields*, J. Number Theory, à paraître.

[9] J. YU, *Transcendence and Drinfeld modules*, Invent. Math. **83** (1986), 507–517.

[10] J. YU, *Transcendence and special zeta values in characteristic p*, Annals of Math. **134** (1991), 1–23.

G. Damamme
11 rue Paul Verlaine
F-14730 Giberville