JOURNAL DE THÉORIE DES NOMBRES DE BORDEAUX

REINHARD SCHERTZ

Problèmes de construction en multiplication complexe

Journal de Théorie des Nombres de Bordeaux 2e série, tome 4, nº 2 (1992), p. 239-262

<http://www.numdam.org/item?id=JTNB_1992__4_2_239_0>

Séminaire de Théorie des Nombres,
Bordeaux 4 *(1992), 239-262*

Problèmes de construction en multiplication complexe.

par REINHARD SCHERTZ

Introduction

Les résultats classiques en multiplication complexe de Weber [36], Fricke [15], Fueter [16] et Hasse [18] fournissent des constructions explicites pour les extensions abéliennes d'un corps quadratique imaginaire par des valeurs de fonctions modulaires et de fonctions elliptiques.

Soit $K = \mathbb{Q}(\sqrt{d_K})$ un corps quadratique imaginaire de discriminant d_K, $\mathfrak{f}$ un idéal entier de K et $K(\mathfrak{f})$ le corps de classes de rayon $\mathfrak{f}$ sur K. Pour la construction de $K(\mathfrak{f})$ on considère d'abord le corps de classes H de Hilbert de K, contenu dans $K(\mathfrak{f})$. H est engendré sur K par l'invariant modulaire $j(O)$ de l'anneau O des entiers de K,

$$H = K(j(O)). \tag{1}$$

Pour ce qui suit il est utile de rappeler les fonctions qui interviennent dans la définition de l'invariant modulaire $j(L)$ d'un réseau complexe L :

$$j(L) := 12^3 \frac{g_2(L)^3}{\Delta(L)}, \tag{2}$$

$$\Delta(L) := g_2(L)^3 - 27 g_3(L)^2, \tag{3}$$

Manuscrit reçu le 22 mars 1992, version révisée le 18 juin 1992.

$$(4) \qquad \begin{aligned} g_2(L) &:= 60 \sum_{\omega \in L\setminus\{0\}} \frac{1}{\omega^4}, \\ g_3(L) &:= 140 \sum_{\omega \in L\setminus\{0\}} \frac{1}{\omega^6}. \end{aligned}$$

Notons aussi la relation entre le discriminant Δ et la fonction η,

$$(5) \qquad \Delta(L) = \left(\frac{2\pi}{\omega_2}\right)^{12} \eta\left(\frac{\omega_1}{\omega_2}\right)^{24},$$

où ω_1, ω_2 désigne une base arbitraire de L avec $\mathrm{Im}(\omega_1/\omega_2) > 0$. La fonction η est définie par l'égalité

$$(6) \qquad \eta(z) = q^{1/24} \prod_{n=1}^{\infty} (1-q^n), \quad q = e^{2\pi i z},\ Im(z) > 0.$$

Si l'on pose de plus

$$(7) \qquad G = \begin{cases} -2^7 3^5 \dfrac{g_2 g_3}{\Delta}, & \text{si } d_K \neq -3, -4, \\ 2^8 3^4 \dfrac{g_2^2}{\Delta}, & \text{si } d_K = -4, \\ -2^9 3^6 \dfrac{g_3}{\Delta}, & \text{si } d_K - 3, \end{cases}$$

on peut donner une interprétation géométrique à (1), à savoir que H est engendré sur K par des coefficients de la courbe elliptique

$$(8) \qquad \begin{aligned} y^2 &= 4x^3 - g_2(O)G(O)^2 x - g_3(O)G(O)^3, && \text{si } d_K \neq -3, -4, \\ y^2 &= 4x^3 - g_2(O)G(O), && \text{si } d_K = -3, \\ y^2 &= 4x^3 - g_2(O)G(O)x, && \text{si } d_K = -4. \end{aligned}$$

Pour la construction de $K(\mathfrak{f})$ à partir de H on utilise les points de torsion de la courbe (8). Plus précisément, soit

$$\wp(z \mid L) = \frac{1}{z^2} + \sum_{\omega \in L \setminus \{0\}} \left[\frac{1}{(z-\omega)^2} - \frac{1}{\omega^2} \right] \tag{9}$$

la fonction de Weierstraß attachée à un réseau L, et pour un idéal $\mathfrak{a}$ dans K soit

$$\tau(z \mid \mathfrak{a}) := G(\mathfrak{a}) \wp(z \mid \mathfrak{a})^e \tag{10}$$

la fonction de Weber, où l'exposant e est égal à 1 si $d_K \neq -3, -4$ et à 3, resp. à 2 sinon. La racine e-ième de $\tau(z \mid \mathfrak{a})$ et sa dérivée multipliée par $G(\mathfrak{a})^{e/2}$ vérifient l'équation (8) et fournissent une description des points de torsion de (8). On a un résultat analogue au cas cyclotomique :

$$K(\mathfrak{f}) = H(\tau(\xi \mid O)) \tag{11}$$

ξ est un point primitif de $\mathfrak{f}$-division dans K, c'est-à-dire

$$\xi O = \frac{\mathfrak{a}}{\mathfrak{f}} \qquad (\text{notons} \quad \mathfrak{f} = o(\xi, O) = o(\xi)\ ), \tag{12}$$

où $\mathfrak{a}$ est un idéal entier de K, qui est premier avec $\mathfrak{f}$.

Par combinaison de (1) et (11) on obtient

$$K(\mathfrak{f}) = K(j(O), \tau(\xi \mid O)). \tag{13}$$

De plus on a des formules explicites pour les conjugués de ces valeurs, à savoir

$$\begin{aligned} j(O)^{\sigma(\mathfrak{c})} &= j(\mathfrak{c}^{-1}), \\ \tau(\xi \mid O)^{\sigma(\mathfrak{c})} &= \tau(\xi \mid \mathfrak{c}^{-1}), \end{aligned} \tag{14}$$

pour tout idéal entier $\mathfrak{c}$ de K, où $\sigma(\mathfrak{c})$ désigne l'automorphisme de Frobenius attaché à $\mathfrak{c}$.

Bien que jolie du point de vue géométrique, cette construction de $K(\mathfrak{f})$ ne nous donne aucune information sur les problèmes suivants :

Groupes d'unités,
Nombre de classes,
Anneau d'entiers,
Structure galoisienne,
Génération numérique.

Le but de cet article est de faire le point sur quelques progrès, qu'il y a eu à cet égard durant ces dernières années. Pour traiter ces problèmes avec des fonctions modulaires et des fonctions elliptiques, il faut distinguer les deux extensions H/K et $K(\mathfrak{f})/H$. C'est la première, qui pose le plus de difficultés. La deuxième extension possède comme analogue géométrique l'extension $\mathbb{Q}(\zeta_f)/\mathbb{Q}$, $\zeta_f = e^{2\pi i/f}$, $f \in \mathbb{N}$, où les problèmes en question ont été résolus par les travaux de Leopoldt [20]. En fait des résultats analogues ont été obtenus au cours des dernières années aussi pour $K(\mathfrak{f})/H$.

Le cas H/K

L'engendrement de H par des valeurs singulières de j n'est pas très utile pour les problèmes en question. Numériquement ces valeurs sont extrêmement grandes, et les résultats récents de Gross et Zagier [17] montrent, que leurs factorisations et aussi celles de leurs différences en produit d'idéaux premiers sont assez "sauvages". Un exemple convaincant de ce phénomène est le corps $K = \mathbb{Q}(\sqrt{-163})$, où $H = K$ et

$$j(O) = 2^{18}3^{3}5^{3}23^{3}29^{3}. \tag{15}$$

D'autre part parmi les fonctions modulaires ou elliptiques les seules alternatives à j sont essentiellement les quotients des valeurs singulières de Δ. On sait par des résultats classiques que

$$\frac{\Delta(\mathfrak{a})}{\Delta(O)} \in H \tag{16}$$

pour tout idéal $\mathfrak{a}$ de K. L'action du groupe de Galois est analogue à (14) :

$$\left(\frac{\Delta(\mathfrak{a})}{\Delta(O)}\right)^{\sigma(\mathfrak{c})} = \frac{\Delta(\mathfrak{a}\mathfrak{c}^{-1})}{\Delta(\mathfrak{c}^{-1})}, \tag{17}$$

et de plus ces nombres ont une factorisation simple

$$\frac{\Delta(\mathfrak{a})}{\Delta(O)} \approx \mathfrak{a}^{-12}. \tag{18}$$

Avant de discuter la construction d'unités, qui est évidente par la dernière relation, nous nous proposons d'abord d'engendrer H par ces quotients. On a le

THÉORÈME 1. *Pour tout idéal* $\mathfrak{a}, \mathfrak{b}$ *non principal de* K *et pour tout* $n \in \mathbb{N}$ *on a*

1) $H = K\left(\left(\frac{\Delta(\mathfrak{a})}{\Delta(O)}\right)^n\right)$,

2) $H = K\left(\left(\frac{\Delta(\mathfrak{a})\Delta(\mathfrak{b})}{\Delta(\mathfrak{a}\mathfrak{b})\Delta(O)}\right)^n\right)$.

Grâce à (16) et (17) la démonstration du théorème consiste à prouver que l'action de $\sigma(\mathfrak{c})$ sur les quotients est non triviale pour tout idéal entier $\mathfrak{c}$ non principal. L'outil essentiel de cette démonstration est comme dans [27] la formule de Kronecker pour la valeur en $s = 1$ de la fonction

$$L(s \mid \chi) = \sum_{\mathfrak{g}} \frac{\chi(\mathfrak{g})}{N(\mathfrak{g})^s} \tag{19}$$

attachée à un caractère χ du groupe des classes absolues de K. Dans la somme $\mathfrak{g}$ parcourt l'ensemble des idéaux entiers de K, et $N(\mathfrak{g})$ désigne la norme absolue de $\mathfrak{g}$. D'après la formule de Kronecker [21] on a

$$cL(1 \mid \chi) = \sum_{\mathfrak{c} \in C_K \, mod \, P_K} \chi(\mathfrak{c}) \log \mid N(\mathfrak{c})^6 \Delta\left(\mathfrak{c}^{-1}\right) \mid \tag{20}$$

avec un facteur $c \neq 0$. C_K et P_K désignent le groupe des idéaux de K et le sous-groupe des idéaux principaux. La démonstration du théorème se déduit maintenant du fait que $L(1 \mid \chi) \neq 0$.

Dans beaucoup de cas les générateurs du théorème ont même des racines 24-èmes dans H. Si l'on pose

$$\epsilon(\mathfrak{a}, \mathfrak{b}) := \frac{\Delta(\mathfrak{a})\Delta(\mathfrak{b})}{\Delta(\mathfrak{a}\mathfrak{b})\Delta(O)}, \tag{21}$$

il est démontré dans [30], que

$$\sqrt[24]{\epsilon(\mathfrak{a}, \mathfrak{b})} \left(\sqrt[3]{j(O)}\sqrt{j(O) - 12^3}\right)^{\frac{a-1}{2}\frac{b-1}{2}} \in H \tag{22}$$

pour tous les idéaux entiers $\mathfrak{a}, \mathfrak{b}$ de K premiers à 6 de normes a, b. La définition des racines dans (22) est évidente par les formules (2), (5) et dépend des bases choisies dans $\mathfrak{a}, \mathfrak{b}$ et O. En fait, pour que (22) soit vraie, il faut normaliser les quotients de ces bases de la manière décrite dans [30].

Les extensions de H engendrées par les racines des valeurs de j et de $j - 12^3$ dans (22) sont bien connues. Suivant [24] on a

$$H\left(\sqrt[3]{j(O)}\right) = \begin{cases} H, \text{ si } 3 \nmid d_K, \\ K(3), \text{ si } 3 \mid d_K, \end{cases} \tag{23}$$

et

$$H\left(\sqrt{j(O) - 12^3}\right) = \begin{cases} H, \text{ si } 2 \nmid d_K, \\ K(2), \text{ si } 2 \mid d_K. \end{cases} \tag{24}$$

Ainsi les extensions engendrées par $\sqrt[24]{\epsilon(\mathfrak{a}, \mathfrak{b})}$ sont évidentes.

Nous nous proposons maintenant de décrire le groupe des unités de H, qu'on peut construire par ces racines. D'abord il est immédiat par (18) que ce sont des unités. De plus on a le

THÉORÈME 2. *Soit U_{24} le sous-groupe des unités de H, qui est engendré par les racines de l'unité de H et par les racines n-ièmes, $n \mid 24$, des éléments (21) contenues dans H. Alors on a la formule d'indice*

$$h_H = [E_H : U_{24}]$$

où h_H et E_H désignent le nombre des classes et le groupe des unités de H.

La démonstration de ce théorème est une fois de plus une application de la formule de Kronecker combinée avec la décomposition

$$\zeta_H(s) = \prod_{\chi} L(s,\chi) \tag{25}$$

de la fonction zéta de H, où χ parcourt les caractères du groupe des classes de K. Si l'on considère dans (25) les valeurs en $s = 1$, on obtient à gauche essentiellement le produit $h_H R_H$ du nombre des classes et du régulateur de H, et à droite le produit sur les termes donnés par (20). Après cela un calcul facile de déterminant de Frobenius permet d'obtenir le théorème.

Il faut bien noter ici, que des formules analogues ont été trouvées pour tous les sous-corps d'une extension abélienne de K avec essentiellement les mêmes méthodes dans [26]. Pour démontrer le type de formule qu'on obtient pour ces corps nous allons considérer un exemple. Soient $K_t = \mathbb{Q}(\sqrt[t]{n}), t = 2, 3, 6$, avec $n \in \mathbb{N} \setminus (\mathbb{N}^2 \cup \mathbb{N}^3)$ et h_t les nombres des classes de K_t. Pour obtenir une formule analogue au théorème 2 nous considérons le diagramme suivant

(26)

$$\begin{tikzcd}
H_f \arrow[d, dash] & \\
N_6 \arrow[dd, dash, "\chi"'] \arrow[dr, dash] & \\
& K_6 \arrow[dd, dash] \\
\mathbb{Q}(\sqrt{-3}) = K \arrow[dr, dash] & \\
& \mathbb{Q}
\end{tikzcd}$$

où $N_6 = K_6 K$ est la clôture galoisienne de K_6, χ le caractère de K qui appartient à l'extension N_6/K, f le conducteur de χ et H_f le corps de classes d'anneau de conducteur f de K. Soit I_f le groupe des idéaux propres de l'ordre $O_f = \mathbb{Z} + \mathbb{Z} f\rho$, $\rho = \frac{-1+\sqrt{-3}}{2}$. Alors χ peut être considéré de façon naturelle comme caractère de I_f. Puisque χ est d'ordre 6, il existe deux idéaux $\mathfrak{a}_\rho, \mathfrak{a}_{-1} \in I_f$, tels que

$$\chi(\mathfrak{a}_\rho) = \rho,\ \chi(\mathfrak{a}_{-1}) = -1, \tag{27}$$

et on trouve que la norme relative

$$\epsilon \ := \ N_{H_f/N_6}\left(\frac{\Delta(\mathfrak{a}_\rho)\Delta(\mathfrak{a}_{-1})}{\Delta(\mathfrak{a}_\rho\mathfrak{a}_{-1})\Delta(O_f)}\right) \tag{28}$$

est une puissance 24-ième d'une unité de K_6.

THÉORÈME 3. *On a la formule*

$$6\frac{h_6}{h_2 h_3} \ = \ \left[E_6 : E_2 E_3 \left\langle \sqrt[24]{\epsilon}\right\rangle\right]$$

où h_t et E_t désignent le nombre des classes et le groupe des unités de K_t, $t = 2, 3, 6$.

Ce théorème montre d'abord une divisibilité non triviale entre nombres de classes, qui d'ailleurs ne se déduit pas du théorème de Brauer [1]. En fait on peut montrer qu'il n'y a pas de relation entre les caractères de $N_6/\mathbb{Q}$, qui permette de démontrer une telle divisibilité de h_6

Une autre application de la formule du théorème 3 est le calcul simultané de h_6 et E_6 à partir h_t et E_t, $t = 2, 3$. Une méthode explicite a été décrite par Nakamula [22].

Enfin il est intéressant de noter que l'indice dans la formule du théorème 3 peut devenir arbitrairement grand. Une telle série de corps K_6 a été construite dans [33].

L'expérience numérique montre que les racines de (21) fournissent des générateurs très simples pour H et plus généralement pour les corps de classe d'anneaux. L'exemple suivant a été traité par plusieurs mathématiciens. Soit $K = \mathbb{Q}(\sqrt{-47})$. Alors $h_K = [H : K] = 5$, 7 est décomposé, $7 = \mathfrak{p}\bar{\mathfrak{p}}$, avec $\mathfrak{p} \notin P_K$, et la racine

$$\sqrt[24]{\epsilon(\mathfrak{p},\mathfrak{p})} := \frac{\eta(\frac{\alpha}{7})^2}{\eta(\frac{\alpha}{49})\eta(\alpha)}, \qquad \alpha = \frac{157+\sqrt{-47}}{2}, \tag{29}$$

est un générateur de H, qui satisfait l'équation irréductible

$$X^5 - X^3 - 2X^2 - 2X - 1 = 0. \tag{30}$$

Il est assez surprenant de constater, qu'un générateur pour H/K a été trouvé par Weber [36] en montrant, que cette équation est satisfaite par

$$\frac{1}{\sqrt{2}} f\left(\sqrt{-47}\right), \quad \text{où} \quad f(z) = e^{-\frac{\pi i}{24}} \frac{\eta\left(\frac{z+1}{2}\right)}{\eta(z)}. \tag{31}$$

Cette coïncidence s'explique par un résultat numérique de Scharlau, qui a trouvé que (30) fournit un générateur pour H/K à coefficients minimaux dans un certain sens.

Au vu de cette minimalité on a l'espoir de trouver parmi ces racines des bases de puissances pour les anneaux d'entiers des extensions en question. Malheureusement il n'y a pas encore un résultat général sur ce point. Il est donc intéressant de considérer un exemple numérique. Soit

$$d_K \equiv 5 \ mod\ 8 \ \ et \ \ 3 \nmid d_K. \tag{32}$$

Alors on a le diagramme

(33)

$$\begin{tikzcd}
K(2) \arrow[dr, dash] \arrow[dd, dash, "3"'] & & \\
& K(2)^+ \arrow[dr, dash] \arrow[dd, dash, "3"'] & \\
H \arrow[dr, dash] & & O_{K(2)^+} \arrow[dd, dash] \\
& H^+ \arrow[dr, dash] & \\
& & O_{H^+}
\end{tikzcd}$$

avec $K(2)^+ = K(2) \cap \mathbb{R}$ et $H^+ = H \cap \mathbb{R}$.
L'indice

$$(34) \qquad i = \left[O_{K(2)^+} : O_{H^+}[\theta]\right], \quad \text{où } \theta = f(\sqrt{d}_k),$$

est très petit dans beaucoup de cas. Par exemple sous l'hypothèse (32) on a $i = 1$ pour tous les corps tels que $h_K = 1, 2$. Malheureusement ce n'est pas toujours le cas. Mais on trouve, que pour $\mid d_K \mid \leq 1500$ on a $i \leq 34$. La petitesse de i est intéressante au vu de l'estimation suivante de θ, qu'on peut déduire aisément de l'écriture en série de $f(z)$ sous l'hypothèse $h_K = 1$:

$$(35) \qquad i^2 \mid d_K \mid \;=\; \mid discr(\theta) \mid \;\geq\; c_{eff} e^{\frac{\pi}{24}\sqrt{|d_K|}}$$

avec une constante c_{eff}, qu'on peut déterminer effectivement. Si l'on pouvait démontrer que $i = 1$ sous l'hypothèse $h_K = 1$, l'estimation (35) impliquerait une nouvelle démonstration du théorème de Heegner-Stark sur les corps quadratiques imaginaires avec nombre de classes un. Il est aussi intéressant de noter, qu'une estimation analogue à (35) peut être obtenue dans le cas plus général où le groupe des classes de K est de type $(2, ..., 2)$. La détermination complète de ces corps n'est jusqu'à présent pas encore terminée.

Le cas $K(\mathfrak{f})/H$

L'analogue de Δ pour l'extension $K(\mathfrak{f})/H$ est la fonction de Felix Klein

$$(36) \qquad \varphi\left(z \,\middle|\, \begin{matrix}\omega_1\\ \omega_2\end{matrix}\right) \;=\; \frac{2\pi i}{\omega_2} e^{-zz^*/2} \sigma(z \mid L) \eta\left(\frac{\omega_1}{\omega_2}\right)^2,$$

qui est une normalisation de la fonction σ d'un réseau L. z est une variable complexe, ω_1, ω_2 est une base de L normalisée par $Im\left(\frac{\omega_1}{\omega_2}\right) > 0$. z^* est défini par

$$(37) \qquad z^* = a_1\eta_1 + a_2\eta_2$$

avec les quasipériodes

$$\eta_i = \frac{\sigma'}{\sigma}(z + \omega_i|L) - \frac{\sigma'}{\sigma}(z|L), \; i = 1, 2, \tag{38}$$

et les nombres réels a_1, a_2 définis par l'égalité

$$z = a_1\omega_1 + a_2\omega_2. \tag{39}$$

La nature algébrique des valeurs singulières de φ a été découverte par Ramachandra [23]. Pour des raisons de simplicité nous fixons une base ω_1, ω_2 dans un idéal $\mathfrak{a}$ de K, et nous notons

$$\varphi(\xi|\mathfrak{a}) \;:=\; \varphi\left(\xi \left| \begin{matrix}\omega_1 \\ \omega_2\end{matrix}\right.\right), \; \xi \in K. \tag{40}$$

THÉORÈME 4. *Soit $\xi \in K^*, o(\xi, \mathfrak{a}) = \mathfrak{f}$, et $f = min(\mathfrak{f} \cap \mathbb{N})$. Alors on a*

$$\varphi(\xi|\mathfrak{a})^{12f} \;\in\; K(\mathfrak{f}).$$

De plus pour $\lambda \in O$, premier avec $12f$, l'action de l'automorphisme de Frobenius $\sigma(\lambda)$ est donné par

$$\varphi(\xi|\mathfrak{a})^{12f\sigma(\lambda)} \;=\; \varphi(\xi\lambda|O)^{12f}.$$

La factorisation de $\varphi(\xi|O)$ est analogue à la factorisation des unités cyclotomiques $1 - exp(\frac{2\pi i}{f})$. Suivant Ramachandra [23] et Kubert-Lang [19] on a le

THÉORÈME 5. *Avec les notations du théorème 4 on a la factorisation*

$$\varphi(\xi|O) \;\approx\; \begin{cases} 1 & ,si \qquad o(\xi,O) \text{ est composé}, \\ \mathfrak{p}^{\frac{1}{\phi(\mathfrak{p}\mathfrak{p}^r)}} & ,si \quad o(\xi,O)=\mathfrak{p}^r,\ \mathfrak{p} \text{ un idéal premier}. \end{cases}$$

ϕ désigne la fonction d'Euler dans K.

L'étude des cas particuliers et des exemples numériques nous conduit par analogie avec le théorème 1 à la

CONJECTURE.

$$K(\mathfrak{f}) \;=\; H\left(\varphi(\xi|O)^{12f}\right), \quad \mathfrak{f}=o(\xi,O).$$

En effet, on a par la formule de Kronecker une relation analogue à (20) entre $\varphi(\xi|O)$ et les valeurs $L(1 \mid \chi)$ pour tous les caractères χ de $K(\mathfrak{f})/K$. Mais malheureusement il arrive très souvent que le facteur c soit égal à zéro, et donc on ne peut plus conclure que les conjugués sont différents entre eux.

Pour des raisons multiples il est intéressant de considérer les valeurs de φ elle-même au lieu des puissances $12f$-ièmes. Suivant un théorème de Söhngen [34] ces valeurs sont contenues dans $K(12f^2)$, et on peut calculer les conjugués d'après une méthode de Stark [35]. Les résultats de [28] montrent que dans la plupart des cas $\varphi(\xi|O)$ engendre une extension propre de $K(\mathfrak{f})$. Le résultat pour les quotients est plus intéressant. Un cas particulier d'un théorème démontré dans [28] est le résultat suivant. Soient

$$(41)\qquad \begin{aligned} &\mathfrak{f}=f_1\mathfrak{f}_2 \ \text{ avec } \ f_1\in\mathbb{N},\ \ \mathfrak{f}_2 \text{ primitif}, \\ &\mathfrak{f}_2^* \ := \ \text{la partie “ramifiée” de } \mathfrak{f}_2 \ \text{ et} \\ &f_2^* \ := \ N(\mathfrak{f}_2^*), \end{aligned}$$

où $N(.)$ désigne la norme. Avec ces notations on a le

THÉORÈME 6. *Soit* $\lambda \in O$ *avec* $N(\lambda) \equiv 1 \mod 12 f_1 f_2^*$, $\mathfrak{a}$ *un idéal de* K *et* $\xi \in K \setminus \mathfrak{a}$. *Alors on a*

$$\zeta \frac{\varphi(\xi\lambda|\mathfrak{a})}{\varphi(\xi|\mathfrak{a})} \in K(\mathfrak{f}), \quad \mathfrak{f} = o(\xi, \mathfrak{a}),$$

où ζ *est une racine de l'unité, qu'on peut déterminer explicitement.*

Notons aussi, que d'après le théorème 5 les quotients du théorème 6 sont des unités. On peut s'en servir pour établir des formules de nombres de classes analogues aux théorèmes 2 et 3. Par les méthodes utilisées dans [28] on peut par exemple démontrer le

THÉORÈME 7. *Soit* $h_K = 1$ *et* $\mathfrak{p} \nmid 6$ *un idéal premier de degré un non ramifié dans* K. *Nous fixons un générateur* λ *de* $(O/\mathfrak{p})^*$, *qui satisfait* $\lambda \equiv 1 \mod 12$ *et un élément* $\xi \in O$ *avec* $o(\xi, O) = \mathfrak{p}$. *Suivant le théorème 6 il existe une racine de l'unité* ζ, *telle que*

$$\epsilon = \zeta \frac{\varphi(\xi\lambda|O)}{\varphi(\xi|O)}$$

est une unité de $K(\mathfrak{p})$. *Enfin soit* U *le sous-groupe des unités de* $K(\mathfrak{p})$ *engendré par*

$$\{\epsilon^\sigma \mid \sigma \in Gal(K(\mathfrak{p})/K)\}$$

et les racines de l'unité contenues dans $K(\mathfrak{f})$. *Alors on a la formule*

$$h_{K(\mathfrak{p})} = \left[E_{K(\mathfrak{p})} : U\right].$$

Les quotients du théorème 6 sont aussi très utiles pour l'obtention de résultats sur la structure galoisienne de $K(\mathfrak{f})$. La raison pour ceci consiste en une relation additive démontrée dans [32], dont nous citons un cas particulier. Soit $n \in \mathbb{N}, \nu_0 \in \mathbb{Z}$ et χ un caractère de $\mathbb{Z}/n\mathbb{Z}$. Alors on a pour $z \in \mathbb{R}$ l'identité

$$(42) \qquad \sum_{\nu \bmod n} \frac{\varphi\left(z + \frac{\nu+\nu_0}{n} \,\middle|\, \begin{matrix}\omega\\1\end{matrix}\right)}{\varphi\left(z + \frac{\nu}{n} \,\middle|\, \begin{matrix}\omega\\1\end{matrix}\right)} \chi(\nu)$$

$$= e^{2\pi i a z} n \left(\frac{\eta(n\omega)}{\eta(\omega)}\right)^2 \frac{\varphi\left(\frac{\nu_0}{n} \,\middle|\, \begin{matrix}\omega\\1\end{matrix}\right) \varphi\left(nz + \nu_0 + a\omega \,\middle|\, \begin{matrix}n\omega\\1\end{matrix}\right)}{\varphi\left(\nu_0 + a\omega \,\middle|\, \begin{matrix}n\omega\\1\end{matrix}\right) \varphi\left(nz \,\middle|\, \begin{matrix}n\omega\\1\end{matrix}\right)}.$$

où a est défini par $\chi(1) = e^{2\pi i a/n}$.

Nous considérons maintenant une spécialisation de (42). Soit $\mathfrak{g}$ un idéal primitif de K de norme g première avec 6. Puisqu'on a l'isomorphisme

$$(43) \qquad \begin{array}{ccc} \mathbb{Z}/g\mathbb{Z} & \xrightarrow{\sim} & Gal(K(\mathfrak{g}^2)/K(\mathfrak{g})), \\ \nu + g\mathbb{Z} & \longmapsto & \sigma(1+\nu g) \end{array}$$

tout caractère de $Gal(K(\mathfrak{g}^2)/K(\mathfrak{g}))$ peut être interprété comme caractère de $\mathbb{Z}/g\mathbb{Z}$. Nous fixons une base de $\mathfrak{g}$

$$(44) \qquad \mathfrak{g} = \mathbb{Z}\alpha + \mathbb{Z}g, \quad Im(\alpha) > 0,$$

et un $\nu_0 \in \mathbb{Z}$, tel que

$$(45) \qquad \nu_0 \equiv 0 \; mod \; 12 \;\text{ et }\; \nu_0(1+\nu_0) \text{ premier avec } g.$$

Posons encore

$$(46) \qquad \beta := \frac{\alpha}{g^2}.$$

Alors on a avec ces notations le

THÉORÈME 8. *Il existe une racine g-ième ζ de l'unité, telle que*

$$1)\ \theta := \zeta \frac{\varphi\left(\frac{1}{g^2} + \frac{\nu_0}{g} \,\middle|\, \begin{matrix}\beta\\1\end{matrix}\right)}{\varphi\left(\frac{1}{g^2} \,\middle|\, \begin{matrix}\beta\\1\end{matrix}\right)} \in K(\mathfrak{g}),$$

$$2)\ \theta^{\sigma(1+\nu g)} = \zeta \frac{\varphi\left(\frac{1}{g^2} + \frac{\nu+\nu_0}{g} \,\middle|\, \begin{matrix}\beta\\1\end{matrix}\right)}{\varphi\left(\frac{1}{g^2} + \frac{\nu}{g} \,\middle|\, \begin{matrix}\beta\\1\end{matrix}\right)},\ \nu \in \mathbb{Z},$$

3) $(\theta, \chi) := \sum_{\nu \bmod g} \theta^{\sigma(1+\nu g)} \chi(\nu) \approx \mathfrak{g}$ *pour tout caractère* χ *de* $Gal(K(\mathfrak{g}^2)/K(\mathfrak{g}))$.

Le point 1) est un cas particulier du théorème 6. La démonstration de 2) est comme le théorème 6 due à la méthode de Stark [35], et 3) est obtenu par la formule (42) en combinant les factorisations (18) et celles du théorème 5.

Nous considérons maintenant l'ordre associée de $K(\mathfrak{g}^2)/K(\mathfrak{g})$:

$$A = \{\gamma \in K(\mathfrak{g})[G] \mid O_{K(\mathfrak{g}^2)}\gamma \subseteq O_{K(\mathfrak{g}^2)}\} \tag{47}$$

avec $G = Gal(K(\mathfrak{g}^2)/K(\mathfrak{g}))$. L'action de $\gamma = \sum_{\sigma \in G} a_\sigma \sigma$ sur les éléments ξ de $O_{K(\mathfrak{g}^2)}$ est définie par

$$\xi\gamma = \sum_{\sigma} a_\sigma \xi^\sigma. \tag{48}$$

Par la construction explicite de A on peut déduire du théorème 8 le théorème suivant, qui généralise un résultat de Cassou-Noguès et Taylor [2].

THÉORÈME 9. *Avec l'élément θ du théorème 8 on a :* $O_{K(\mathfrak{g}^2)} = \theta A$.

En suivant les arguments donnés dans [2], il suffit de construire A dans le cas où $\mathfrak{g} = \mathfrak{p}^m$ est la puissance d'un idéal premier. Pour ceci nous considérons comme dans [32] la dérivée logarithmique normalisée de la fonction de Weierstraß :

$$W(z) = \frac{\wp(z \mid O)}{\wp'(z \mid O)} \sqrt[12]{\Delta(O)} \tag{49}$$

où la racine 12-ième est fixée par

$$\sqrt[12]{\Delta(O)} = \frac{2\pi}{\omega_2}\eta\left(\frac{\omega_1}{\omega_2}\right)^2 . \tag{50}$$

et le choix d'une base ω_1, ω_2 avec $Im\left(\frac{\omega_1}{\omega_2}\right) > 0$ dans O. Nous définissons en outre le polynôme

$$h_m(X) = \prod_{\substack{\alpha\in\mathfrak{p}^{-m} \\ \alpha \bmod O}} (X - W(\alpha)), \tag{51}$$

où les valeurs de $W(\alpha)$ sont contenues dans $K(24\mathfrak{p}^m)$. Nous posons

$$\begin{aligned} N/M &= K(\mathfrak{p}^{2m})/K(\mathfrak{p}^m), \\ \hat{N}/\hat{M} &= K(24\mathfrak{p}^{2m})/K(24\mathfrak{p}^m), \\ G &= Gal(N/M), \\ \hat{G} &= Gal(\hat{N}/\hat{M}), \end{aligned} \tag{52}$$

et nous allons construire d'abord l'ordre associé $\hat{A}$ de $\hat{N}/\hat{M}$. Pour ceci il suffit de construire les composantes locales de $\hat{A}$

$$\hat{A}_{\mathfrak{p}} = O_{\mathfrak{p}}\hat{A}. \tag{53}$$

Par un calcul de discriminant (voir [32]) on obtient

$$\hat{A}_{\mathfrak{P}} = \begin{cases} O_{\mathfrak{P}}[\hat{G}], & \text{si} \quad \mathfrak{P} \nmid \mathfrak{p}, \\ O_{\mathfrak{P}}\sigma_0 + \sum\limits_{i=0}^{g-2} O_{\mathfrak{P}}\tau_i, & \text{si} \quad \mathfrak{P} \mid \mathfrak{p}, \end{cases} \tag{54}$$

avec

$$\sigma_\alpha = \sigma(1 + 24\omega\alpha), \quad \alpha \in \mathfrak{p}^{-m}, \tag{55}$$

où ω est un élément de $\mathfrak{p}^{2m} \setminus \mathfrak{p}^{2m-1}$ et

$$\tau_i = \sum_{\substack{\alpha \in \mathfrak{p}^{-m} \\ \alpha \bmod O}} \frac{W(\alpha)^i}{h'_m(W(\alpha))}\sigma_\alpha. \tag{56}$$

Au vu de l'isomorphisme

$$\begin{array}{ccc} \hat{G} & \longrightarrow & G \\ \sigma & \longmapsto & \sigma \mid N \end{array} \tag{57}$$

on peut identifier $\hat{G}$ et G et considérer A comme contenue dans $\hat{A}$. Enfin on obtient

$$A = \hat{A} \cap M[G]. \tag{58}$$

Nous nous proposons maintenant de construire l'anneau des entiers de $K(\mathfrak{f})$ pour un idéal entier $\mathfrak{f}$ arbitraire de K. Comme motivation il est utile de considérer d'abord le cas cyclotomique, où pour $f \in \mathbb{N}$ l'anneau des entiers de $\mathbb{Q}(\zeta)$, $\zeta = e^{2\pi i/f}$, est donné par

$$(59) \qquad O_f = \mathbb{Z}[\zeta].$$

Du point de vue géométrique l'analogue elliptique de $\mathbb{Q}(\zeta)/\mathbb{Q}$ est l'extension

$$(60) \qquad K(\mathfrak{f})/H$$

avec un idéal entier $\mathfrak{f}$ de K, l'analogue de ζ étant un point de division d'ordre $\mathfrak{f}$ d'une courbe elliptique définie sur H. La définition de l'analogue de ζ pour engendrer $O_{K(\mathfrak{f})}$ n'est pas immédiate, parce que les points de division d'une courbe elliptique possèdent plusieurs coordonnées. Les premiers résultats dans cette direction ont été trouvés dans des cas particuliers par Cassou-Noguès et Taylor [2] et ensuite par Cougnard et Fleckinger [3, 4, 5-9, 11-14]. La construction suivante est différente de tous ces résultats. Elle est motivée par la reformulation suivante de (59) et nous mène au résultat général du théorème 11.

Avec $\vartheta = (1-\zeta)^{-1}$ et $n = (\mathbb{Q}(\zeta) : \mathbb{Q})$ on peut démontrer facilement

$$(61) \quad O_f = \begin{cases} \mathbb{Z} + \mathbb{Z}\vartheta + \ldots + \mathbb{Z}\vartheta^{n-1}, & \text{si } n \text{ est composé,} \\ \mathbb{Z} + \mathbb{Z}p\vartheta + \ldots + \mathbb{Z}p\vartheta^{n-1}, & \text{si } f = p^r, \text{ p un nombre premier.} \end{cases}$$

Pour construire un analogue elliptique de ϑ, il nous faut le lemme suivant dû à Fueter [16].

LEMME. *Il existe des unités ϵ_2, ϵ_3, telles que*

$$\epsilon_2^{-1}\sqrt[3]{j(O)},\ \epsilon_3^{-1}\sqrt{j(O) - 12^3} \in H.$$

Il faut bien noter, que les racines, dont la définition est évidente par les formules (2), (3) et (5), ainsi que ϵ_2, ϵ_3 dépendent du choix de base dans O.

Une construction explicite de ϵ_2, ϵ_3, autre que celle de Fueter, est d'ailleurs possible par (22) (voir [30]).

DÉFINITION. *Pour $\xi \in K \setminus O$ nous posons*

$$P(\xi) := \left(\epsilon \frac{\mathfrak{p}(\xi \mid O)}{\sqrt[e]{\Delta(O)}}\right)^e,$$

$$\text{avec } e = \begin{cases} 1, & si \quad d_K \neq -3, -4, \\ 2, & si \quad d_K = -4, \\ 3, & si \quad d_K = -3, \end{cases}$$

$$\text{et} \quad \epsilon = \begin{cases} \epsilon_2\epsilon_3, & si \quad d_K \neq -3, -4 \\ \epsilon_2, & si \quad d_K = -4, \\ \epsilon_3, & si \quad d_K = -3, \end{cases}$$

où le choix de base dans O pour la définition de ϵ_2, ϵ_3 et $\sqrt[e]{\Delta(O)}$ est le même.

La nature algébrique de $P(\xi)$ peut être déduite des propriétés de $\tau(\xi \mid O)$. On obtient le

THÉORÈME 10. *Soit $\xi \in K \setminus O, \mathfrak{f} = o(\xi, O)$ et $\lambda \in O$ premier avec $\mathfrak{f}$. Alors*

$$P(\xi) \in K(\mathfrak{f})$$

et

$$P(\xi)^{\sigma(\lambda)} = P(\xi\lambda).$$

Pour ce qui suit, il est important qu'on puisse calculer le discriminant relatif à H de $P(\xi)$. Ceci est assuré par la formule suivante, qui se déduit de la relation analogue connue entre $\mathfrak{P}$ et σ. On a

$$(62) \qquad P(\xi_1) - P(\xi_2) = \prod_{s=0}^{e-1} (-\epsilon) \frac{\varphi(\xi_1 - \zeta^s \xi_2)\varphi(\xi_1 + \zeta^s \xi_2)}{\varphi^2(\xi_1)\varphi^2(\xi_2)}$$

où ζ est une racine primitive e-ième de l'unité et $\varphi(z) := \varphi(z \mid O)$.

Le lemme suivant est très important.

LEMME. *Il existe un nombre $D \in H$, tel que*

$P(\xi) - D \in O_{K(\mathfrak{f})}$, *si* $\mathfrak{f} = o(\xi, O)$ *est composé,*

$\mathfrak{p}^{\frac{1}{n}}(P(\xi) - D)) \subseteq O_{K(\mathfrak{f})}$, *si* $\mathfrak{f} = \mathfrak{p}^r$ *est la puissance d'un idéal premier* $\mathfrak{p}$,

où n désigne le degré $(K(\mathfrak{f}) : H)$.

La construction d'un nombre D est facile dans les cas où $d_K = -3, -4$, ou 2 est décomposé, ou 2 et 3 ne sont pas inertes dans K. Alors on peut poser

$$(63) \qquad D = P(\xi_0)$$

avec $\xi_0 \in K \setminus O$, tel que

$$(64) \qquad o(\xi_0, O) = \begin{cases} \mathfrak{p}_2\mathfrak{p}_3, & \text{si} \quad d_K = -3, \\ \mathfrak{p}_2\mathfrak{p}_5, & \text{si} \quad d_K = -4, \\ 2, & \text{si} \quad 2 \text{ est décomposé}, \\ \mathfrak{p}_2\mathfrak{p}_3, & \text{si} \quad 2 \text{ et } 3 \text{ ne sont pas inertes.} \end{cases}$$

$\mathfrak{p}_q$ désigne un idéal premier au dessus de q. Dans le cas où 2 et 3 sont inertes on peut démontrer (voir [31]), que $D = 0$ a les propriétés du lemme, et dans les autres cas, qui sont plus compliqués, il faut considérer comme dans [31] certaines traces de $P(\xi_i), \xi_i \in K$.

Un analogue de ϑ est maintenant donné par

$$(65) \qquad \theta = P(\xi) - D.$$

Par un calcul de discriminant, qui utilise essentiellement (62) en combinaison avec le théorème 5, on obtient le

THÉORÈME 11. *Soit $\mathfrak{f}$ un idéal entier de K et $\xi \in K$ avec $o(\xi, O) = \mathfrak{f}$. Alors*

$$O_{K(\mathfrak{f})} = \begin{cases} O_H[\theta], & si \quad \mathfrak{f} \text{ est composé}, \\ O_H + O_H\pi\theta + \ldots + O_H\pi\theta^{n-1}, & si \quad \mathfrak{f} = \mathfrak{p}^r \nmid 2, \\ O_H[\pi\theta], & si \quad \mathfrak{f} = \mathfrak{p}^r \mid 2, \end{cases}$$

π est un nombre de H, tel que $\pi O_H = \mathfrak{p}O_H$ et $n = (K(\mathfrak{f}) : H)$.

Nous remarquons que l'existence de π est assurée par le "Hauptidealsatz" [10], qu'on peut démontrer à partir de (18). Une autre construction de π, qui fait usage des valeurs de P (voir [10]) est donnée par le

THÉORÈME 12. *Soit $\mathfrak{p}$ un idéal premier de K et $\delta_1, \delta_2 \in O$, tels que $o(\delta_1 - \zeta\delta_2, O) = o(\delta_1, O) = o(\delta_2, O) = \mathfrak{p}$ pour toutes les racines de l'unité de K. Alors on a*

$$N_{K(\mathfrak{p})/H}\left(\frac{1}{P(\delta_1) - P(\delta_2)}\right) \approx \mathfrak{p}.$$

On vérifie facilement, que le choix de δ_1, δ_2 est toujours possible, si la norme de $\mathfrak{p}$ est supérieure à 7.

Le théorème 11 ne fournit pas de bases de puissances dans le cas $\mathfrak{f} = \mathfrak{p}^r \nmid 2$, et comme Cougnard et Fleckinger [9] ont démontré par le contre-exemple

$$K = \mathbb{Q}(\sqrt{-19}),\ \mathfrak{f} = \mathfrak{p} \mid 7, \tag{66}$$

une telle construction n'est pas possible en général. Néanmoins par changement de θ on peut construire des bases de puissances aussi dans beaucoup d'autre cas, où $\mathfrak{f}$ est la puissance d'un idéal premier. Pour cela il faut remplacer $P(\xi)$ par

$$Q(\xi) := \frac{1}{P(\xi) - P(\xi^*)} \tag{67}$$

avec $\mathfrak{f} = o(\xi, O)$ et $\mathfrak{f}^* = o(\xi^*, O)$ premiers entre eux (voir [29], Satz 7 et le tableau dans l'introduction de [29]).

Exemples numériques

1) Soit $d_K = -20, \mathfrak{f} = (\sqrt{-5})(3\mathbb{Z} + (1+\sqrt{-5})\mathbb{Z})$. Alors $H = K(\sqrt{-1})$, $(K(\mathfrak{f}) : H) = 4$ et

$$O_{K(\mathfrak{f})} = O_H[\theta],$$

où θ est une racine de

$$\begin{array}{lcc} X^4 & + & \frac{1}{2}(1+3\sqrt{5}+3\sqrt{-5}-\sqrt{-1})X^3 \\ & + & (\sqrt{5}+\sqrt{-5}+7\sqrt{-1})X^2 \\ & + & \frac{1}{2}(-3-3\sqrt{5}+3\sqrt{-5}+7\sqrt{-1})X \\ & - & \frac{1}{2}(3+\sqrt{5}). \end{array}$$

2) Soit $d_K = -4$, $\mathfrak{f} = (\pi), \pi = 1 + 6i$. Alors $H = K, (K(\mathfrak{f}) : H) = 9$ et

$$O_{K(\mathfrak{f})} = O_H + O_H\pi\theta + \ldots + O_H\pi\theta^8,$$

où θ est une racine de

$$X^9 - (3-8i)X^8 - (31-4i)X^7 + (43+50i)X^6 + (31-83i)X^5$$
$$+(75-5i)X^4 + (17+36i)X^3 - (9-9i)X^2 - (2+i)X + \tfrac{1-6i}{37}$$

3) Soit $d_K = -163, \mathfrak{f} = (2)$. Alors $H = K, (K(\mathfrak{f}) : H) = 3$ et

$$O_{K(\mathfrak{f})} = O_H[2\theta],$$

où θ est une racine de

$$X^3 + 2^2 \cdot 5 \cdot 23 \cdot 29X - \tfrac{7\cdot 11\cdot 19\cdot 127}{4}\sqrt{-163}.$$

Références

[1] R. Brauer, *Beziehungen zwischen Klassenzahlen von Teilkörpern eines galoisschen Körpers*, Math. Nachr. **4** (1959), 158–174.

[2] Ph. Cassou-Noguès, M. J. Taylor, *Elliptic Functions and Rings of Integers*, Progress in Math. **66** (1987), Birkhäuser.

[3] Ph. Cassou-Noguès, M. J. Taylor, *A note on elliptic curves and monogeneity of rings of integers*, Proc. Lond. Math. Soc.(2) **37** (1988), 63–72.

[4] Ph. Cassou-Noguès, M. J. Taylor, *Unités modulaires et monogénéité d'anneaux d'entiers*, Sém. de Théorie des Nombres de Paris (1986–1987), 36–63.

[5] J. Cougnard, *Génération de l'anneau des entiers des corps de classe de $\mathbb{Q}(i)$ de rayon impair et points de division de $y^2 = x^3 - x$*, J. Number Theory **30** (1988), 140–155.

[6] J. Cougnard, *Modèle de Legendre d'une courbe elliptique à multiplication complexe et monogénéité d'anneau d'entiers*, Acta Arithmetica **54** (1990), 191–212.

[7] J. Cougnard, *Résultats récents sur la monogénéité de certains anneaux d'entiers*, Sém. de Théorie des Nombres de Bordeaux (1987–1988), Exposé 32, 32-01–32-12.

[8] J. Cougnard, V. Fleckinger, *Modèle de Legendre d'une courbe elliptique à multiplication complexe et monogénéité d'anneaux d'entiers, II*, Acta Arithmetica **55** (1990), 75–81.

[9] J. Cougnard, V. Fleckinger, *Sur la monogénéité de l'anneau des entiers de certains corps de rayon*, Manuscripta mathematica **63** (1989), 365–376.

[10] M. Deuring, *Die Klassenkörper der komplexen Multiplikation*, Enzykl. d. Math. Wiss **I**, 2 Heft 10, Teil II.

[11] V. Fleckinger, *Monogénéité de certains anneaux d'entiers*, Sém. de Théorie des Nombres de Bordeaux (1986–1987), Exposé 7, 7-01–7-11.

[12] V. Fleckinger, *Monogénéité de l'anneau des entiers de certains corps de classes de rayon*, Ann. Inst. Fourier **38 (1)** (1988), 17–57.

[13] V. Fleckinger, *Génération de bases d'entiers à partir de la courbe $y^2 = 4x^3 + 1$*, Publ. Math. Fac. Sci. Besancon (1987/88).

[14] V. Fleckinger, *Modèle de Deuring et monogénéité des anneaux d'entiers des corps de rayon d'un corps quadratique imaginaire dans le cas 3 ramifié*, Publ. Math. Fac. Sci. Besancon (1987/88).

[15] R. Fricke, *Die elliptischen Funktionen und ihre Anwendungen I, II*, Teubner, Leipzig, Berlin (1916, 1922).

[16] R. Fueter, *Vorlesungen über die singulären Moduln und die komplexe Multiplikation der elliptischen Funktionen, I, II*, Teubner, Leipzig, Berlin (1924).

[17] B. Gross, D. Zagier, *Singular Moduli*, J. Reine Angew. Math. **355** (1985), 191–220.

[18] H. Hasse, *Neue Begründung der komplexen Multiplikation, I, II*, J. Reine Angew. Math. **157** (1927), 115-139 **165** (1931), 64–88.

[19] D.S. Kubert, S. Lang, *Modular Units*, Springer, Berlin, Heidelberg, New York (1981).

[20] H.W. Leopoldt, *Über die Hauptordnung der ganzen Elemente eines abelschen Zahlkörpers*, J. Reine Angew. Math. **209** (1962), 54–71.

[21] C. Meyer, *Die Berechnung der Klassenzahl abelscher Körper über quadratischen Zahlkörpern*, Akademie-Verlag, Berlin, (1957).

[22] Nakamula, *Class number calculation of a sextic field from the elliptic unit*, Acta Arithmetica **45** (1885), 230–247.

[23] K. Ramachandra, *Some applications of Kronecker's limit formulas*, Ann. Math. **80** (1964), 104–148.

[24] R. Schertz, *Die singulären Werte der Weberschen Funktionen* $f, f_1, f_2, \gamma_2, \gamma_3$, J. Reine Angew. Math. **286/287** (1976), 46–74.

[25] R. Schertz, *Über die Klassenzahl gewisser nicht galoisscher Körper 6-ten Grades*, Abh. Math. Sem. Hamburg **42** (1974), 217–227.

[26] R. Schertz, *die Klassenzahl der Teilkörper abelscher Erweiterungen imaginär-quadratischer Zahlkörper, I, II*, J. Reine Angew. Math. **295, 296** (1977), 151–168, 58-79.

[27] R. Schertz, *Zur Theorie der Ringklassenkörper über imaginär-quadratischen Zahlkörpern*, J. Number Theory **10** **(1)** (1978), 70–82.

[28] R. Schertz, *Niedere Potenzen elliptischer Einheiten*, Proceedings of the International Conference on Class Numbers and Fundamental Units of Algebraic Number Fields, Katata, Japan, (1986), 67–88.

[29] R. Schertz, *Konstruktion von Ganzheitsbasen in Strahlklassenkörpern über imaginär-quadratischen Zahlkörpern*, J. Reine Angew. Math. **398** (1989), 105–129.

[30] R. Schertz, *Zur expliziten Berechnung von Ganzheitsbasen in Strahlklassenkörpern über einem imaginär-quadratischen Zahlkörper*, J. Number Theory **34** **(1)** (1990), 41–53.

[31] R. Schertz, *Über die Nenner normierter Teilwerte der Weierstraßschen* $\wp$*-Funktion*, J. Number Theory **34** **(2)** (1990), 229–234.

[32] R. Schertz, *Galoismodulstruktur und elliptische Funktionen*, à paraître dans J. Number Theory.

[33] R. Schertz, H.-J. Stender, *Eine Abschätzung der Klassenzahl gewisser reiner Körper 6-ten Grades*, J. Reine Angew. Math. **311/312** (1979), 347–355.

[34] H. Söhngen, *Zur komplexen Multiplikation*, Math. Ann. **111** (1935), 302–328.

[35] H. M. Stark, *L-functions at* $s = 1$*, IV*, Adv. in Math. **35** (1980), 197–235.

[36] H. Weber, *Lehrbuch der Algebra*, Bd III, Neudruck New York (1962).

R. SCHERTZ
Mathematisches Institut der Universität Augsburg
Universitätsstraße
D-8900 Augsburg Allemagne