JOURNAL DE THÉORIE DES NOMBRES DE BORDEAUX

FATHI BEN NASR

Dimension de Hausdorff de certains fractals aléatoires

Journal de Théorie des Nombres de Bordeaux 2e série, tome 4, nº 1 (1992), p. 129-140

<http://www.numdam.org/item?id=JTNB_1992__4_1_129_0>

Séminaire de Théorie des Nombres,
Bordeaux 4 *(1992), 129-140*

Dimension de Hausdorff de certains fractals aléatoires.

par Fathi Ben NASR

ABSTRACT. We construct random Cantor sets by successive dissections of rectangles, starting from one square, (note that the number of divisions of both sides can be different). This construction is stationary: it uses independent and identically distributed random variables. On these sets there exists one natural measure μ which also is random. Some results on the measure μ and the Hausdorff dimension of Borel sets supporting μ have already been obtained by J. Peyrière and by F. Ben Nasr. In the present work we improve on these results. More precisely we prove that these dimensions depend on the graph geometry of a certain convex function which was introduced by Mandelbrot. We also give the dimension of the support of μ in a case which was not covered by the anterior works.

RÉSUMÉ. On construit des ensembles de Cantor aléatoires par partages successifs de rectangles, en partant d'un carré, (le nombre de divisions de la longueur peut être différent de celui de la largeur). La construction est stationnaire : elle fait intervenir des variables aléatoires indépendantes et équidistribuées. Sur ces ensembles il existe une mesure naturelle, μ, aléatoire elle aussi. Des résultats concernant les boréliens portant μ et leur dimension de Hausdorff ont déjà été obtenus par J. Peyrière et par F. Ben Nasr. Nous nous proposons ici d'améliorer ces résultats, plus précisement nous montrons que ces dimensions dépendent de la géométrie du graphe d'une certaine fonction convexe introduite par B. Mandelbrot. Nous donnons aussi la dimension du support de μ dans un cas laissé en suspens dans les travaux antérieurs.

1. Introduction.

Considérons une famille $\mathcal{E}$ de parties du carré $[0,1]\times[0,1]$ telle que pour tout point x de ce carré, il existe des éléments de $\mathcal{E}$ qui le contiennent et dont le diamètre soit arbitrairement petit (nous prenons comme distance de deux points le maximum des valeurs absolues des différences des coordonnées).

Mots-clés : fractals, dimension de Hausdorff, mesure aléatoire, martingale, processus de branchements. Classification A. M. S. matières : 60D05-11K55 .

Manuscrit reçu le 6 Décembre 1991.

Si E est une partie du carré $[0,1] \times [0,1]$, notons diam E son diamètre. Si, de plus, d et ϵ sont deux nombres strictement positifs, posons

$$H_{d,\epsilon}(E,\mathcal{E}) = \inf\left\{ \sum_j (\text{diam } R_j)^d;\ E \subset \cup R_j,\ R_j \in \mathcal{E} \text{ et diam } R_j \leq \epsilon \right\}$$

$$H_d(E,\mathcal{E}) = \lim_{\epsilon \to 0} H_{d,\epsilon}(E,\mathcal{E})$$

et

$$\dim_{\mathcal{E}} E = \inf\{d, H_d(E,\mathcal{E}) = 0\}.$$

Lorsque E est constitué de tous les carrés, on obtient la dimension de Hausdorff que nous noterons dim. Dans [12] on donne des conditions sur $\mathcal{E}$ assurant l'identité $\dim_{\mathcal{E}} = \dim$. Nous nous plaçons ici dans une situation amenant à considérer des familles ne donnant pas lieu à cette identité. En effet nous étudions la dimension de certains ensembles aléatoires plans définis à la manière de Cantor, en prenant une intersection dénombrable de réunions de rectangles s'aplatissant au fur et à mesure que leur diamètre diminue. Ces fractales aléatoires ont été introduites par J. Peyrière [11] et étudiées dans un cadre moins restrictif dans [2]. Dans certains cas nous savons déterminer la dimension de ces ensembles, dans d'autres, nous en obtenons seulement un encadrement. Les méthodes employées font appel à la théorie des martingales de B. Mandelbrot [4, 5, 6, 7, 8] et les résultats obtenus améliorent et complètent [2, 11]. Dans le cas déterministe, des problèmes analogues ont été étudiés par T. J. Bedford [1], C. McMullen [10] et B. Mandelbrot [9].

2. Position du problème et résultats.

Soit A un ensemble fini. On note $A^* = \bigcup_k A^k$ l'ensemble des mots construits sur A. La longueur d'un élément j de A^* est notée $|j|$, le mot de longueur nulle ω. Si j et k appartiennent à A^*, on note jk le mot obtenu en mettant les mots j et k bout à bout.

Pour tout entier r supérieur ou égal à 2, on pose $N_r = \{0, 1, \ldots, r-1\}$. A chaque élément j de N_r^* on associe l'intervalle

$$I_r(j) = \left[\sum_{1 \leq k \leq |j|} j_k r^{-k}, \sum_{1 \leq k \leq |j|} j_k r^{-k} + r^{-|j|} \right[.$$

Soient r_1 et r_2 deux entiers tels que $2 \leq r_1 < r_2$. Si $j = (j^1, j^2)$ appartient à $(N_{r_1} \times N_{r_2})^*$, on note $R(j)$ ou $R(j^1, j^2)$ le rectangle $I_{r_1}(j^1) \times I_{r_2}(j^2)$.

Si j appartient à $(N_{r_1} \times N_{r_2})^n$ et k à $N_{r_1}^{q(n)-n}$ (où $q(n) = [\frac{n \log r_2}{\log r_1}]$), on pose :

$$Q(j,k) = I_{r_1}(j^1 k) \times I_{r_2}(j^2).$$

C'est ce que dans la suite on appellera un "presque carré" d'ordre n.

On considère maintenant une suite $\{A(j)\}_{j \in (N_{r_1} \times N_{r_2})^*}$ de variables aléatoires indépendantes, équidistribuées et à valeurs dans l'ensemble des parties non vides de $N_{r_1} \times N_{r_2}$. On suppose que pour tout b, chacune des parties à b éléments est équiprobable. Si j appartient à $(N_{r_1} \times N_{r_2})^*$ et k à $(N_{r_1} \times N_{r_2})$ on pose :

$$W(jk) = \frac{1}{\mid A(j) \mid} 1_{A(j)}(k)$$

où $|A(j)|$ désigne le cardinal de $A(j)$. Les variables aléatoires $W(j)$ sont équidistribuées et pour tout j la variable $W(j)$ est indépendante de l'ensemble des variables $\{W(j')\}_{|j'|<|j|}$.

On définit une fonction aléatoire μ sur les rectangles $\{R(j)\}_{j \in (N_{r_1} \times N_{r_2})^*}$ ainsi :

- $\mu((R(\omega)) = 1$,
- $\mu(R(jk)) = W(jk)\mu(R(j))$ si $j \in (N_{r_1} \times N_{r_2})^*$ et $k \in N_{r_1} \times N_{r_2}$.

Il s'agit d'une généralisation d'une construction de J. Peyrière [11]. Presque sûrement cette fonction se prolonge en une probabilité, encore notée μ, sur la tribu de Borel de $R(\omega) = [0,1[\times[0,1[$.

Désignons par W une variable aléatoire de même distribution que les variables $W(j)$ et posons $X = r_1 r_2 W$. Considérons la fonctions convexe

$$\varphi(h) = \log_{r_2} E(X^h) - (h-1) \quad (\text{où } \log_{r_2} x = \log x / \log r_2)$$

qui est définie pour $h \geq 0$. La fonction φ s'annule au point 1 et sa dérivée en ce point est

$$\varphi'(1) = E(X \log_{r_2} X) - 1.$$

Cette fonction a été introduite par B. Mandelbrot [8]. On verra que la dimension des boréliens portant μ dépend de la géométrie du graphe de φ.

THÉORÈME 1. *On suppose $\varphi'(1) < 0$. Pour chaque $x \in R(\omega)$, on désigne par $Q_n(x)$ le "presque carré" d'ordre n contenant x. On a presque sûrement*

$$\lim_{n\to\infty} \frac{1}{n} \log \mu(Q_n(x)) = -E(\log |A(\omega)|) + \log r_1/r_2 \quad \mu-\textit{presque partout}.$$

COROLLAIRE. *La mesure μ est presque sûrement portée par un borélien de dimension de Hausdorff*

$$D = \frac{E(\log |A(\omega)|)}{\log r_2} + \left(1 - \frac{\log r_1}{\log r_2}\right)$$

tandis que tout borélien de dimension $< D$ est de μ-mesure nulle.

Ce corollaire améliore [2, 11], en effet dans [2] (qui est une amélioration de [11]) on avait établi le même résultat sous la condition $E(W^2) < r_1^{-2} r_2^{-1}$, cette condition s'écrit aussi $\varphi(2) < 0$, compte-tenu de la convexité de φ elle entraîne $\varphi'(1) < 0$.

Démonstration du théorème 1. Les variables $\{A(j)\}_j$ sont définies sur un espace $(\Omega, \mathcal{A}, P)$. Considérons la probabilité $\mathbb{P}$ sur la tribu $\mathcal{F}$, produit de $\mathcal{A}$ par la tribu de Borel de $[0,1[^2$ telle que l'on ait $\mathbb{P}(A \times R) = E(\mu(R) 1_A)$. L'espérance correspondante sera notée $\mathbb{E}$. Dans ces conditions $\mathbb{P}$-presque sûrement équivaut à presque sûrement, μ-presque partout.

Considérons un "presque carré" $Q(j,k)$ d'ordre n (avec $|j| = n$).
Puisque l'on a

$$\mu(Q(j,k)) = \sum \left\{ \mu(R(j^1 k, j^2 \ell)) \; ; \; \ell \in N_{r_2}^{q(n)-n} \right\}$$

on peut écrire

$$\mu(Q(j,k)) = \mu(R(j)) T(j,k)$$

où

$$T(j,k) = \sum_{\ell \in N_{r_2}^{q(n)-n}} W(j^1 k_1, j^2 \ell_1) W(j^1 k_1 k_2, j^2 \ell_1 \ell_2) \ldots$$
$$\ldots W(j^1 k_1 \ldots k_{q(n)-n}, j^2 \ell_1 \ldots \ell_{q(n)-n}).$$

Posons

$$T_n = \sum_{j \in (N_{r_1} \times N_{r_2})^n} \sum_{k \in N_{r_1}^{q(n)-n}} T(j,k) 1_{Q(j,k)}$$

et

$$X_n = \sum_{|j|=n} W(j) 1_{R(j)}$$

et notons $R_n(x)$ le rectangle d'ordre n (avec $|j| = n$) qui contient x. On a alors

$$\mu(R_n(x)) = \prod_{i=1}^{n} X_i(x)$$

et

$$\mu(Q_n(x)) = \mu(R_n(x)) T_n(x)$$

(avec un abus de notation évident).

Soit u une fonction borélienne bornée de $\mathbb{R}^{n-1}$ dans $\mathbb{R}$. On a :

$$\begin{aligned}\mathbb{E}[u(X_1, \dots, X_{n-1}) \log\ X_n] &= \sum_{|j|=n} E[u(W(j_1), \dots, W(j_1 \dots j_{n-1})) \\ &\qquad \times \mu(R(j_1, \dots, j_n) \log\ W(j_1, \dots, j_n)] \\ = \sum_{|j|=n} E[u(W(j_1), \dots, W(j_1, \dots, j_{n-1}))\mu(R(j_1, \dots, j_{n-1})) \\ &\qquad \times W(j_1, \dots, j_n) \log\ W(j_1, \dots, j_n)],\end{aligned}$$

tenant compte des propriétés d'indépendance des variables on obtient :

$$\mathbb{E}[u(X_1, \dots, X_{n-1}) \log\ X_n] = -E(\log\ |A(\omega)|)\mathbb{E}[u(X_1, \dots, X_{n-1})].$$

Ceci prouve que l'on a $\mathbb{E}(\log\ X_n / X_1, \dots, X_{n-1}) = -E(\log\ |A(\omega)|)$. Le théorème de convergence des martingales de carrés sommables entraîne alors que, presque sûrement, pour μ-presque tout x, on a

$$\lim_{n \to \infty} \frac{1}{n} \log\ \mu(R_n(x)) = -E(\log\ |A(\omega)|).$$

La démonstration sera donc complète après que nous aurons prouvé le lemme suivant.

LEMME 1. *Si $\varphi'(1) < 0$, alors $\frac{1}{n} \log\ T_n$ tend vers $\log(\frac{r_1}{r_2})$ presque sûrement relativement à $\mathbb{P}$.*

Démonstration. Calculons $\mathbb{E}(\varphi(r_1^{q(n)-n} T_n))$ où φ est une fonction borélienne de signe constant. On a

$$\begin{aligned}\mathbb{E}\left[\varphi(r_1^{q(n)-n} T_n)\right] &= \sum_{j,k} E\left[\varphi\left(r_1^{q(n)-n} T(j,k)\right) \mu(Q(j,k))\right] \\ &= \sum_{j,k} E\left[\varphi\left(r_1^{q(n)-n} T(j,k)\right) T(j,k) \mu(R(j))\right]\end{aligned}$$

tenant compte des propriétés d'indépendance des variables, on obtient :

$$\mathbb{E}\left[\varphi(r_1^{q(n)-n}T_n)\right] = E\left[r_1^{q(n)-n}T(j,k)\varphi\left(r_1^{q(n)-n}T(j,k)\right)\right] \tag{1}$$

où j et k sont deux éléments quelconques respectivement de $(N_{r_1} \times N_{r_2})^n$ et de $N_{r_1}^{q(n)-n}$.

Nous allons maintenant définir un processus ayant même distribution que $r_1^{q(n)-n}T(j,k)$. Considérons une suite $\{X(\ell)\}_{\ell \in N_{r_2}^*, |\ell| \geq 1}$ telle que

- pour tout ℓ appartenant à $N_{r_2}^*$ la loi conjointe de $\{X(\ell k)\}_{0 \leq k < r_2}$ est identique à celle des variables $\{r_1 r_2 W(0,k)\}_{0 \leq k < r_2}$.
- la suite de variables aléatoires $\{(X(\ell k))_{0 \leq k < r_2})_{\ell \in N_{r_2}^*}$ est indépendante.

On pose

$$Y_n = r_2^{-n} \sum_{\ell_1 \ell_2 \ldots \ell_n} X(\ell_1)X(\ell_1\ell_2)\ldots X(\ell_1\ell_2\ldots\ell_n). \tag{2}$$

C'est une martingale de B. Mandelbrot [5]. Observons que la variable $r_1^{q(n)-n}T(j,k)$ a la même distribution que $Y_{q(n)-n}$.

Il résulte donc de (1) que

$$\mathbb{E}\left[\left(r_1^{q(n)-n}T_n\right)^{-1/2}\right] = E\left(Y_{q(n)-n}^{1/2}\right).$$

Par la suite, $\mathbb{P}$-presque sûrement, on a lim inf $\frac{1}{n}$ log $T_n \geq \log(r_1/r_2)$.

Soit maintenant un nombre $\alpha > 1$. On a

$$\mathbb{P}\left(\left\{r_1^{q(n)-n}T_n > \alpha^n\right\}\right) = E\left(Y_{q(n)-n}1_{\{Y_{q(n)-n} > \alpha^n\}}\right).$$

L'hypothèse $\varphi'(1) < 0$ entraîne l'existence d'un réel $h > 1$ tel que $E(X^h) < r_2^{h-1}$. Ceci, grâce à un théorème de Kahane [5], prouve que la martingale Y_n est bornée dans L_h. Il en résulte que

$$\mathbb{P}\left(r_1^{q(n)-n}T_n > \alpha^n\right) = O(\alpha^{-nM}) \quad (\text{où } M > 0).$$

Cela entraîne que, pour tout $\alpha > 1$, $\mathbb{P}$-presque sûrement, on a lim sup $\frac{1}{n}$ $\log(r_1^{q(n)-n}T_n) \leq \log\ \alpha$, d'où lim sup $\frac{1}{n}$ log $T_n \leq \log(r_1/r_2)$. Le lemme est démontré.

Pour démontrer le corollaire, on applique le théorème de Billingsley ([3], p.144) et on utilise le fait que la famille de tous les "presque carrés" $Q(j,k)$, notée $\mathcal{E}_1$, permet le calcul de la dimension de Hausdorff [12].

Intéressons-nous maintenant au cas où $\varphi'(1) \geq 0$. Nous obtenons un encadrement de la dimension minimale des boréliens portant μ.

THÉORÈME 2. *La mesure μ est presque sûrement portée par un borélien de dimension supérieure ou égale à*

$$D_1 = (\log\, r_2)^{-1}\left[E(\log|A(\omega)|) + \left(1 - \frac{\log\, r_2}{\log\, r_1}\right)(E(X\log X) - \log r_1 r_2)\right].$$

De plus tout borélien de dimension $< D_1$ est de μ-mesure nulle.

THÉORÈME 3. *Si $E(1_X) \leq r_2^{-1}$ alors μ est presque sûrement concentrée sur un borélien de dimension inférieure ou égale à*

$$D_2 = (\log\, r_2)^{-1}\left[E(\log|A(\omega)|) + \left(\frac{\log\, r_2}{\log\, r_1} - 1\right)\log\, r_1 r_2 E(1_X)\right].$$

Avant de démontrer le théorème 2 établissons d'abord deux lemmes.

LEMME 2. *Si $\varphi'(1) \geq 0$, alors pour tout $h > 1$ on a*

$$E(Y_n^h) = O\left((r_2^{1-h}E(X^h))^n\right).$$

Démonstration. Il est commode d'écrire (2) sous la forme

$$Y_n = r_2^{-1}\sum_{j=0}^{r_2-1} X(j)Y_{n-1}(j).$$

Les variables aléatoires $Y_{n-1}(j)$ sont mutuellement indépendantes et ont la même distribution que Y_{n-1}. Soit h donné > 1 et k l'entier tel que $k < h \leq k+1$. Comme la fonction $x^{h/k+1}$ est sous-additive, on a

$$\begin{aligned} r_2^h Y_n^h &\leq \left(\sum_j (X(j)Y_{n-1}(j))^{h/k+1}\right)^{k+1} \\ &\leq \sum_j (X(j)Y_{n-1}(j))^h + \sum \gamma_\alpha \left(\prod (X(j)Y_{n-1}(j))^{\frac{h}{k+1}\alpha_j}\right) \end{aligned}$$

d'où, en prenant les espérances,

$$E(Y_n^h) \leq (r_2^{1-h}E(X^h))\, E(Y_{n-1}^h) + r_2 E(X^h)E(Y_{n-1}^k)^{h/k}. \tag{3}$$

L'hypothèse $\varphi'(1) \geq 0$ entraîne que φ est strictement convexe et par suite $\varphi(h) > 0$, c'est-à-dire $r_2^{1-h}E(X^h) > 1$. L'inégalité (3) établit donc le résultat cherché quand $1 < h \leq 2$. Supposons maintenant $h > 2$ et posons $\Theta = \dfrac{h}{1-h}\,\dfrac{1-k}{k}$. On a :

$$\begin{aligned} E(X^k) &= E(X^{\Theta k + (1-\Theta)k}) \\ &\leq E(X^h)^{\frac{1-k}{1-h}}, \end{aligned}$$

tenant compte de l'inégalité $\varphi(h) > 0$, on obtient :

$$(r_2^{1-k}E(X^k))^{h/k} < r_2^{1-h}E(X^h). \tag{4}$$

De (3) et (4) résulte que

$$E(Y_n^k) = O((r_2^{1-k}E(X^k))^n) \Rightarrow E(Y_n^h) = O((r_2^{1-h}E(X^h))^n).$$

Cela établit, de proche en proche, le lemme quand $h > 2$. Le lemme est démontré.

LEMME 3. *On a* $\exp E(X \log X) = \inf\{E(X^{1+\alpha})^{1/\alpha}\ ;\ \alpha > 0\}$.

Démonstration. Considérons la fonction convexe

$$f(t) = t \log E(X^{1+t^{-1}})$$

qui est définie pour $t > 0$. On vérifie que $f(t)$ tend vers $E(X \log X)$ quand $t \to +\infty$ et vers $+\infty$ quand $t \to 0$. Cela entraîne que $E(X \log X)$ est la borne inférieure de f. Puisque l'on a $E(X^{1+\alpha})^{1/\alpha} = e^{f(1/\alpha)}$ le lemme est démontré.

Démonstration du théorème 2. Soit $\alpha > 0$. On a

$$\begin{aligned} \mathbb{E}\left(\left(r_1^{q(n)-n}T_n\right)^{\alpha}\right) &= E\left(\left(r_1^{q(n)-n}T(j,k)\right)^{1+\alpha}\right) \\ &= E(Y_{q(n)-n}^{1+\alpha}), \end{aligned}$$

d'où, en utilisant le lemme 2,

$$\mathbb{E}\left(\left(r_1^{q(n)-n}T_n\right)^\alpha\right) = O\left((r_2^{-\alpha}E(X^{1+\alpha}))^{q(n)-n}\right),$$

c'est-à-dire

$$\mathbb{E}\left(\left(\lambda_\alpha^{q(n)-n}T_n\right)^\alpha\right) = O(1) \quad (\text{où } \lambda_\alpha = r_1 r_2 E(X^{1+\alpha})^{-1/\alpha}),$$

par conséquent

$$\mathbb{E}\left(\sum_{n\geq 1} \frac{1}{n^2} \left(\lambda_\alpha^{q(n)-n}T_n\right)^\alpha\right) < \infty.$$

Donc, $\mathbb{P}$-presque sûrement, à partir d'un certain rang on a :

$$\left(\frac{q(n)}{n} - 1\right) \log \lambda_\alpha + \frac{1}{n} \log T_n \leq 2(\alpha n)^{-1} \log n.$$

Ceci prouve que, pour tout $\alpha > 0$, $\mathbb{P}$-presque sûrement on a :

$$\liminf \frac{-1}{n} \log T_n \geq \left(\frac{\log r_2}{\log r_1} - 1\right) \log \lambda_\alpha.$$

Le lemme 3 donne bien

$$\liminf \frac{\log \mu(Q_n(x))}{\log \operatorname{diam} Q_n(x)} \geq D_1.$$

Le théorème de Billingsley permet alors de conclure.

Fin de la démonstration du théorème 2.

Démonstration du théorème 3. Pour tout $j \in (N_{r_1} \times N_{r_2})^n$ désignons par $\psi(j)$ le nombre de "presque carrés" d'ordre n, de μ-mesures non nulles, qui sont contenus dans $R(j)$. Posons $\lambda = r_1 r_2\, E(1_X)$ et considérons la variable aléatoire

$$\psi_n = \sum_{|j|=n} \psi(j) 1_{R(j)}.$$

Nous allons montrer que $\frac{1}{n^2}\lambda^{n-q(n)}\psi_n$ tend vers 0 presque sûrement relativement à $\mathbb{P}$. Admettons-le provisoirement et considérons l'ensemble aléatoire

$$E = \left\{ \begin{array}{c} x \in R(\omega)\ ;\ \lim\limits_{n\to\infty} \frac{1}{n} \log \mu(R_n(x)) = -E(\log |A(\omega)|) \\ \text{et } \lim\limits_{n\to\infty} \frac{1}{n^2} \lambda^{n-q(n)}\psi_n(x) = 0 \end{array} \right\}.$$

La mesure μ est donc presque sûrement portée par E. Pour tout entier p posons :

$$E_p = \{x \in E \ ; \ \psi_n(x) \leq n^2 \lambda^{q(n)-n} \quad \text{pour tout} \quad n \geq p\},$$

et montrons que l'on a dim $E_p \leq d$, pour tout $d > D_2$. Ceci prouvera bien que dim $E \leq D_2$. On peut associer à d un réel γ tel que

$$\gamma > \gamma_0 = E(\log |A(\omega)|)/\log r_1$$

et

$$d \log r_2 - \left(\frac{\log r_2}{\log r_1} - 1\right) \log \lambda > \gamma \log r_1.$$

Considérons maintenant un rectangle $R(j)$ d'ordre n rencontrant E_p tel que diam $R(j) \leq \epsilon$. Quitte à prendre ϵ plus petit, on peut supposer que

$$\text{(5)} \qquad n \geq p \quad \text{et} \quad d \log r_2 - \left(\frac{q(n)}{n} - 1\right) \log \lambda - \frac{2 \log n}{n} \geq \gamma \log r_1.$$

On a donc :

$$E_p \cap R(j) \subset \cup\{Q(j,k) \ ; \ k \in K\}$$

où K est une partie de $N_{r_1}^{q(n)-n}$ de cardinal inférieur à $n^2\lambda^{q(n)-n}$. Notons aussi que les diamètres de ces "presque carrés" sont inférieurs à ϵ. En vertu de (5), on a :

$$\sum_{k \in K} (\text{diam } Q(j,k))^d \leq (\text{diam } R(j))^\gamma$$

il s'ensuit que

$$H_{d,\epsilon}(E_p, \ \mathcal{E}_1) \leq H_{\gamma,\epsilon}(E_p, \ \mathcal{E}_2)$$

où $\mathcal{E}_2$ désigne la famille de tous les rectangles $R(j)$. Or $\dim_{\mathcal{E}_2} E_p \leq \gamma_0$, donc on a dim $E_p \leq d$. Il reste donc à montrer le lemme suivant pour achever la démonstration du théorème 3.

Lemme 4. *On a* $\mathbb{E}(\psi_n) = O(\lambda^{q(n)-n})$.

Démonstration. Calculons $\mathbb{E}(\psi_n)$. On a

$$\begin{aligned}\mathbb{E}(\psi_n) &= \sum_{|j|=n} E(\psi(j)\mu(R(j))) \\ &= E(\psi(j))\end{aligned}$$

où j est un élément quelconque de $(N_{r_1} \times N_{r_2})^n$. Donc

$$\mathbb{E}(\psi_n) = r_1^{q(n)-n} \ P(\{T(j,k) \neq 0\})$$

où k est un élément de $N_{r_1}^{q(n)-n}$.

Nous allons maintenant donner une autre expression de $P(T(j,k) \neq 0)$. Pour tout $\ell \in N_{r_2}^*$ posons $\widetilde{X}(\ell) = 1_{X(\ell)}$ et considérons la variable aléatoire

$$\widetilde{Y}_n = \sum_{\ell_1 \ell_2 \dots \ell_n} \widetilde{X}(\ell_1)\widetilde{X}(\ell_1\ell_2)\dots\widetilde{X}(\ell_1\ell_2\dots\ell_n).$$

Observons que $P(\{T(j,k) \neq 0\}) = P(\{\widetilde{Y}_{q(n)-n} \neq 0\})$. La variable $\widetilde{Y}_n$ n'est autre que le nombre d'individus à l'instant n pour un processus de Galton-Watson à un seul type : un individu donne naissance en moyenne à $m = r_2 E(1_X)$ individus (par hypothèse $m \leq 1$). Il résulte des propriétés des processus de Galton-Watson que $P(\{\widetilde{Y}_n \neq 0\}) = O(m^n)$, ce qui achève la démonstration du lemme 4.

Considérons maintenant le cas particulier où les $A(j)$ ont tous le même nombre b d'éléments et notons F le support de μ :

$$F = \bigcap_n \cup \{\overline{R(j)} \ ; \ |j| = n \quad \text{et} \quad \mu(R(j)) \neq 0\}.$$

Il est établi dans [2, 11] que presque sûrement $\dim F = \frac{\log\ b}{\log\ r_2} + \left(1 - \frac{\log\ r_1}{\log\ r_2}\right)$ si $r_1 < b \leq r_1 r_2$. Le théorème suivant détermine la dimension de ce compact aléatoire dans l'autre cas.

THÉORÈME 4. *Si* $1 \leq b \leq r_1$, *on a presque sûrement dim* $F = \dfrac{\log\ b}{\log\ r_1}$.

Démonstration. Dans ces conditions on a $\varphi'(1) \geq 0$. Il résulte donc du théorème 2 que presque sûrement $\dim F \geq D_1 = \log\ b/\log\ r_1$. Reste à montrer l'inégalité opposée.

L'ensemble F, étant recouvert par b^n rectangles $\{R(j)\}_{|j|=n}$, l'est par au plus $b^{q(n)}$ des "presque carrés" $Q(j,k)$ d'ordre n, donc

$$H_{D_1, r_2^{-n}}(F, \mathcal{E}_1) \leq b^{q(n)} r_2^{-n \log b/\log r_1}$$

ce qui prouve que $H_{D_1}(F, \mathcal{E}_1)$ est fini et par suite $\dim F \leq \log\ b/\log\ r_1$.

Fin de la démonstration du théorème 4.

Remarque. Dans le cas où $1 \leq b \leq r_1$ on a aussi $E(1_X) \leq r_2^{-1}$ et $D_2 = D_1 = \dfrac{\log b}{\log r_1}$.

RÉFÉRENCES

[1] T. BEDFORD, *Hölder exponents and box dimension for self-affine fractal functions*, Preprint.

[2] F. BEN NASR, *Ensembles aléatoires self-affines en loi*, Bull. Sc. math., 2^e série **116** (1992), 111-119.

[3] P. BILLINGSLEY, *Ergodic theory and information*, J. Wiley, 1965.

[4] J.-P. KAHANE, *Sur le modèle de turbulence de Benoît Mandelbrot*, C. R. Acad. Sci. Paris **278** (1974), 621-623.

[5] J.-P. KAHANE & J. PEYRIÈRE, *Sur certaines martingales de Benoît Mandelbrot*, Advances in Math. **22** (1976), 131-145.

[6] B. MANDELBROT, In *Statistical models and turbulence*, Symposium at the Univ. Calif., San Diego, 1971, Springer Verlag, 1972, 333-351.

[7] B. MANDELBROT, *Intermittent turbulence in self-similar cascades: divergence of high moments and dimension of the carrier*, J. Fluid Mech. **62** (1974), 331-358.

[8] B. MANDELBROT, *Multiplications aléatoires itérées et distributions invariantes par moyenne pondérée aléatoire*, C. R. Acad. Sci. Paris **278** (1974), 289-292 et 355-358.

[9] B. MANDELBROT, *Self-affine fractals sets*, In *Fractals in Physics* (Trieste, 1985), edited by L. Pietronero and E. Tosatti. North Holland Publ. Cny 1986.

[10] C. McMULLEN, *The Hausdorff dimension of general Sierpinski carpets*, Nagoya Math. J. **96** (1984), 1-9.

[11] J. PEYRIÈRE, *Comparaison de deux notions de dimension*, Bull. Soc. Math. France **114** (1986), 97-103.

[12] J. PEYRIÈRE, *Mesures singulières associées à des découpages aléatoires d'un hypercube*, Coll. Math. **51** (1987), 267-276 (volume dédié à S. Hartman).

(adresse permanente)
Faculté des Sciences de Monastir,
5000 MONASTIR (Tunisie),
et
Université de Paris Sud,
Mathématiques - Bât. 425,
91405 ORSAY Cedex (France)