JOURNAL DE THÉORIE DES NOMBRES DE BORDEAUX

Y.-F. S. PÉTERMANN

Oscillations d'un terme d'erreur lié à la fonction totient de Jordan

Journal de Théorie des Nombres de Bordeaux 2e série, tome 3, nº 2 (1991), p. 311-335

<http://www.numdam.org/item?id=JTNB_1991__3_2_311_0>

Séminaire de Théorie des Nombres,
Bordeaux **3** *(1991), 311-335*

Oscillations d'un terme d'erreur lié à la fonction totient de Jordan.

par Y.-F.S. PÉTERMANN

Abstract. Let $J_k(n) := n^k \prod_{p|n}(1-p^{-k})$ (the k-th Jordan totient function, and for $k = 1$ the Euler phi function), and consider the associated error term

$$E_k(x) := \sum_{n\leq x} J_k(n) - \frac{x^{k+1}}{(k+1)\zeta(k+1)} .$$

When $k \geq 2$, both $i_k := \liminf E_k(x)x^{-k}$ and $s_k := \limsup E_k(x)x^{-k}$ are finite, and we are interested in estimating these quantities. We may consider instead

$$I_k := \liminf_{n\in\mathbb{N}, n\to\infty} \sum_{d\geq 1} \frac{\mu(d)}{d^k}\left(\frac{1}{2} - \{\frac{n}{d}\}\right) ,$$

since from [AS] $i_k = I_k - (\zeta(k+1))^{-1}$ and from the present paper $s_k = -i_k$. We show that I_k belongs to an interval of the form

$$\left(\frac{1}{2\zeta(k)} - \frac{1}{(k-1)N^{k-1}}, \frac{1}{2\zeta(k)}\right) ,$$

where $N = N(k) \to \infty$ as $k \to \infty$. From a more practical point of view we describe an algorithm capable of yielding arbitrary good approximations of I_k. We apply this algorithm to the small values of k and obtain $.29783 < I_2 < .29877$, $.415891 < I_3 < .415923$, and $.46196896 < I_4 < .46196916$.

1. Introduction et résultats.

La fonction arithmétique

$$J_k(n) := n^k \prod_{p|n}\left(1 - \frac{1}{p^k}\right) \tag{1.1}$$

Manuscrit reçu le 27 août 1990 .

compte le nombre d'entiers m, $1 \leq m \leq n^k$, qui ne sont divisibles par aucun des p^k tels que $p|n$. C'est la fonction ϕ d'Euler lorsque $k = 1$. Nous nous intéressons ici au terme d'erreur

$$E_k(x) := \sum_{n \leq x} J_k(n) - \frac{x^{k+1}}{(k+1)\zeta(k+1)} \tag{1.2}$$

lorsque $k \geq 2$. Dans un article récent [AS] Adhikari et Sankaranarayanan ont étudié les quantités

$$s_k := \limsup_{x \to \infty} E_k(x) x^{-k} \tag{1.3}$$

et

$$i_k := \liminf_{x \to \infty} E_k(x) x^{-k} . \tag{1.4}$$

Ils ont montré que si $n \in \mathbb{N}$, alors lorsque $n \to \infty$

$$E_k(n + 1^-) - E_k(n) = -\frac{n^k}{\zeta(k+1)} + o(n^k) , \tag{1.5}$$

et que si $x \in \mathbb{R}$, alors lorsque $x \to \infty$

$$E_k(x) = x^k h(x) + o(x^k) , \tag{1.6}$$

où

$$h(x) = h_k(x) := \sum_{d=1}^{\infty} \frac{\mu(d)}{d^k} \left(\frac{1}{2} - \{\frac{x}{d}\} \right) . \tag{1.7}$$

Il suit que

$$s_k = \limsup_{n \in \mathbb{N}, n \to \infty} h_k(n) , \tag{1.8}$$

et que

$$i_k = I_k - \frac{1}{\zeta(k+1)} , \tag{1.9}$$

où

$$I_k = \liminf_{n \in \mathbb{N}, n \to \infty} h_k(n) . \tag{1.10}$$

Ils ont obtenu les estimations

$$\frac{0.59}{\zeta(3)} < s_2 < \frac{0.7159}{\zeta(3)} , \tag{1.11}$$

$$I_k \leq \frac{0.5}{\zeta(k+1)} \leq s_k \qquad (k \geq 2) , \tag{1.12}$$

$$s_k < \frac{0.6063}{\zeta(k+1)} \qquad (k \geq 3) . \tag{1.13}$$

Le but du présent article est de compléter et d'améliorer ces résultats. Remarquons tout d'abord que nous pouvons simplifier l'expression des propriétés (1.11) à (1.13) en faisant appel au Théorème 2, que nous démontrerons tout à la fin de ce travail (chapitre 5).

THÉORÈME 2. *Pour tout $k \geq 2$ nous avons*

$$i_k = -s_k \ . \tag{1.14}$$

Nous pouvons donc nous contenter d'étudier celle des deux quantités s_k et I_k pour laquelle les calculs sont le moins compliqués. Il s'agit de I_k, et les estimations (1.11) à (1.13) sont équivalentes à

$$\frac{0.2841}{\zeta(3)} < I_2 < \frac{0.41}{\zeta(3)} \tag{1.15}$$

et

$$\frac{0.3937}{\zeta(k+1)} < I_k \leq \frac{0.5}{\zeta(k+1)} \quad (k \geq 3) \ . \tag{1.16}$$

(Notons que chacune des deux inégalités de (1.12) est équivalente à l'autre). Pour les valeurs $k = 2, 3$ et 4 ceci nous donne

$$\left.\begin{matrix} 0.2363 \\ 0.3637 \\ 0.3796 \end{matrix}\right\} < I_k < \left\{\begin{matrix} 0.3411 & (k=2) \\ 0.4620 & (k=3) \\ 0.4822 & (k=4) \ . \end{matrix}\right. \tag{1.17}$$

Au chapitre 2 nous montrons le théorème suivant.

THÉORÈME 1. *Si $r \geq 2$, et si $P_r = \prod_{p \leq p_r} p$ est le produit des r premiers nombres premiers,*

il existe un entier $k_0 = k_0(r)$ tel que si $k \geq k_0$ on a

$$I_k = \liminf_{n \equiv 0 (P_r)} h_k(n) \ , \tag{1.18}$$

et il existe un entier $k_0' = k_0'(r) \leq k_0$ tel que si $k \geq k_0'$, alors

$$-\frac{\zeta(k)}{2\zeta(2k)} + \frac{\zeta(k+1)}{2\zeta(2k+2)} + \frac{1}{2\zeta(k+1)} + \sum_{\substack{d \mid P_r \\ \mu(d)=1}} \frac{d-1}{d^{k+1}} \leq I_k < \frac{1}{2\zeta(k)} \ . \tag{1.19}$$

La majoration est valable pour tout $k \geq 2$.

Si l'on considère les développements en séries de Dirichlet des extrémités de (1.19), on voit que pour de grandes valeurs de k, I_k est très bien approximé par $h_k(0) = 1/2\zeta(k)$ (l'erreur commise étant bornée par $(k-1)^{-1}N^{-k+1}$, où $N = N(k) = 2p_{r(k)+1} - 1 \to \infty$ lorsque $k \to \infty$).

Au chapitre 3 nous décrivons un algorithme capable de produire une évaluation de I_k aussi précise que l'on veut. Des minorations explicites pour I_k sont ensuite obtenues: nous montrons par exemple que

$$\text{(a) } k_0'(3) = 2 \ , \quad \text{(b) } k_0'(5) \le 3 \ , \text{ et } \quad \text{(c) } k_0'(9) \le 4 \ , \tag{1.20}$$

soit que la première inégalité de (1.19) est vraie pour tout $k \ge 2$ avec $P_r = P_3 = 30$, pour tout $k \ge 3$ avec $P_r = P_5 = 2310$, et pour tout $k \ge 4$ avec $P_r = P_9 = 223092870$. Pour l'établissement de (1.20) la démonstration préalable de

$$\text{(a) } k_0(2) = 2 \ , \quad \text{(b) } k_0(4) \le 3 \ , \text{ et } \quad \text{(c) } k_0(7) \le 4 \ , \tag{1.21}$$

(et de propriétés un peu plus précises) réduit considérablement le nombre de calculs à effectuer. Et pour les valeurs particulières $2 \le k \le 4$ nous poussons plus loin nos investigations pour obtenir finalement

$$I_k > \begin{cases} 0.29783 & (k=2) \\ 0.415891 & (k=3) \\ 0.46196896 & (k=4) \ . \end{cases} \tag{1.22}$$

En ce qui concerne la majoration de I_k dans (1.19), l'inégalité stricte peut être obtenue, ainsi qu'il est décrit dans le chapitre 2, en estimant $h(n)$ pour un certain $n \equiv 0(p)$ si $p = 2, 3, \dots, \widehat{p_s}, \dots, p_r$, et $n \equiv 1(p_s)$, où s et r sont choisis de façon adéquate. Au chapitre 4 une meilleure majoration est atteinte sur la suite

$$\{h(n_i)\}_{i=r+1}^{\infty}, \quad n_i \equiv 0(P_r), \quad n_i \equiv 1(p_j) \ (r < j \le i) \tag{1.23}$$

pour $2 \le k \le 4$, si l'on pose $r(2) = 3$, $r(3) = 5$, et $r(4) = 9$. Nous obtenons

$$I_k \le J_k := \frac{1}{2\zeta(k)} - \sum_{d=1}^{\infty} \frac{\mu(d)}{d^{k+1}} a_d(k) = \begin{cases} 0.2987\dots & (k=2) \\ 0.415922\dots & (k=3) \\ 0.46196915473\dots & (k=4) \ , \end{cases} \tag{1.24}$$

où $0 \le a_d(k) \le d-1$, $a_d(k) \equiv 0(d_1(k))$, $a_d(k) \equiv 1(d_2(k))$ pour $d = d_1(k)d_2(k)$ avec $d_1(k) := (P_{r(k)}, d)$. Le choix de $r(k)$ est assez naturel lorsqu'on a pris connaissance du chapitre 3 (et en particulier de la preuve de (1.20)), et l'on est alors amené à se demander si peut-être $I_k = J_k$; il s'avère toutefois que, comme il est montré à la fin du chapitre 4,

$$I_2 < J_2 \ , \tag{1.25}$$

et la méthode de démonstration devrait pouvoir se généraliser pour établir que

$$I_k < J_k \quad (k \geq 2) \ . \tag{H}$$

La preuve de (1.25) ne mène cependant qu'à une amélioration extrêmement petite de l'estimation (1.24), qui je pense est beaucoup plus proche de la valeur de I_k que (1.22).

Remarque. Lorsque $k = 1$, si l'on définit $E = E_1$ par la relation (1.2), soit

$$E(x) := \sum_{n \leq x} \phi(n) - \frac{3}{\pi^2} x^2 \ , \tag{1.26}$$

on peut montrer [P1, Theorem 1] que

$$H(x) := \frac{E(x)}{x} = \sum_{d \leq z} \frac{\mu(d)}{d} \left(\frac{1}{2} - \{\frac{x}{d}\} \right) + o(1) =: H(z, x) + o(1), \tag{1.27}$$

où $z = z(x)$ est une certaine fonction à croissance lente. Mais les méthodes de cet article reposent toutes sur la convergence uniforme (en x) de la somme dans la définition (0.7) de $h_k(x)$, et ne s'appliquent donc pas à $H(z, x)$. On sait que [W]

$$H(x) = O((\log x)^{\frac{2}{3}} (\log \log x)^{\frac{4}{3}}) \tag{1.28}$$

et que [M]

$$H(x) = \Omega_{\pm}(\sqrt{\log \log x}). \tag{1.29}$$

On sait également que la fonction de répartition des valeurs de H existe et qu'elle est continue [ES], et même qu'elle est symétrique [P2] : notons en passant que la fonction de répartition de h_k est également symétrique, et de support borné $[i_k, s_k]$, ce qui permet de montrer d'une autre façon le Théorème 2 (voir [P3, Théorème 1] pour un traitement similaire).

Ce travail a été fait alors que j'étais au bénéfice d'une bourse de recherche du Fonds national suisse de la recherche scientifique. Je remercie également le Professeur J.L. Nicolas de l'Université Claude Bernard à Lyon, pour ses encouragements et le temps qu'il a eu la gentillesse de me consacrer. Il a effectué, à l'aide du système de calcul formel "MAPLE", tout le travail informatique qu'a nécessité cet article. Je remercie finalement le rapporteur pour sa lecture minutieuse du manuscrit, qui m'a conduit à y apporter certains éclaircissements, notamment en ce qui concerne la description A.1 du procédé A au chapitre 3.

2. Preuve du Théorème 1.

Le premier lemme et son corollaire permettent de simplifier certains calculs et raisonnements. On peut d'autre part en déduire immédiatement les inégalités

$$I_k \le h_k(0) = \frac{1}{2\zeta(k)} \tag{2.1}$$

et

$$s_k \ge h_k(-1) = \frac{1}{\zeta(k+1)} - \frac{1}{2\zeta(k)} , \tag{2.2}$$

qui ne sont pas de mauvaises estimations comme on le verra par la suite.

LEMME 1. *On a*

$$I_k = \inf_{n \in \mathbb{Z}} h_k(n) \tag{2.3}$$

et

$$s_k = \sup_{n \in \mathbb{Z}} h_k(n) \tag{2.4}$$

Preuve. Si I'_k, respectivement s'_k, designent les côtés droits de (2.3), resp. (2.4), alors clairement $I'_k \le I_k$ et $s'_k \ge s_k$. D'autre part, si $n_i := \prod_{p \le i} p + n$, alors $\lim_{i \to \infty} h(n_i) = h(n)$, ce qui montre que $I'_k \ge I_k$ et $s'_k \le s_k$. $\square$

COROLLAIRE. *Si pour n entier et $n \to \infty$ on a*

$$h(n) \le S + o_n(1) \ , \quad \textit{respectivement} \quad h(n) \ge I + o_n(1) \ ,$$

alors on a aussi

$$h(n) \le S \ , \quad \textit{resp.} \quad h(n) \ge I \ ,$$

pour tout $n \in \mathbb{Z}$.

Si l'on excepte la majoration de (1.19) qui sera démontrée plus bas, le théorème suit, avec l'aide de (2.1), des trois assertions (a), (b) et (c) ci-dessous, où l'on note

$$\eta(k) = \eta_r(k) := -\frac{\zeta(k)}{2\zeta(2k)} + \frac{\zeta(k+1)}{2\zeta(2k+2)} + \frac{1}{2\zeta(k+1)} + \sum_{\substack{d \mid P_r \\ \mu(d)=1}} \frac{d-1}{d^{k+1}} . \quad (2.5)$$

(a) *Pour tout* $n \equiv 0(P_r)$, $h_k(n) \geq \eta(k)$.

(b) *Pour tout* $k \geq 2$, $h_k(0) > \eta(k)$.

(c) *Il existe* K *tel que pour tout* $k \geq K$, $inf_{n \not\equiv 0(P_r)} h_k(n) > h_k(0)$.

Preuve de (a). Si $n \equiv 0(P_r)$, alors $n \equiv 0(d)$ pour tout diviseur d de P_r. Ainsi

$$h(n) = \sum \frac{\mu(d)}{d^k}\left(\frac{1}{2} - \{\frac{n}{d}\}\right) \geq \sum_{d \mid P_r} \frac{\mu(d)}{2d^k} - \sum_{\substack{d \nmid P_r \\ \mu(d)=-1}} \frac{1}{2d^k} - \sum_{\substack{d \nmid P_r \\ \mu(d)=1}} \frac{1}{d^k}\left(\frac{1}{2} - \frac{1}{d}\right) . \quad (2.6)$$

Cette dernière expression est $\eta(k)$: on le vérifie facilement en écrivant (2.5) sous la forme d'une série de Dirichlet. □

Preuve de (b). Egalement en écrivant (2.5) sous la forme d'une série, on vérifie que

$$\eta(k) = \frac{1}{2\zeta(k)} - \sum_{\substack{d \nmid P_r \\ \mu(d)=1}} \frac{d-1}{d^{k+1}} < \frac{1}{2\zeta(k)} . \,\square \quad (2.7)$$

Preuve de (c). Si $n \not\equiv 0(P_r)$, il existe $p \leq p_r$ avec $n \not\equiv 0(p)$. Choisissons le plus petit p ayant cette propriété. Si $d \leq p-1$ et $\mu(d) \neq 0$, alors $n \equiv 0(d)$, et les coefficients de d^{-k} dans les développements (de la forme $\sum a_d d^{-k}$) de $h(n)$ et de $h(0)$ sont identiques. Quant aux coefficients de p^{-k}, celui de $h(0)$ est $-1/2$, et celui de $h(n)$ n'est pas inférieur à $-1/2 + 1/p$ puisque $n \not\equiv 0(p)$. De plus, l'ensemble de tous les coefficients du développement de $h(x)$ est borné indépendemment de x. Ainsi, pour chaque classe de congruence $m \not\equiv 0(P_r)$ il existe K_m tel que si $k \geq K_m$,

$$h(n) - h(0) \geq \frac{1}{2p^{k+1}} ,$$

chaque fois que $n \equiv m(P_r)$ (p ne dépendant que de m). Pour $K := \max_m K_m$, si $k \geq K$ on a donc

$$h(n) - h(0) \geq \frac{1}{2p_r^{k+1}}$$

chaque fois que $n \not\equiv 0(P_r)$. □

Nous passons maintenant à la preuve de

$$R_k := \frac{1}{2\zeta(k)} - I_k > 0 \tag{2.8}$$

pour tout $k \geq 2$. En vertu du Lemme 1 il suffit de montrer qu'il existe un entier $n = n_k$ satisfaisant

$$h(n) = \frac{1}{2\zeta(k)} - \sum \frac{\mu(d)}{d^k}\{\frac{n}{d}\} < \frac{1}{2\zeta(k)} ,$$

soit

$$m(n) := \sum \frac{\mu(d)}{d^k}\{\frac{n}{d}\} > 0 . \tag{2.9}$$

Posons $n \equiv 0(p)$ si $p = 2, 3, ..., \widehat{p_s}, ..., p_r$ et $n \equiv 1(p_s)$. On exige également que $p_s \equiv 1(30)$, ce qui assure que $n \equiv p_s + 1(2p_s)$, $n \equiv 2p_s + 1(3p_s)$, et $n \equiv 4p_s + 1(5p_s)$. Par conséquent on a

$$\begin{aligned} m(n) &= \sum_{p_s | d} \frac{\mu(d)}{d^k}\{\frac{n}{d}\} + O\left(\sum_{d>p_r}' \frac{1}{d^k}\right) \\ &= \frac{1}{p_s^{k+1}}\left(-1 + \frac{p_s+1}{2^{k+1}} + \frac{2p_s+1}{3^{k+1}} + \frac{4p_s+1}{5^{k+1}} + \sum_{m\geq 6} \frac{\alpha(m)}{m^{k+1}}\right) + o_r(1) , \end{aligned}$$

où $\alpha(m) < mp_s$. Ainsi si s est suffisamment grand,

$$m(n) > \frac{1}{2p_s^k}\left(\frac{1}{2^{k+1}} + \frac{2}{3^{k+1}} + \frac{4 - 25/(k-1)}{5^{k+1}}\right) + o_r(1) . \tag{2.10}$$

Finalement, si r est suffisamment grand, le côté droit de (2.10) est positif.
□

3. Minoration.

On a, si $\eta_r(k)$ est comme en (2.5) (avec par convention $P_0 = 1$),

$$\eta_0(k) = -\sum \frac{|\mu(d)|}{2d^k} + \sum_{\mu(d)=1} \frac{1}{d^{k+1}} \le I_k < \sum \frac{\mu(d)}{2d^k} = h(0) \tag{3.1}$$

car, pour tout n entier,

$$h(n) = \sum \frac{\mu(d)}{d^k}\left(\frac{1}{2} - \{\frac{n}{d}\}\right) \ge - \sum_{\mu(d)=-1} \frac{1}{2d^k} - \sum_{\mu(d)=1} \frac{1}{d^k}\left(\frac{1}{2} - \frac{1}{d}\right) .$$

Afin d'améliorer cette dernière minoration, et donc celle de (3.1), on peut procéder de la façon suivante. On considère, pour $r \ge 1$, les différentes classes de congruence $m(P_r)$ ($m = 0, 1, ..., P_r - 1$), qui correspondent chacune à un système de congruences $S_{r,m} := \{m_d(d), d|P_r\}$ (où par convention $0 \le m_d \le d-1$). Si $n \equiv m(P_r)$, alors en écrivant

$$h(n) = \sum_{d|P_r} \frac{\mu(d)}{d^k}\left(\frac{1}{2} - \frac{m_d}{d}\right) + \sum_{d\nmid P_r} \frac{\mu(d)}{d^k}\left(\frac{1}{2} - \{\frac{n}{d}\}\right) ,$$

on vérifie que

$$h(n) = \eta_0(k) + \epsilon_{r,m}(k) + \delta_{r,n}(k) , \tag{3.2}$$

où

$$\epsilon_{r,m}(k) := \sum_{d|P_r} \frac{a_d}{d^{k+1}} \tag{3.3}$$

avec

$$a_d = a_{d,r}(m) := \begin{cases} m_d & \text{si } \mu(d) = -1 \\ d - 1 - m_d & \text{si } \mu(d) = +1 , \end{cases} \tag{3.4}$$

et

$$0 < \delta_{r,n}(k) := \sum_{\substack{d\nmid P_r \\ \mu(d)=-1}} \frac{1}{d^k}\{\frac{n}{d}\} + \sum_{\substack{d\nmid P_r \\ \mu(d)=+1}} \frac{1}{d^k}\left(1 - \frac{1}{d} - \{\frac{n}{d}\}\right) < \frac{1}{p_r^{k-1}} . \tag{3.5}$$

Ainsi nous avons

$$\eta_0(k) + \epsilon_r \le I_k \le \eta_0(k) + \epsilon_r + o_r(1) , \tag{3.6}$$

où $\epsilon_r = \epsilon_r(k)$ désigne le plus petit des $\epsilon_{r,m}(k)$ $(m = 0, 1, \ldots, P_r - 1)$. Nous avons donc obtenu le lemme qui suit.

LEMME 2. *Pour tout $k \geq 2$ nous avons*

$$I_k = -\frac{\zeta(k)}{2\zeta(2k)} + \frac{\zeta(k+1)}{2\zeta(2k+2)} + \frac{1}{2\zeta(k+1)} + \lim_{r\to\infty} \epsilon_r \,. \tag{3.7}$$

Le calcul de ϵ_r pour $r = 1, 2, 3, \ldots$ permet donc en principe d'approcher par défaut la valeur de I_k aussi précisément qu'on le désire. Le nombre P_r de congruences à traiter croît cependant extrêmement rapidement avec r, ce qui limite considérablement la portée pratique de cette méthode. Nous pouvons partiellement surmonter cette difficulté par deux moyens. Tout d'abord, le procédé proposé ci-dessous au point A permet de montrer, pour chaque k fixé, que certaines classes de congruence modulo P_s peuvent être ignorées pour la détermination d'un certain $\epsilon_{r,m(r)} \geq \epsilon_r$ satisfaisant

$$I_k \geq \eta_0(k) + \epsilon_{r,m(r)} \,, \tag{3.7$\frac{1}{2}$}$$

et ce pour tout $r \geq s$. Appliqué aux petites valeurs de k il réduit le nombre de cas à considérer d'un facteur

$$\begin{array}{lrll} (a) & 15 & \text{si } k = 2 & (r \geq 3 = s) \\ (b) & 1155 & \text{si } k = 3 & (r \geq 5 = s) \\ (c) & 4849845 & \text{si } k = 4 & (r \geq 8 = s)\,. \end{array} \tag{3.8}$$

Ensuite, on peut tenir compte de $\delta_{r,n}(k)$. Lors du procédé A on verra que,

$$I_k \geq \eta_0(k) + \epsilon_{r,m(r)} + \delta_r \,, \tag{3.9}$$

où

$$\delta_r = \delta_r(k) := \inf_{n\in\bar{A}} \delta_{r,n}(k) \,, \tag{3.10}$$

le symbole $\bar{A}$ désignant la réunion des classes de congruence modulo P_s qui n'ont pas été éliminées. Au point B ci-dessous nous obtiendrons une minoration pour $\delta_7(2)$.

A.1. Description du procédé. La méthode utilisée afin d'éliminer le cas $n \equiv m(P_s)$ consiste tout simplement à essayer de montrer qu'alors $h(n)$ excède I_k, par exemple en établissant que $h(n) \geq 1/2\zeta(k)$. (Le nombre $\epsilon_{r,m(r)}$ mentionné en (3.7$\frac{1}{2}$) est ensuite défini comme le plus petit des $\epsilon_{r,m}$

sur les classes de congruence m non éliminées, et nous notons en passant que l'assertion (3.9) suit immédiatement). Nous tentons tout d'abord de parvenir à nos fins uniquement à l'aide de considérations modulo P_s (en *(i)* ci-dessous). En cas d'échec nous entreprenons (en *(ii)*) une tentative semblable avec des considérations modulo P_t ($t = s+1, s+2, \ldots$). D'autre part, nous voulons nous assurer que les résultats obtenus sont valables pour tout $k \geq K$, et ceci revient à montrer qu'un certain développement $\sum c_d d^{-k-1}$ conserve le signe qu'il a en $k = K$ pour tout $k \geq K$. Nous ferons usage du lemme suivant

LEMME 3. *Si*

$$D(k) := \sum_{d=1}^{\infty} \frac{c_d}{d^k} < 0$$

pour $k = K$, et si $c_d \leq 0$ pour $d < \Delta$, $c_d \geq 0$ pour $d \geq \Delta$, alors $D(k) < 0$ pour tout $k \geq K$.

Preuve. Nous avons

$$\sum_{d \geq \Delta} \frac{c_d}{d^K} < \sum_{d < \Delta} \frac{|c_d|}{d^K},$$

donc si $k > K$,

$$\sum_{d \geq \Delta} \frac{c_d}{d^k} \leq \frac{1}{\Delta^{k-K}} \sum_{d \geq \Delta} \frac{c_d}{d^K} < \frac{1}{\Delta^{k-K}} \sum_{d < \Delta} \frac{|c_d|}{d^K} < \sum_{d < \Delta} \frac{|c_d|}{d^k}. \ \square$$

(i) Soit donc $n \equiv m(P_s)$. Dénotons par $\Delta' = \Delta'(s) = 2p_{s+1}$ le plus petit entier $d > 1$ ne divisant pas P_s et satisfaisant $\mu(d) = 1$. Si $s \geq 2$ et $m \neq 0$ nous dénoterons par $\Delta = \Delta(s,m)$ le plus petit diviseur $d \leq \Delta'$ de P_s satisfaisant $\mu(d) = 1$ et $a_d < d-1$; si $s = 1$ ou $m = 0$ un tel d n'existe pas, et nous conviendrons alors que $\Delta = \Delta'$. Considérons maintenant les deux fonctions

$$D(k) = D_{s,m}(k) := \frac{1}{2\zeta(k)} - \eta_0(k) - \sum_{d \mid P_s} \frac{a_d}{d^{k+1}} =: \sum_{d=1}^{\infty} \frac{b_d}{d^{k+1}} \tag{3.11}$$

et

$$D^*(k) = D^*_{s,m}(k) := \frac{1}{2\zeta(k)} - \eta_0(k) - \sum_{d \mid P_s}{}^{*} \frac{a_d}{d^{k+1}} =: \sum_{d=1}^{\infty} \frac{c_d}{d^{k+1}} \tag{3.12}$$

où $a_d = a_d(m)$ est défini en (3.4), où $\sum^*$ signifie que la somme est restreinte aux d satisfaisant soit $\mu(d) = 1$, soit $\mu(d) = -1$ et $d < \Delta$, et où par conséquent

$$c_d = \begin{cases} -m_d & \text{si } d|P_s, \mu(d) = -1, d < \Delta \ , \\ m_d & \text{si } d|P_s, \mu(d) = 1, d \geq \Delta \ , \\ d-1 & \text{si } d \nmid P_s, \mu(d) = 1 \ , \\ 0 & \text{dans tous les autres cas.} \end{cases} \tag{3.12a}$$

Le Lemme 3 s'applique à $D^*(k)$. Ainsi, si l'on obtient $D(K) < 0$ (respectivement $D^*(K) < 0$), on peut en déduire que l'on peut ignorer dans le calcul de ϵ_r $(r \geq s)$ les $n \equiv m(P_s)$, et ceci pour $k = K$ (respectivement pour tout $k \geq K$).

(ii) Supposons maintenant que nous avons essuyé un échec en *(i)*, soit que $D(K) \geq 0$ (respectivement $D^*(K) \geq 0$). On peut alors, toujours bien entendu sous la condition $n \equiv m(P_s)$, considérer une à une chaque classe $n \equiv i(p_{s+1})$, qui correspond à une classe $n \equiv m_i(P_{s+1})$. Dans le cas où $D_{s+1,m_i}(K) < 0$ (respectivement $D^*_{s+1,m_i}(K) < 0$), pour chaque $i = 0, 1, ..., p_{s+1} - 1$, on peut ignorer dans le calcul de ϵ_r $(r \geq s+1)$ les $n \equiv m(P_s)$, pour $k = K$ (respectivement pour tout $k \geq K$).

Et si cette tentative se solde à nouveau par un échec pour certaines valeurs de i, on peut, pour chacune de ces valeurs, réitérer le procédé avec toutes les classes modulo p_{s+2}. Et ainsi de suite.

Remarquons encore que nous ne sommes pas assurés, dans le cas d'un échec de la procédure *(i)* pour les classes $m^{(1)}$, $m^{(2)}$,..., $m^{(t)}(P_s)$ suivi pour chacune d'entre elles d'un aboutissement en un nombre fini de pas u de la procédure *(ii)*, que nous pouvons ignorer ces classes dans le calcul de ϵ_r lorsque $s \leq r \leq s+u-1$, lequel est le plus petit de *tous* les $\epsilon_{r,m}$. La détermination de ϵ_r n'est cependant pas utile pour ces valeurs de r puisque nous avons

$$I_k \geq \eta_0(k) + \epsilon_r^\star \ , \tag{3.12b}$$

où

$$\epsilon_r^\star = \epsilon^\star_{r;m^{(1)},m^{(2)},...,m^{(t)}} := \min_{\substack{m \not\equiv m^{(i)}(P_s) \\ i=1,...,t}} \{\epsilon_{r,m}\} \ . \tag{3.12c}$$

En effet par (3.6) nous disposons de

$$I_k \geq \eta_0(k) + \epsilon_{s+u} \ , \tag{3.12d}$$

et, les a_d de (3.4) étant tous non négatifs, de

$$\epsilon_{s+u,m'} \geq \epsilon_{r,m} \tag{3.12e}$$

si $m' \equiv m(P_r)$ (puisqu'alors $a_{d,s+u}(m') = a_{d,r}(m)$ pour chaque $d|P_r$), d'où

$$\epsilon_{s+u} = \min_{\substack{m \not\equiv m^{(i)}(P_s) \\ i=1,\dots t}} \{\epsilon_{s+u,m}\} \geq \min_{\substack{m \not\equiv m^{(i)}(P_s) \\ i=1,\dots t}} \{\epsilon_{r,m}\} = \epsilon_r^\star . \tag{3.12f}$$

A.2. Application aux premiers 2,3,5,7,11,13,17 et 19.

1. $p_1 = 2$. Soit $n \equiv 1(2)$: on a

$$D_{1,1}(k) = D_{1,1}^*(k) = \sum_{\mu(d)=1} \frac{d-1}{d^{k+1}} - \frac{1}{2^{k+1}} < 0 \quad (k \geq 2) . \tag{3.13}$$

Ainsi,

$$I_k = \inf_{n \equiv 0(2)} h(n) \quad (k \geq 2) ,$$

et nous pouvons supposer à partir de maintenant que $n \equiv 0(2)$.

2. $p_2 = 3$. Pour $n \equiv 2(3)$ on a

$$D_{2,2}(k) = D_{2,2}^*(k) = \sum_{\mu(d)=1} \frac{d-1}{d^{k+1}} - \frac{2}{3^{k+1}} - \frac{1}{2 \cdot 6^k} < 0 \quad (k \geq 2) , \tag{3.14}$$

et pour $n \equiv 1(3)$,

$$D_{2,4}(k) = D_{2,4}^*(k) = \sum_{\mu(d)=1} \frac{d-1}{d^{k+1}} - \frac{1}{3^{k+1}} - \frac{1}{6^{k+1}} < 0 \quad (k \geq 3) . \tag{3.15}$$

Dans ce dernier cas $n \equiv 1(3)$, $D_{2,4}(2)$ n'est cependant pas négatif, et l'on suit la procédure *(ii)* en posant $n \equiv i(5)$. On a

$$D_{3,4_i}(2) < D_{2,4}(2) - \frac{i}{125} < 0 \quad (i \geq 2) . \tag{3.16}$$

Lorsque $i = 1$ ou 0 cependant, $D_{3,4_i}(2) > 0$; par exemple $(4_1 = 16)$

$$D_{3,16}(2) = D_{2,4}(2) - \frac{1}{125} - \frac{3}{1000} - \frac{13}{15^3} - \frac{16}{30^3} = 0.0000251... ; \tag{3.17}$$

on réitère donc la procédure *(ii)* dans chacun des cas $i = 1$, $i = 0$, en posant $n \equiv j(7)$: cette fois on obtient $D_{4,16_j}(2) < 0$ et $(4_0 = 10)$ $D_{4,10_j}(2) < 0$ pour tout j. Nous avons donc vérifié que

$$I_k = \inf_{n \equiv 0(6)} h(n) \quad (k \geq 2) ,$$

soit (1.21a), et nous pouvons supposer à partir de maintenant que $n \equiv 0(6)$.

3. $p_3 = 5$. Posons $n \equiv m(5)$. Si $m = 2, 3$ ou 4, alors

$$D^*_{3,m}(k) < \sum_{\substack{\mu(d)=1 \\ d \geq 10}} \frac{d-1}{d^{k+1}} - \frac{m}{5^{k+1}} < 0 \quad (k \geq 3) , \tag{3.18}$$

et pour $m = 1$,

$$D^*_{3,1}(k) = \sum_{\substack{\mu(d)=1 \\ d \geq 10}} \frac{d-1}{d^{k+1}} - \left(\frac{1}{5^{k+1}} + \frac{3}{10^{k+1}} + \frac{8}{15^{k+1}} \right) < 0 \quad (k \geq 3) . \tag{3.19}$$

Lorsque $k = 2$, nous vérifions en appliquant *(ii)* successivement à $p_4 = 7$, $p_5 = 11$ et $p_6 = 13$ que les nombres $D_{6,i}(2)$ sont tous négatifs si $i \not\equiv 0, 1(5)$, et que par conséquent

$$I_2 = \inf_{\substack{n \equiv 0(6) \\ n \equiv 0 \text{ ou } 1(5)}} h(n) , \tag{3.20}$$

d'où l'assertion (3.8a) puis, facilement (1.20a).

Remarque. Il est à noter que nous aurions pu utiliser pour obtenir (3.20) une meilleure majoration de I_2 que $1/2\zeta(2)$: par exemple le J_2 de (1.24), (voir au chapitre 4 la preuve de (1.25)). Même ainsi il apparaît cependant difficile d'éliminer aussi la classe de congruence 1 modulo 5 pour le calcul de I_2.

En ce qui concerne le procédé A, nous nous contenterons de (3.20) pour le cas $k = 2$. Les propriétés (3.18) et (3.19) impliquent que

$$I_k = \inf_{n \equiv 0(30)} h(n) \quad (k \geq 3) ,$$

et que nous pouvons nous restreindre aux $n \equiv 0(30)$.

4. $p_4 = 7$. Si $n \equiv m(7)$, $m = 2, 3, 4, 5$ ou 6, alors

$$D^*_{4,m}(k) < \sum_{\substack{\mu(d)=1 \\ d \nmid 30}} \frac{d-1}{d^{k+1}} - \frac{m}{7^{k+1}} < 0 \quad (k \geq 3) , \tag{3.21}$$

Si $m = 1$ on applique *(ii)* avec $p_5 = 11$ et $p_6 = 13$, et l'on montre que tous les $D^*_{6,i}(3)$ sont négatifs ($i \equiv 1(7)$). (Remarquons au passage que dans la notation introduite au point*(i)*, $\Delta(6, i) = 14$). Ainsi, nous avons

$$I_k = \inf_{n \equiv 0(210)} h(n) \quad (k \geq 3) ,$$

soit (1.21b), et nous pouvons supposer que $n \equiv 0(210)$.

5. $p_5 = 11$. Si $n \equiv m(11)$, avec $2 \leq m \leq 10$, alors

$$D^*_{5,m}(k) < \sum_{\substack{\mu(d)=1 \\ d \nmid 210}} \frac{d-1}{d^{k+1}} - \frac{m}{11^{k+1}} < 0 \quad (k \geq 4) . \tag{3.22}$$

Pour $m = 1$, $D^*_{5,1}(4)$ est positif, mais on vérifie que

$$D^*_{6,i}(4) < 0 \quad (i \equiv 1(11)) . \tag{3.23}$$

Quant à $k = 3$, le procédé *(ii)* appliqué à $p_6 = 13$ et $p_7 = 17$ livre des $D_{7,i}(3)$ négatifs si $i \not\equiv 0, 1(11)$, d'où

$$I_3 = \inf_{\substack{n \equiv 0(210) \\ n \equiv 0 \text{ ou } 1(11)}} h(n) \tag{3.24}$$

et l'assertion (3.8b), puis facilement (1.20b).

Les propriétés (3.22) et (3.23) impliquent que

$$I_k = \inf_{n \equiv 0(2310)} h(n) \quad (k \geq 4) ,$$

et que nous pouvons nous restreindre aux $n \equiv 0(2310)$.

6. $p_6 = 13$, $p_7 = 17$ et $p_8 = 19$. De façon semblable on obtient d'abord

$$I_k = \inf_{n \equiv 0(30030)} h(n) \quad (k \geq 4) ,$$

puis

$$I_k = \inf_{n \equiv 0(510510)} h(n) \quad (k \geq 4) ,$$

soit(1.21c), et enfin

$$I_k = \inf_{\substack{n \equiv 0(510510) \\ n \equiv 0 \text{ ou } 1(19)}} h(n) \quad (k \geq 4) , \tag{3.25}$$

d'où (3.8c) et (voir ci-dessous) (1.20c).

A.3. Calculs numériques avec le système "MAPLE".

k=2. Les calculs ont été faits jusqu'à $r = 7$, en tenant compte de (3.20) (qui a été obtenu grâce à l'aboutissement du procédé *(ii)* lors de considérations modulo P_6); ils livrent

$$\epsilon_7 = \epsilon_{7,m} = 0.0480428498... \tag{3.26}$$

où $m \equiv 0(2),\ 0(3),\ 0(5),\ 1(7),\ 1(11),\ 1(13),\ 1(17)$, ce que nous noterons: $m \equiv [0,0,0,1,1,1,1]$. On en déduit que

$$I_2 \geq \eta_0(2) + \epsilon_7 = 0.29487013... \tag{3.27}$$

k=3. Pour $r = 8$, avec (3.24) (obtenu par le procédé *(ii)* avec P_7), on obtient

$$\epsilon_8 = \epsilon_{8,m} = 0.0057410403... \tag{3.28}$$

où $m \equiv [0,0,0,0,0,1,1,1]$. D'où

$$I_3 \geq \eta_0(3) + \epsilon_8 = 0.41589183... \tag{3.29}$$

k=4. Pour $r = 10$, avec (3.25) (obtenue par *(ii)* avec P_8), on obtient

$$\epsilon_{10} = \epsilon_{10,m} = 0.0007906274... \tag{3.30}$$

où $m \equiv [0,0,0,0,0,0,0,0,0,1]$, et

$$I_4 \geq \eta_0(4) + \epsilon_{10} = 0.461968967... \tag{3.31}$$

B. Minoration de $\delta_7(2)$

Dans ce qui suit le symbole P designera exclusivement un entier sans facteur carré, supérieur à 1, et dont tous les diviseurs premiers sont plus grands que 17. Le symbole Q désignera exclusivement un diviseur de $P_7 = 2 \cdot 3 \cdot 5 \cdot 7 \cdot 11 \cdot 13 \cdot 17$.

Pour chaque P nous voulons minorer sur les $n \equiv 0(6)$ la contribution à $\delta_{7,n}$ (défini en (3.5)) des termes en $d = QP$ pour tous les Q.

Note. Nous pourrions, puisque nous disposons de (3.20) et (3.10), nous contenter de minorer ces termes sur les $n \equiv 0(6)$ qui satisfont également $n \equiv 0$ ou $1(5)$. Nous ne tiendrons cependant pas compte dans ce qui suit de cette dernière condition qui, tout en compliquant considérablement les calculs, ne livre finalement qu'une amélioration d'environ $3 \cdot 10^{-5}$ à la minoration de $\delta_7(2)$ que nous allons obtenir.

Si $n \equiv m(P)$ $(0 \leq m \leq P-1)$, alors $n \equiv \epsilon_Q P + m(QP)$ pour un entier $\epsilon_Q = \epsilon_Q(m)$ satisfaisant $0 \leq \epsilon_Q \leq Q-1$, et la contribution qui nous intéresse est

$$\gamma(P,m) = \frac{1}{P^3}\left(\sum_{\mu(Q)=-i} \frac{\epsilon_Q P + m}{Q^3} + \sum_{\mu(Q)=+i} \frac{(Q-\epsilon_Q)P - m - 1}{Q^3}\right), \tag{3.32}$$

où $i := \mu(P)$. Si l'on utilise la notation

$$K_* := \sum_{\mu(Q)=*1} \frac{1}{Q^3} = \begin{cases} 1.0066663035\ldots & \text{si } * = + \\ 0.1744259818\ldots & \text{si } * = - \end{cases}, \tag{3.33}$$

$$K := K_+ - K_- = 0.8322403216\ldots, \tag{3.34}$$

et

$$K_{m,P} := K_- + \frac{1-\epsilon_2}{2^3} + \frac{2-\epsilon_3}{3^3} + \frac{\epsilon_6}{6^3}, \tag{3.35}$$

alors on vérifie facilement que

$$\gamma(P,m) \geq C(P,m) := \begin{cases} P^{-3}(mK + PK_{m,P} - K_-) & \text{si } \mu(P) = -1 \\ P^{-3}((P-m)K + PK_{m,P} - K_+) & \text{si } \mu(P) = +1 \end{cases} \tag{3.36}$$

Nous nous contenterons ici de la minoration

$$\delta_7(2) \geq \sum_P M_P, \tag{3.37}$$

où

$$M_P := \min_m C(P,m). \tag{3.38}$$

Pour simplifier la notation nous désignerons parfois P par P_- lorsque $\mu(P) = -1$, et par P_+ lorsque $\mu(P) = +1$. Les valeurs de ϵ_2, ϵ_3 et ϵ_6, donc de $K_{m,P}$, étant déterminées par les classes de congruence auxquelles appartiennent P et m, nous pouvons supposer que $0 \leq m \leq 5$ pour les P_-, et que $0 \leq P - m \leq 5$ pour les P_+. Nous vérifions que

$$C(P_-,m) > M_{P_-} \quad (m = 0,2,3,4) \tag{3.39}$$

et

$$C(P_+,m) > M_{P_+} \quad (P - m \geq 1), \tag{3.40}$$

puis que

$$M_{P_-} = \begin{cases} C(P,1) = \begin{cases} P^{-3}\left(K_+ - 2K_- + P(K_- + \frac{5}{6^3})\right) & \text{si } P \in \mathcal{A} \\ P^{-3}\left(K_+ - 2K_- + P(K_- + \frac{9}{6^3})\right) & \text{si } P \in \mathcal{B} \end{cases} \\ C(P,5) = \quad P^{-3}\left(5K_+ - 6K_- + P(K_- + \frac{5}{6^3})\right) \quad \text{si } P \in \mathcal{C}, \end{cases} \tag{3.41}$$

où $\mathcal{A} = \{P;\ P \equiv 1(6)\}, \mathcal{B} = \{P \equiv -1(6) \text{ et } P \leq 179\}$
et $\mathcal{C} = \{P \equiv -1(6) \text{ et } P \geq 191\}$,

et que

$$M_{P_+} = \begin{Bmatrix} C(P,1) & \text{si } P \equiv 1(6) \\ C(P,5) & \text{si } P \equiv -1(6) \end{Bmatrix} = P^{-3}\left(-K_+ + P\left(K_- + \frac{5}{6^3}\right)\right). \tag{3.42}$$

Si nous notons

$$\Pi_k := \prod_{p \leq 17} \left(1 + \frac{1}{p^k}\right)^{-1}$$

nous avons donc

$$\begin{aligned} \delta_7(2) &\geq \sum M_{P_-} + \sum M_{P_+} \\ &> (K_- + \frac{5}{6^3}) \sum \frac{1}{P^2} + \frac{4}{6^3} \sum_{\substack{P=23 \\ P \equiv -1(6)}}^{179} \frac{1}{P^2} + (K_+ - 2K_-) \sum \frac{1}{P^3} \\ &\quad -2K \sum_{n \geq 19 \cdot 23} \frac{1}{n^3} \\ &> (K_- + \frac{5}{6^3}) \left(\frac{\zeta(2)}{\zeta(4)}\Pi_2 - 1\right) + \frac{4}{6^3} 0.0057608096... \\ &\quad + (K_+ - 2K_-) \left(\frac{\zeta(3)}{\zeta(6)}\Pi_3 - 1\right) - \frac{K}{436^2} \end{aligned}$$

ainsi :

$$\delta_7(2) > 0.0029664972... \tag{3.43}$$

Avec (3.26) et (3.9) nous avons ainsi obtenu

$$I_2 \geq \eta_0(2) + \epsilon_7(2) + \delta_7(2) > 0.29783663... \tag{3.44}$$

4. Majoration.

Ecrivons

$$h(n)=\frac{1}{2\zeta(k)}-\sum\frac{\mu(d)}{d^k}\{\frac{n}{d}\}<\frac{1}{2\zeta(k)}-T_N+E_{NM}+O(M^{-k+1})\ , \quad (4.1)$$

où

$$T_N=T_N(k):=\sum_{d=1}^{N}\frac{\mu(d)}{d^{k+1}}a_d\ , \qquad a_d:=d\{\frac{n}{d}\}\ ,$$

et

$$E_{NM}=E_{NM}(k):=\sum_{N+1}^{M}\frac{|\mu(d)|}{d^{k+1}}a_d\ ,$$

et posons $n\equiv 0(P_r)$, $n\equiv 1(p)$ $(p_r<p\le M)$, où $r=r(k)$ est choisi de sorte que $\epsilon_r=\epsilon_{r,0}$ mais $\epsilon_{r+1}\ne\epsilon_{r+1,0}$. Ainsi par exemple

$$r(2)=3\ , \qquad r(3)=5\ , \quad \text{et} \quad r(4)=9\ . \qquad (4.2)$$

Si $d\le M$ et $d=d_1d_2$ où $d_1:=(P_r,d)$, alors $a_d\equiv 0(d_1)$ et $a_d\equiv 1(d_2)$: a_d se calcule donc aisément. On a

$$I_k\le\frac{1}{2\zeta(k)}-\lim_{N\to\infty}T_N\ . \qquad (4.3)$$

Afin d'obtenir un résultat numérique, on évalue le terme d'erreur E_{NM} de (4.1), puis on fait tendre M vers $+\infty$. Facilement on a, quel que soit M,

$$E_{NM}\le\frac{1}{(k-1)N^{k-1}}-\frac{1}{kN^k}\ , \qquad (4.4)$$

d'où, en faisant $M\to\infty$ dans (4.1), on a (pour tout $k\ge 2$)

$$I_k\le\frac{1}{2\zeta(k)}-T_N+\frac{1}{(k-1)N^{k-1}}-\frac{1}{kN^k}\ . \qquad (4.5)$$

Les calculs de

$$T_{5000}(3)=0.00003159059... \qquad (4.6)$$

et de

$$T_{5000}(4)=0.00000004672758... \qquad (4.7)$$

livrent à l'aide de (4.5) les majorations

$$I_3 < 0.4159221157 \tag{4.8}$$

et

$$I_4 < 0.4619691547359 \ , \tag{4.9}$$

ainsi que les évaluations numériques de J_3 et J_4 données en (1.24). En ce qui concerne le cas $k = 2$, nous obtenons l'évaluation pour J_2, ainsi que la majoration

$$I_2 < 0.29876551 \ , \tag{4.10}$$

en calculant

$$T_{18000}(2) = 0.0052084146... \ , \tag{4.11}$$

et en utilisant, à la place de (4.4), l'estimation plus fine ci-dessous.

LEMME 4. *Si $N > 0$ et $n \equiv 0(900)$, alors quel que soit $M > N$*

$$E_{NM} \leq \frac{14}{75N} + \frac{1}{2N^2} \ . \tag{4.12}$$

Preuve. Chaque coefficient $|\mu(d)|a_d$ de E_{NM} est de la forme $xd_2 + 1$, où l'entier x satisfait $0 \leq x < d_1$. Remarquons tout d'abord que

$$\sum_{N+1}^{M} \frac{1}{d^3} < \frac{1}{2N^2} \ , \tag{4.13}$$

puis attaquons nous à l'estimation de

$$\sum_{N+1}^{M} \frac{xd_2}{d^3} = \sum_{i=1}^{8} \sum_{\substack{d=N+1 \\ d_1 = D_i}}^{M} \frac{xd_2}{d^3} =: \sum_{i=1}^{8} R_i \ , \tag{4.14}$$

où $D_1 = 1$, $D_2 = 2$, $D_3 = 3$, $D_4 = 5$, $D_5 = 6$, $D_6 = 10$, $D_7 = 15$, et $D_8 = 30$.

i=1. Clairement $x = 0$, et

$$R_1 = 0 \ . \tag{4.15}$$

i=2. Clairement aussi, $x = 1$. Il y a 8 classes de congruence d modulo 60 avec $d_1 = D_2 = 2$, d'où

$$R_2 < 8 \sum_{\substack{d>N \\ d=60k}} \frac{d_2}{d^3} = \frac{4}{60^2} \sum_{k>\frac{N}{60}} \frac{1}{k^2} < \frac{1}{15N} \ . \tag{4.16}$$

i=3. Ici, $x = 2$ si $d_2 \equiv 1(3)$ et $x = 1$ si $d_2 \equiv 2(3)$; et des 8 classes d modulo 90 avec $d_1 = D_3 = 3$ il y en a 4 telles que $d_2 \equiv 1(3)$, et 4 telles que $d_2 \equiv 2(3)$. D'où

$$R_3 < 4\left(\frac{1}{3}+\frac{2}{3}\right)\frac{1}{90^2}\sum_{k>\frac{N}{90}}\frac{1}{k^2} < \frac{2}{45N}\,. \tag{4.17}$$

i=4. Il y a deux classes d modulo 150 satisfaisant $d_1 = D_4 = 5$ et $x \equiv j(5)$, pour chaque $j = 1, 2, 3$ et 4. Donc

$$R_4 < 2\left(\frac{1+2+3+4}{5}\right)\frac{1}{150^2}\sum_{k>\frac{N}{150}}\frac{1}{k^2} < \frac{2}{75N}\,. \tag{4.18}$$

i=5. Il y a quatre classes d modulo 180 avec $d_1 = D_5 = 6$ et $x \equiv j(6)$, pour $j = 1$ ou 5, d'où

$$R_5 < 4\left(\frac{1}{6}+\frac{5}{6}\right)\frac{1}{180^2}\sum_{k>\frac{N}{180}}\frac{1}{k^2} < \frac{1}{45N}\,. \tag{4.19}$$

i=6. Deux classes d modulo 300 avec $d_1 = D_6 = 10$ et $x \equiv j(10)$ ($j = 1, 3, 7, 9$), et

$$R_6 < 2\left(\frac{1+3+7+9}{10}\right)\frac{1}{300^2}\sum_{k>\frac{N}{300}}\frac{1}{k^2} < \frac{1}{75N}\,. \tag{4.20}$$

i=7. Une classe d modulo 450 avec $d_1 = D_7 = 15$ et $x \equiv j(15)$ ($j = 1, 2, 4, 7, 8, 11, 13, 14$),et

$$R_7 < \left(\frac{1+2+4+7+8+11+13+14}{15}\right)\frac{1}{450^2}\sum_{k>\frac{N}{450}}\frac{1}{k^2} < \frac{2}{225N}\,. \tag{4.21}$$

i=8. Et une classe d modulo 900 avec $d_1 = D_8 = 30$ et $x \equiv j(30)$ ($j = 1, 7, 11, 13, 17, 19, 23, 29$), d'où

$$R_8 \cdot < \left(\frac{1+7+11+13+17+19+23+29}{30}\right)\frac{1}{900^2}\sum_{k>\frac{N}{900}}\frac{1}{k^2} < \frac{1}{225N}\,. \tag{4.22}$$

Le lemme suit maintenant de (4.14), et des estimations (4.13) et (4.15) à (4.22). □

Nous démontrons à present l'inégalité (1.25), soit que la majoration (4.3) n'est pas la meilleure possible pour $k = 2$, soit encore qu'il existe une suite d'entiers $n' = n'_M \to \infty$ $(M \to \infty)$ telle que

$$\lim_{M\to\infty} h(n') < \frac{1}{2\zeta(k)} - \lim_{N\to\infty} T_N = \lim_{M\to\infty} h(n) = J_2 \ , \tag{4.23}$$

où $n = n_M$ satisfait aux congruences $n \equiv 0(30)$ et $n \equiv 1(p)$ $(5 < p \leq M)$. Soit $D(n,n') := h(n') - h(n)$, et posons $n' = n'_M \equiv 0(30)$, $n' \equiv 1(p)$ $(5 < p \leq M,\ p \neq P)$, et $n' \equiv 5(P)$, où P est un premier inférieur à M satisfaisant aux congruences

$$P \equiv 1(2),\ 2(3),\ \text{et } 4(p)\ (5 \leq p < 23)\ . \tag{4.24}$$

(M est supposé suffisamment grand pour assurer l'existence d'un tel P). Afin d'établir (4.23) nous montrons qu'il existe un P comme en (4.24) tel que

$$\lim_{M\to\infty} D(n,n') \ < \ 0\ . \tag{4.25}$$

Nous avons

$$D(n,n') = \sum_{P|d}^{M} \frac{\mu(d)}{d^3}(a_d - b_d) + O(M^{-1})\ , \tag{4.26}$$

où

$$0 \leq a_d \leq d-1 \ \text{ et } \ a_d \equiv \left\{ \begin{matrix} 0(d_1) \\ 1(d_2) \end{matrix} \right\} \ \text{ si } \ d = d_1 d_2 \ \text{ avec } \ d_1 = (30,d) \tag{4.27}$$

et

$$0 \leq b_d \leq d-1 \ \text{ et } \ b_d \equiv \left\{ \begin{matrix} 0(d_1) \\ 1(d_2') \\ 5(d_3) \end{matrix} \right\} \ \text{ si } \ d_2 = d_2' d_3 \ \text{ avec } \ d_3 = (P,d)\ . \tag{4.28}$$

Ainsi

$$D(n,n') = \frac{1}{P^3} D_M + O(M^{-1})\ , \tag{4.29}$$

où

$$D_M = \sum_{\substack{d=1 \\ P\nmid d}}^{\infty} \frac{\mu(d)}{d^3}(b_{Pd} - a_{Pd}) =: \sum_{\substack{d=1 \\ P\nmid d}}^{\infty} c_d\ . \tag{4.30}$$

Les valeurs de c_d se calculent à l'aide de (4.24); pour ce que nous voulons obtenir il est suffisant d'utiliser

$$c_1 = 4,\ c_2 = -\frac{1}{2},\ c_3 = \frac{-P-4}{27},\ c_5 = \frac{P-4}{125},\ c_d = \frac{4P+4}{d^3}\ (d = 6, 10, 15),$$

$$c_{30} = \frac{-4P-4}{30^3}, c_p = \frac{-(p-1)P-4}{p^3}\ (7 \leq p \leq 23),\ c_p < 0\ (p = 29, 31),$$

$$c_{2p} = \frac{(p-1)P+4}{(2p)^3}\ (14 \leq 2p \leq 26), c_{21} = \frac{13P+4}{21^3}\ ,\ \text{ et } c_d < \frac{P}{d^2}\ (d \geq 33)\ .$$

Si P est suffisamment grand nous avons alors

$$\begin{aligned} D_M < P \Big(& -\frac{1}{27} + \frac{1}{125} + \frac{4}{6^3} - \frac{6}{7^3} + \frac{4}{10^3} - \frac{10}{11^3} - \frac{12}{13^3} + \frac{6}{14^3} + \frac{4}{15^3} \\ & - \frac{16}{17^3} - \frac{18}{19^3} + \frac{13}{21^3} + \frac{10}{22^3} - \frac{22}{23^3} + \frac{12}{26^3} - \frac{4}{30^3} + \frac{1}{32} \Big) + O(1) \\ < & -0.007\, P\ , \end{aligned}$$

d'où, avec (4.29), l'assertion (4.25).

5. Preuve du Théorème 2.

Nous établissons ici que

$$\begin{aligned} s_k &= \frac{\zeta(k)}{2\zeta(2k)} - \frac{\zeta(k+1)}{2\zeta(2k+2)} + \frac{1}{2\zeta(k+1)} - \lim_{r\to\infty} \epsilon_r \\ &=: \vartheta(k) - \lim_{r\to\infty} \epsilon_r\ , \end{aligned} \tag{5.1}$$

ce qui, en vertu de (3.7), est équivalent à

$$I_k + s_k\ =\ \frac{1}{\zeta(k+1)}\ , \tag{5.2}$$

et par (1.9) au Théorème 2.

Avec la notation introduite au début du chapitre 3 nous écrivons comme alors, si $n \equiv m(P_r)$,

$$h(n) = \sum_{d|P_r} \frac{\mu(d)}{d^k} \left(\frac{1}{2} - \frac{m_d}{d}\right) + \sum_{d\nmid P_r} \frac{\mu(d)}{d^k} \left(\frac{1}{2} - \{\frac{n}{d}\}\right)\ .$$

A l'aide de l'égalité

$$\begin{aligned}\sum_{\mu(d)=1} \frac{1}{d^{k+1}} &= \sum_{\mu(d)=1} \frac{1}{d^{k+1}} \left(\frac{1}{2}+\frac{1}{2}\right) + \sum_{\mu(d)=-1} \frac{1}{d^{k+1}} \left(\frac{1}{2}-\frac{1}{2}\right) \\ &= \frac{\zeta(k+1)}{2\zeta(2k+2)} + \frac{1}{2\zeta(k+1)} ,\end{aligned} \tag{5.3}$$

nous vérifions cette fois que

$$h(n) = \vartheta'(k) - \epsilon'_{r,m}(k) - \delta'_{r,n}(k) , \tag{5.4}$$

où

$$\vartheta'(k) := \sum \frac{|\mu(d)|}{d^k} \left(\frac{1}{2} - \frac{1}{d}\right) + \sum_{\mu(d)=1} \frac{1}{d^{k+1}} = \vartheta(k) , \tag{5.5}$$

où

$$\epsilon'_{r,m}(k) = \sum_{d|P_r} \frac{b_d}{d^{k+1}} \tag{5.6}$$

avec

$$b_d = b_d(m) := \begin{cases} m_d & \text{si } \mu(d) = +1 \\ d-1-m_d & \text{si } \mu(d) = -1 , \end{cases} \tag{5.7}$$

et où

$$0 < \delta'_{r,n}(k) := \sum_{\substack{d\nmid P_r \\ \mu(d)=+1}} \frac{1}{d^k}\left\{\frac{n}{d}\right\} + \sum_{\substack{d\nmid P_r \\ \mu(d)=-1}} \frac{1}{d^k}\left(1 - \frac{1}{d} - \left\{\frac{n}{d}\right\}\right) < \frac{2}{p_r^{k-1}} . \tag{5.8}$$

Et (5.1) suit alors aisément de

$$\epsilon_r = \min_m \epsilon'_{r,m} , \tag{5.9}$$

dont il faut encore nous assurer. Posons $M_d := d-1-m_d$; pour obtenir (5.9) il suffit de vérifier que chaque système de congruences $S'_{r,m} := \{M_d(d),\ d|P_r\}$ est compatible, puisque dans ce cas on dispose d'une correspondance bijective entre les $S'_{r,m}$ $(0 \le m \le P_r - 1)$ et les $S_{r,M}$ $(0 \le M \le P_r)$ du chapitre 3.

Or, si $t \equiv p - 1 - m_p(p)$ lorsque $p|P_r$, alors $-1 - t \equiv p - 1 - t \equiv m_p(p)$, et donc $-1 - t \equiv d - 1 - t \equiv m_d(d)$ pour tout $d|P_r$. □

RÉFÉRENCES

[AS] S.D. ADHIKARI and A. SANKARANARAYANAN, *On an error term related to the Jordan totient function* $J_k(n)$, J. Number Theory **34** (1990), 178–188.

[ES] P. ERDÖS and H.N. SHAPIRO, *The existence of a distribution function for an error term related to the Euler function*, Canad. J. Math. **7** (1955), 63–75.

[M] H.L. MONTGOMERY, *Fluctuations in the mean of Euler's phi function*, Proc. Indian Acad. Sci. (Math.Sci.) **97** (1987), 239–245.

[P1] Y.-F.S. PÉTERMANN, *Existence of all the asymptotic* λ*-th means for certain arithmetical convolutions*, Tsukuba J. Math. **12** (1988), 241–248.

[P2] Y.-F.S. PÉTERMANN, *On the distribution of values of an error term related to the Euler function*, Proc. Conf. Théorie des nombres Univ. Laval juillet 1987, 785–797, Walter de Gruyter, Berlin (1989).

[P3] Y.-F.S. PÉTERMANN, *On the average behaviour of the largest divisor of* n *which is prime to a fixed integer* k, prépublication.

[W] A. WALFISZ, *Weylsche Exponentialsummen in der neueren Zahlentheorie*, VEB Deutscher Verlag der Wissenschaften, Berlin (1963).

Université de Genève, Section de Mathématiques
2-4, rue du Lièvre, C.P. 240
CH-1211 Genève 24.