JOURNAL DE THÉORIE DES NOMBRES DE BORDEAUX

L. HABSIEGER

Représentations des groupes et identités polynomiales

Journal de Théorie des Nombres de Bordeaux 2e série, tome 3, nº 1 (1991), p. 1-11

<http://www.numdam.org/item?id=JTNB_1991__3_1_1_0>

Séminaire de Théorie des Nombres,
Bordeaux **3** *(1991), 1-11*

Représentations des groupes et identités polynomiales.

par L. HABSIEGER

Résumé — Plusieurs problèmes liés au problème de Waring utilisent des identités où l'on exprime une forme linéaire en x comme somme ou différence de puissances k-ièmes de formes linéaires en x. La plupart de ces identités sont fournies par des solutions au problème de Tarry-Escott, sauf deux d'entre elles, dues à Rao et Vaserstein. Nous montrons que ces deux identités sont naturellement liées aux groupes $S_2 \times S_2$ et S_3, puis développons une théorie qui permet d'associer à chaque groupe fini quelques identités de ce type.

1. Problèmes liés au problème de Waring

Dans toute cette section k désignera un entier naturel donné supérieur ou égal à 2.

Le problème de Waring consiste à trouver l'entier naturel s minimal pour lequel tout entier naturel s'écrit comme somme de s puissances k-ièmes d'entiers naturels. Le problème est résolu (cf. [H-W, p. 337] et [D-D]) et l'on a en général $g(k) = 2^k + [(3/2)^k] - 2$, où $g(k)$ est l'entier minimal recherché et où $[x]$ représente la partie entière d'un nombre réel x.

Le problème de Waring asymptotique consiste à déterminer l'entier naturel s minimal pour lequel tout entier naturel suffisamment grand s'écrit comme somme de s puissances k-ièmes d'entiers naturels. Ce minimum, noté $G(k)$ n'est connu que pour deux valeurs de k, à savoir $G(2) = 4$ et $G(4) = 16$. En fait on a toujours $G(2^m) \geq 2^{m+2}$ et on conjecture que $G(k) \leq 4k$. Toutefois la meilleure majoration de $G(k)$ semble être $[K]$:

$$G(k) \leq 2k(\log\ k + \log\ \log\ k + 6), \text{ pour } k \geq 4000\ .$$

Le problème de Waring signé (que Wright [W] avait malencontreusement baptisé problème de Waring "plus facile") consiste à trouver l'entier naturel

Manuscrit reçu le 21 février 1991 .

s minimal pour lequel tout entier naturel s'écrit comme somme ou différence de s puissances k-ièmes d'entiers naturels. Ce minimum, noté $\nu(k)$, n'est connu que pour $k = 2$ et on a $\nu(2) = 3$. En fait on a toujours $\nu(2^m) \geq 2^{m+1} + 1$ et on conjecture que $\nu(k) \leq 2k + 1$. Toutefois la meilleure borne supérieure pour $\nu(k)$ est celle (triviale) donnée par $\nu(k) \leq G(k) + 1$.

Le problème de Waring rationnel signé consiste à déterminer l'entier naturel s minimal pour lequel tout rationnel s'exprime comme somme ou différence de s puissances k-ièmes de rationnels. Ce minimum, noté $\rho(k)$ [C-C] est majoré par $2k - 2$ pour $2 \leq k \leq 11$; on a de plus $\rho(6) \leq 8$ et $\rho(8) \leq 12$.

Le problème de Waring en 0 consiste à trouver une représentation non triviale de 0 comme somme ou différence de puissances k-ièmes d'entiers naturels. Le nombre minimal de termes de cette représentation, noté $\theta(k)$, est déterminé pour $k \in \{2, 3, 4\}$: on a $\theta(2) = 3$ en utilisant des triplets pythagoréens, $\theta(3) = 4$ en utilisant le grand théorème de Fermat et l'égalité $10^3 + 9^3 = 12^3 + 1^3$ et $\theta(4) = 4$ en utilisant le grand théorème de Fermat et les solutions de Elkies [E] et Frye de l'équation $A^4 + B^4 + C^4 = D^4$. De même l'identité de Lander et Parkin [L-P] $27^5 + 84^5 + 110^5 + 133^5 = 144^5$ entraine que $\theta(5) \in \{4, 5\}$. Enfin Chowla et Cowles [C-C] ont montré que $\theta(k) \leq 2k$.

Un outil fructueux dans l'étude de ces trois derniers problème est l'utilisation de solutions au problème de Tarry-Escott. Ce dernier problème consiste à chercher l'entier naturel s minimal pour lequel il existe deux s-uplets d'entiers $(a_1, \ldots, a_s)$ et $(b_1, \ldots, b_s)$ tels que $a_1^i + \cdots + a_s^i = b_1^i + \cdots + b_s^i$ pour $1 \leq i \leq k$, et $a_1^{k+1} + \cdots + a_s^{k+1} \neq b_1^{k+1} + \cdots + b_s^{k+1}$. Ce minimum, noté $T(k)$ est minoré par $k + 1$. De plus Hua [Hu] a montré que

$$T(k) \leq (k+1)\left(\left[\frac{\log\left(\frac{k+2}{2}\right)}{\log\left(1 + \frac{1}{k}\right)}\right] + 1\right),$$

ce qui est assez loin de la valeur conjecturée $T(k) = k + 1$. Cette conjecture a été vérifiée pour $k \leq 9$ (cf. [T], [Es], [L]). Ces solutions permettent d'écrire des identités du type

$$\sum_{i=1}^{T(k-2)} \left((x + a_i)^k - (x + b_i)^k\right) = Cx + D,$$

avec $C \neq 0$. Ainsi le changement de variable $y = Cx + D$ donne la majoration $\rho(k) \leq 2T(k-2)$. De même, quand $Cx + D = z^k$, on voit que

$\theta(k) \leq 2T(k-2)+1$. Enfin ce type d'identité ramène l'étude du problème de Waring signé dans $\mathbb{Z}$ au même problème dans $\mathbb{Z}/C\mathbb{Z}$, pour lequel on connaît de bonnes majorations [F-W]. Toutefois, il existe deux identités polynomiales qui permettent d'améliorer les bornes fournies par les solutions au problème de Tarry-Escott. Tout d'abord l'identité de Rao [R] s'écrit

$$\begin{aligned}
&(a^5c+bdx)^6+(a^5d-bcx)^6+(b^5c-adx)^6+(b^5d+acx)^6\\
&-(a^5c-bdx)^6-(a^5d+bcx)^6-(b^5c+adx)^6-(b^5d-acx)^6\\
&=12\,abcd(c^4-d^4)(a^{24}-b^{24})x,
\end{aligned}\tag{1.1}$$

qui permet d'obtenir $\nu(6) \leq 14, \rho(6) \leq 9$ et $\theta(6) \leq 9$. De même l'identité de Vaserstein [V]

$$\begin{aligned}
&(a^{56}b^{31}c^{54}x+b^{31}c^{110})^8+(a^{25}c^{116}x+a^{25}b^{88}c^{28})^8\\
&+(a^{35}b^{31}c^{85}x+a^{57}b^{63}c^{21})^8+(a^{55}b^{25}c^{61}x-a^{7}b^{73}c^{61})^8\\
&+(a^{20}bc^{120}x-a^{60}b^{81})^8+(a^{31}b^{36}c^{74}x-a^{15}b^{28}c^{98})^8\\
&-(a^{56}b^{31}c^{54}x-b^{31}c^{110})^8-(a^{25}c^{116}x-a^{25}b^{88}c^{28})^8\\
&-(a^{35}b^{31}c^{85}x-a^{57}b^{63}c^{21})^8-(a^{55}b^{25}c^{61}x+a^{7}b^{73}c^{61})^8\\
&-(a^{20}bc^{120}x+a^{60}b^{81})^8-(a^{31}b^{36}c^{74}x-a^{15}b^{28}c^{98})^8\\
&=16(a^{56}b^{248}c^{824}+a^{200}b^{616}c^{312}+a^{424}b^{472}c^{232}\\
&\quad -a^{440}b^{568}c^{120}-a^{136}b^{232}c^{760}-a^{104}b^{536}c^{488})x,
\end{aligned}\tag{1.2}$$

permet d'obtenir $\nu(8) \leq 28, \rho(8) \leq 12$ et $\theta(8) \leq 13$.

Ces deux identités semblent être isolées. L'objet de cet exposé est de montrer qu'elles sont en fait deux exemples d'une théorie que nous allons développer et qui fait appel aux représentations de groupes finis. Dans un premier temps nous allons chercher des symétries dans les formules (1.1) et (1.2), qui motiveront les définitions à introduire. Nous donnerons alors les principales propriétés de cette nouvelle classe d'objets. Enfin nous décrirons l'algorithme qui permettra d'obtenir de nouvelles identités polynomiales et donnerons quelques exemples significatifs. Une présentation plus détaillée, accompagnée des preuves, est décrite dans [H].

2. Définitions

Effectuons le changement de variables

$$\begin{cases} u = a^{\frac{50}{17}}\ b^{\frac{21}{17}}\ c^{\frac{70}{17}}\ , \\ v = a^{-\frac{35}{17}}\ b^{\frac{38}{17}}\ c^{\frac{138}{17}}\ , \\ w = a^{\frac{67}{17}}\ b^{\frac{123}{17}}\ c^{-\frac{49}{17}}\ , \\ y = a^{\frac{300}{17}}\ b^{-\frac{316}{17}}\ c^{\frac{862}{17}}x\ . \end{cases}$$

L'identité (1.2) s'écrit alors

(2.1)

$$\begin{aligned} &(u^7v^{10}+u^5w^6y)^8+(v^7w^{10}+v^5u^6y)^8+(w^7u^{10}+w^5v^6y)^8 \\ &+(u^7w^{10}-u^5v^6y)^8+(v^7u^{10}-v^5w^6y)^8+(w^7v^{10}-w^5u^6y)^8 \\ &-(u^7v^{10}-u^5w^6y)^8-(vw^{10}-v^5u^6y)^8-(w^7u^{10}-w^5v^6y)^8 \\ &-(u^7w^{10}+u^5v^6y)^8-(v^7u^{10}+v^5w^6y)^8-(w^7v^{10}+w^5u^6y)^8 \\ &=16(uvw)^6(u^{48}v^{64}+v^{48}w^{64}+w^{48}u^{64}-v^{48}u^{64}-w^{48}v^{64}-u^{48}w^{64})x. \end{aligned}$$

Dans l'identité (2.1), le groupe S_3 des permutations de $\{u,v,w\}$ apparaît naturellement. Plus précisement, posons $f_0((u,v,w);y)=(u^7v^{10}+u^5w^6y)^8$ et définissons

$$F(y)=\sum_{\sigma\in S_3} f_0(\sigma.(u,v,w);\epsilon(\sigma)y),$$

où $\epsilon(\sigma)$ désigne la signature de la permutation σ.

L'identité (2.1) s'écrit alors

$$F(y)-F(-y)=Cy, \tag{2.2}$$

avec $C=16(uvw)^6(u^{48}v^{64}+v^{48}w^{64}+w^{48}u^{64}-v^{48}u^{64}-w^{48}v^{64}-u^{48}w^{64})$. De plus cette approche permet de donner une preuve rapide de (2.2). Considérons le coefficient C_i de y^{2i+1}, pour $i\in\{1,2,3\}$, dans $F(y)-F(-y)$. On trouve

$$\begin{cases} C_1=2\binom{8}{3}\sum_{\sigma\in S_3}\sigma.\ (u^{50}v^{50}w^{18}), \\ C_2=2\binom{8}{5}\sum_{\sigma\in S_3}\sigma.\ (u^{46}v^{30}w^{30}), \\ C_3=2\binom{8}{7}\sum_{\sigma\in S_3}\sigma.\ (u^{42}v^{10}w^{42}). \end{cases}$$

Comme les trois vecteurs $(50, 50, 18)$, $(46, 30, 30)$ et $(42, 10, 42)$ sont invariants sous l'action d'une transposition, les C_i $(i \in \{1, 2, 3\})$ sont nuls. Remarquons enfin que ces trois vecteurs invariants s'obtiennent comme combinaisons linéaires des vecteurs $(7, 10, 0)$ et $(5, 0, 6)$ intervenant dans la définition de f_0 ; de plus les coefficients de ces combinaisons linéaires sont connus d'avance. Cette remarque permet d'expliquer comment on peut trouver intuitivement la formule (2.2). Cherchons $f_0(y)$ sous la forme $(e^\alpha + e^\beta y)^8$, où e^α et e^β sont des exponentielles formelles de vecteurs de $\mathbb{C}^3$. Les conditions d'invariance des C_i fournissent un système de trois équations linéaires satisfaites par les vecteurs α et β, dont $(7, 10, 0)$ et $(5, 0, 6)$ sont des solutions non triviales. Ce processus est en fait un algorithme général, que nous décrirons dans la dernière section.

En suivant ce procédé nous pouvons aussi trouver et prouver (1.1). Plus précisement, en posant

$$g((a,b),(c,d);x) = (a^5c + bdx)^6,$$
$$G(x) = \sum_{\substack{\sigma_1 \in S_2 \\ \sigma_2 \in S_2}} g(\sigma_1.(a,b), \sigma_2.(c,d); \epsilon(\sigma_1)\epsilon(\sigma_2)x),$$
$$\text{et} \quad C' = 12\ abcd(c^4 - d^4)(a^{24} - b^{24}),$$

on a $G(x) - G(-x) = C'x$. Il semble donc que les identités de Rao et de Vasertein soient naturellement associées aux groupes $S_2 \times S_2$ et S_3 respectivement. Nous allons maintenant développer une théorie qui s'applique à tout groupe fini.

Donnons nous un groupe fini G, un caractère non trivial défini sur G noté ϵ, un corps K de caractéristique nulle et une représentation V de G sur K. Pour $k \in \mathbb{N}$, nous dirons que G est k-admissible sur V par rapport à ϵ si et seulement si, pour tout couple de k-uplets de rationnels $(\lambda, \mu) = ((\lambda_1, \ldots, \lambda_k), (\mu_1, \ldots, \mu_k))$, il existe deux vecteurs α et β de V qui satisfont aux deux conditions

i) $\forall i \in \{1, \ldots, k\}, \exists g_i \in G, \epsilon(g_i) \neq 1 \quad : \quad \lambda_i\alpha + \mu_i\beta \in \text{Fix } g_i,$

ii) $\forall g \in G,\ \{\alpha, \beta\} \subset \text{Fix } g \Rightarrow \epsilon(g) \neq 1.$

Ici Fix g désigne l'ensemble des vecteurs des V laissés invariants par l'action de g. la condition i) fournit un système d'équations satisfaites par α et β et la condition ii) exige des solutions non triviales. De plus ce système étant homogène, les solutions pourront en général s'exprimer sous forme de déterminants en (λ, μ). Ceci motive une seconde définition. Nous dirons que G est faiblement k-admissible sur V par rapport à ϵ s'il existe deux fonctions polynomiales $\overline{\alpha}$ et $\overline{\beta}$, en $2k$ variables $\lambda_1, \ldots, \lambda_k, \mu_1, \ldots, \mu_k$, à valeurs dans V telles que

iii) $\forall i \in \{1, \ldots, k\}, \exists g_i \in G, \epsilon(g_i) \neq 1 \quad : \quad \lambda_i\overline{\alpha} + \mu_i\overline{\beta} \in \overline{\mathrm{Fix}} g_i$,

iv) $\forall g \in G,\ \{\overline{\alpha}, \overline{\beta}\} \subset \overline{\mathrm{Fix}} g \Rightarrow \epsilon(g) \neq 1$.

Ici $\overline{\mathrm{Fix}}$ désigne l'ensemble des fonctions polynomiales laissés invariantes par l'action de g (qui opère sur une fonction f à valeurs dans V par $(g.f)(\lambda, \mu) = g.f(\lambda, \mu))$.

On peut montrer que, si G est (faiblement) k-admissible sur V par rapport à ϵ, alors G est (faiblement) ℓ-admissible sur V par rapport à ϵ, pour tout entier naturel ℓ inférieur à k. De plus, comme les g_i qui interviennent dans les conditions i) et iii) sont distincts, l'entier k est formément borné par l'ordre de G. Ceci nous permet de définir $k_\epsilon(V;K)$ (resp.$(\overline{k}_\epsilon(V;K))$ comme étant le plus grand entier k pour lequel G est k-admissible (resp. faiblement k-admissible) sur V par rapport à ϵ. De même nous pouvons définir $k_\epsilon(G;K)$ (resp. $\overline{k}_\epsilon(G;K)$) comme étant la valeur maximale des $k_\epsilon(V;K)$ (resp. $\overline{k}_\epsilon(V;K)$) lorsque V parcourt toutes les représentations de G. L'objet de la prochaine section sera de tenter de calculer ces diverses quantités.

3. Propriétés.

Dans le but de réduire le nombre de représentations de G à considérer pour calculer $k_\epsilon(G;K)$, nous avons montré, en utilisant des vecteurs du type $\alpha + 0$ ou $0 + \alpha$ que :

$$\begin{cases} k_\epsilon(V_1 \oplus V_2;K) \geq \max(k_\epsilon(V_1;K), k_\epsilon(V_2;K)), \\ \overline{k}_\epsilon(V_1 \oplus V_2;K) \geq \max(\overline{k}_\epsilon(V_1;K), \overline{k}_\epsilon(v_2;K)). \end{cases}$$

En particulier, si G agit trivialement sur V_2, il y a égalité. Nous verrons même ultérieurement que la deuxième inégalité est en fait toujours une égalité.

La similarité de ces deux inégalités ainsi que des définitions du paragraphe précédent nous a amené à proposer la conjecture suivante :

$$k_\epsilon(V;K) = \overline{k}_\epsilon(V;K).$$

Pour supporter cette conjecture, nous avons prouvé que $k_\epsilon(V;K) \leq \overline{k}_\epsilon(V;K)$, ce qui justifie le terminologie "faiblement". De plus cette dernière inégalité permettra d'utiliser des formules de faible k-admissibilité dans le cas usuel. Plus précisement nous avons la formule exacte

$$\overline{k}_\epsilon(V;K) = \max\{k \in \mathbb{N} : \exists g_1, \ldots, g_k \in G, \epsilon(g_i) \neq 1,$$
$$\sum_{i=1}^{k} \text{codim Fix } g_i < 2 \text{ codim} \bigcap_{i=1}^{k} \text{ Fix } g_i\}.$$

Cette formule exprime le fait qu'il existe des solutions non triviales si le nombre d'inconnues est strictement supérieur au rang du système considéré. Nous pouvons en déduire quelques corollaires intéressants comme :

1) $\overline{k}_\epsilon(V_1 \oplus V_2;K) = \max(\overline{k}_\epsilon(V_1;K), \overline{k}_\epsilon(v_2;K))$,
2) $\overline{k}_\epsilon(G;K)$ ne dépend pas de K.

Notons donc $\overline{k}_\epsilon(G) = \overline{k}_\epsilon(G;K)$. Le deuxième corollaire, jumelé avec la formule donnant $\overline{k}_\epsilon(V;K)$, permettra de transposer notre étude dans un corps algébriquement clos, dont les représentations sont plus aisées à décrire. En particulier nous aurons $\overline{k}_\epsilon(G) = \max \overline{k}_\epsilon(V;\mathbb{C})$, lorsque V parcourt les représentations complexes irréductibles de G. Ainsi $k_\epsilon(G)$ est calculable en un nombre fini d'étapes, à l'aide de la formule donnant $\overline{k}_\epsilon(V;K)$. Par exemple, en notant D_n le groupe dihédral d'ordre $2n$, nous avons $k_\epsilon(D_n;\mathbb{Q}) = \overline{k}_\epsilon(D_n) = n$ pour $n \leq 3$, et $\overline{k}_\epsilon(D_n) = 3$ pour $n \geq 3$, lorsque ϵ est le déterminant usuel.

En vue d'utiliser ces résultats pour aborder les problèmes décrits dans la première section, nous sommes amené à chercher à minimiser la taille des groupes considérés. En notant U_n le groupe des racines primitives n-ièmes de l'unité, posons donc

$$g_n(k) = \min\{|G| : k_\epsilon(G,\mathbb{Q}) \geq k, \quad \epsilon(G) = U_n\},$$
$$g'_n(k) = \min\{|G| : k_\epsilon(G,\mathbb{Q}) \geq k, \quad \epsilon(G) \subset U_n\} = \min_{d|n} \; g_n(k).$$

Nous avons $g_1(k) = +\infty$ mais $g_n(k) < +\infty$ pour $n \geq 2$. En effet, en utilisant l'inégalité

$$k_{\epsilon_1 \otimes \epsilon_2}(G_1 \times G_2;K) \geq k_{\epsilon_1}(G_1;K) + k_{\epsilon_2}(G_2;K),$$

il suffit de montrer que $g_n(1) < +\infty$; le résultat s'ensuit car $k_\epsilon(C_n;\mathbb{Q}) = 1$, si ϵ est un caractère bien choisi défini sur le groupe cyclique C_n. De plus, en appliquant l'inégalité précédente aux groupes dihédraux nous trouvons la majoration $g_2(3k+r) \leq 2^r 6^k$. Ceci nous permet de prouver que $g_2(1) = 2$, $g_2(2) = 4$, $g_2(3) = 6$ et $g_2(4) = 12$. Toutefois il s'agit là d'une majoration assez grossière de $g_2(m)$ et elle doit être nettement améliorable pour des valeurs de m plus grandes. Explicitons maintenant quelques identités que l'on peut obtenir de cette manière.

4. Algorithme et exemples.

Supposons que G soit k-admissible sur V par rapport à ϵ, où $\epsilon^n = 1$. Alors il existe $4|G|$ formes linéaires distinctes à coefficients dans $\mathbb{Q}(\exp(\frac{2i\pi}{n}))$ telles que :

$$\begin{cases} \sum_{g\in G} (f_{g,1}(x)^{2k+1} - f_{g,1}(-x)^{2k+1}) = Cx, \\ \sum_{g\in G} (f_{g,2}(x)^{2k+2} - f_{g,2}(-x)^{2k+2}) = Cx, \\ \sum_{g\in G} (f_{g,3}(x)^{2k-1} - f_{g,3}(-x)^{2k-1}) = 0, \\ \sum_{g\in G} (f_{g,4}(x)^{2k} - f_{g,4}(-x)^{2k}) = 0. \end{cases}$$

En effet fixons-nous une base $(e_1, \ldots, e_d)$ de V et, pour tout vecteur γ de coordonnées $(\gamma_1, \ldots, \gamma_d)$ dans cette base, posons $e^\gamma = x_1^{\gamma_1} \ldots x_d^{\gamma_d}$. Prenons tout d'abord $(\lambda, \mu) = ((3, 5, \ldots, 2k+1), (2k-2, 2k-4, \ldots, 0))$. Déterminons alors les vecteurs α et β sujets aux conditions i) et ii) et définissons $f_{g,1}(x)$ et $F(x)$ par

$$\begin{cases} f_{g,1}(x) = \epsilon(g) e^{g\cdot\alpha} x + e^{g\cdot\beta}, \\ F(x) = \sum_{g\in g} f_{g,1}(x). \end{cases}$$

La fonction $F(x) - F(-x)$ est impaire et, pour $i \in \{1, \ldots, k\}$, son coefficient de x^{2i+1} vaut :

$$\begin{aligned} C_i &= 2\binom{2k+1}{2i+1} \sum_{g\in G} (\epsilon^{g\cdot\alpha})^{2i+1} (e^{g\cdot\beta})^{(2k+1)-(2i-1)} \\ &= 2\binom{2k+1}{2i+1} \sum_{g\in G} \epsilon(g) e^{g\cdot(\lambda_i\alpha+\mu_i\beta)} = \epsilon(g_i) C_i = 0 \end{aligned}$$

Ceci montre la première identité. Les trois autres se prouvent de la même manière.

Ecrivons maintenant les formules obtenues à partir des premiers groupes dihédraux.

Considérons tout d'abord la représentation régulière de $D_1 = S_2$, muni du caractère non trivial. Les deux premières fonctions polynomiales associées sont définies par les formules

$$\left\{\begin{array}{l} (x+a)^3 + (-x+b)^3 + (x-a)^3 + (-x-b)^3 = 6(a^2-b^2)x, \\ (ax+b^3)^4 + (-bx+a^3)^4 - (ax-b^3)^4 - (bx+a^3)^4 = 8ab(b^8-a^8)x, \end{array}\right.$$

en posant $(a,b) = (e^{(3,0)}, e^{(0,3)})$ et $(a,b) = (e^{(1,0)}, e^{(0,1)})$ respectivement.

Ceci montre que $\nu(3) \leq 8, \nu(4) \leq 12, \rho(3) \leq 4, \rho(4) \leq 4, \theta(3) \leq 5, \theta(4) \leq 5$; la majoration $\rho(4) \leq 4$ semble être nouvelle.

Lorsque $G = D_2 = S_2 \times S_2$, on utilise les résultats obtenus pour S_2 pour obtenir d'une part l'identité de Rao et d'autre part l'identité

$$\begin{aligned} &(a^2x+b^3d)^5 + (-a^2x+b^3c)^5 + (-b^2x+a^3d)^5 + (b^2x+a^3c)^5 \\ &+ (a^2x-b^3d)^5 + (-a^2x-b^3c)^5 + (-b^2x-a^3d)^5 + (b^2x-a^3c)^5 \\ &= 10a^2b^2(b^{10}-a^{10})(d^4-c^4)x. \end{aligned}$$

Ceci montre que $\nu(5) \leq 13, \nu(6) \leq 14, \rho(5) \leq 8, \rho(6) \leq 8, \theta(5) \leq 9, \theta(6) \leq 9$; les majorations obtenues pour $k = 6$ sont meilleures que celles fournies par les solutions du problème de Tarry-Escott.

Lorsque $G = D_3 = S_3$, on choisit la représentation tridimensionnelle naturelle de S_3, muni de la signature. Les fonctions polynomiales associées sont alors définies par $\overline{\alpha}(\lambda, \mu) = (\mu_1\mu_2\lambda_3, \mu_1\lambda_2\mu_3, \lambda_1\mu_2\mu_3)$ et $\overline{\beta}(\lambda, \mu) = (\lambda_1\lambda_2\mu_3, \lambda_1\mu_2\lambda_3, \mu_1\lambda_2\lambda_3)$. On trouve ainsi d'une part l'identité de Rao et d'autre par l'identité

$$\begin{aligned} &(a^4x+b^3c^{10})^7 + (b^4x+a^{10}c^3)^7 + (c^4x+a^3b^{10})^7 \\ &+ (-a^4x+b^{10}c^3)^7 + (-b^4x+a^3c^{10})^7 + (-c^4x+a^{10}b^3)^7 \\ &+ (a^4x-b^3c^{10})^7 + (b^4x-a^{10}c^3)^7 + (c^4x-a^3b^{10})^7 \\ &+ (-a^4x+b^{10}c^3)^7 + (-b^4x+a^3c^{10})^7 + (-c^4x+a^{10}b^3)^7 \\ &= 14(abc)^4(c^7-a^7)(b^7-a^7)(c^7-b^7) \\ &\qquad\qquad \times (a^{14}+b^{14}+c^{14}+a^7b^7+a^7c^7+b^7c^7)x. \end{aligned}$$

Ceci montre que $\nu(7) \leq 16, \rho(8) \leq 28, \rho(7) \leq 12, \rho(8) \leq 12, \theta(7) \leq 13, \theta(8) \leq 13$; à nouveau, les majorations obtenues pour $k = 8$ sont meilleures que celles fournies par les solutions du problème de Tarry-Escott.

Nous n'avons pas explicité les identités dont le second membre est nul. En effet les bornes supérieures qu'elles fournissent pour la fonction θ sont moins bonnes que celles trouvées ci-dessus. Ceci est dû au fait que $g_2(k+1) > g_2(k) + 1$, pour les valeurs de k considérées.

Signalons enfin que certaines identités sont susceptibles d'être raccourcies, en opérant les simplifications adéquates. Par exemple, pour $k = 10$, la méthode générale appliquée au groupe $S_2 \times S_3$ fournit l'identité $F(x) - F(-x) = Cx$, où l'on a posé

$$\begin{aligned} F(x) = {} & (av^3w^{21} + bu^9v^2x)^{10} + (aw^3u^{21} + bv^9w^2x)^{10} \\ & + (au^3v^{21} + bw^9u^2x)^{10} + (bv^3w^{21} - au^9v^2x)^{10} \\ & + (bw^3u^{21} - av^3w^2x)^{10} + (bu^3v^{21} - aw^9u^2x)^{10} \\ & + (aw^3v^{21} - bu^9w^2x)^{10} + (au^3w^{21} - bv^9u^2x)^{10} \\ & + (av^3u^{21} - bw^9v^2x)^{10} + (bw^3v^{21} + au^9w^2x)^{10} \\ & + (bu^3w^{21} + av^9u^2x)^{10} + (bv^3u^{21} + aw^9v^2x)^{10} \end{aligned}$$

et

$$C = 20ab(uvw)^9(v^{20}w^{180} + w^{20}u^{180} + u^{20}v^{180} - v^{20}u^{180} - w^{20}v^{180} - u^{20}w^{180}).$$

En imposant que $av^3w^{21} + bu^9v^2x = bw^3u^{21} + av^9w^2x$, nous devons poser $u = vt^4, w = vt^3, a = bt^{30}$, pour un certain t. Ceci nous conduit à l'identité $G(x) - G(-x) = C'x$, où l'on a posé

$$\begin{aligned} G(x) = {} & (t^{114} + x)^{10} + (t^{33} + t^{29}x)^{10} + (t^{54} - t^{60}x)^{10} + (t^3 - t^{59}x)^{10} \\ & + (t^{30} - t^{36}x)^{10} + (t^{96} - t^2x)^{10} + (t^{105} - t^{21}x)^{10} + (1 + t^{66}x)^{10} \\ & + (t^{66} + t^{32}x)^{10} + (t^{75} + t^{51}x)^{10} \end{aligned}$$

et

$$C' = 20t^{66}(t^{240} - 1)(t^{180} - 1)(t^{160} - 1)(t^{380} + t^{200} + t^{20} - 1 - t^{160} - t^{320}).$$

Toutefois cette dernière identité fournit une moins bonne majoration que les solutions du problème de Tarry-Escott.

RÉFÉRENCES

[C-C] S. CHOWLA et M. COWBES, *Remarks on equations related to Fermat's last theorem, Number Theory Related to Fermat's last theorem*, Proceedings of the Conference sponsored by the Vaughn Foundation, édité par Neal Koblitz, Progress in Mathematics **26** Birkhäuser (1982) Boston, Basel, Stuggart, 255-261.

[D-D] F. DELMER et J.-M. DESHOUILLERS, *On the computation of $g(k)$ in Waring's problem*, Math. Comp. **54, 190** (1990), 885-893.

[E] N. D. ELKIES, *On* $A^4 + B^4 + C^4 + D^4$, Math. Comp. **51** (1988), 184, 825-835.

[Es] ESCOTT, *Logarithmic series*, Quarterly Journal of Math. **41** (1910), 141-156.

[F-W] W. H. FUCHS et E. M. WRIGHT, *The "easier" Waring problem*, Quart. J. Math. Oxford **10** (1939), 190-209.

[H] L. HABSIEGER, *Applications of Group Representation Theory to the easier Waring Problem*, prépublication.

[Hu] L.-K. HUA, *on Tarry's problem*, Quart. J. Math. Oxford **9** (1938), 315-320.

[H-W] G. H. HARDY et E.M. WRIGHT, *An Introduction to the Theory of Numbers*, 5^{th} edition, Oxford University Press, London, New-York.

[K] A.A. KARATSUBA, *The function $G(n)$ in Waring's problem*, Izv. Akad. Nauk. SSSR Ser. Math. **49** (1985), 935-947, n° 5.

[L] A. LÉTAC, Gazeta Matematica **48** (1942), 68-69.

[L-P] C.J. LANDER et T.R. PARKIN, *A counterexample to Euler's sum of powers conjecture*, Math. Comp. **21** (1967), 101-103.

[R] K.S. RAO, *Representation of every number as a sum of rational $k-th$ powers*, J. London Math. Soc. **13** (1938), 14-16.

[T] TARRY, *L'intermédiaire des mathématiciens*, **20** (1913), 68-70.

[V] L.N. VASERSTEIN, *Every Integer is a Sum or Difference of 28 Integral Eight Powers*, Journal of Number Theory **28** (1988), 66-68.

[W] E.M. WRIGHT, *An easier Waring problem*, J. London Math. Soc. **9** (1934), 267-272.

Centre de Recherche en Mathématiques de Bordeaux
Université Bordeaux I
C.N.R.S. U.R.A. 226
U.F.R. de Mathématiques
351, cours de la Libération
33405 Talence Cedex, FRANCE.