JOURNAL DE THÉORIE DES NOMBRES DE BORDEAUX

QING LIU

Sur les espaces de Stein quasi-compacts en géométrie rigide

Journal de Théorie des Nombres de Bordeaux 2e série, tome 1, nº 1 (1989), p. 51-58

<http://www.numdam.org/item?id=JTNB_1989__1_1_51_0>

Séminaire de Théorie des Nombres,
Bordeaux, **1**, *51–58 (1989)*

Sur les espaces de Stein quasi-compacts en géométrie rigide

par QING LIU

Résumé— On étudie les espaces de Stein quasi-compacts X (i.e. vérifiant $H^q(X, \mathcal{F}) = 0$ pour tout $q \geq 1$ et tout faisceau cohérent $\mathcal{F}$ sur X). On établit un critère simple pour qu'un espace soit de Stein et on en déduit quelques conséquences.

Abstract — *We study the quasi-compact Stein spaces X (i.e. such that $H^q(X, \mathcal{F}) = 0$ for all $q \geq 1$, and all coherent sheaves $\mathcal{F}$ on X). A criterion for a space to be Stein is established and some consequences are deduced.*

Dans [L] nous avons posé (et répondu à) la question suivante : Soit X un espace analytique rigide séparé, quasi-compact (i.e. qui admet un recouvrement admissible affinoïde fini) tel que $H^q(X, \mathcal{F}) = 0$ pour tout $q \geq 1$ et pour tout faisceau cohérent $\mathcal{F}$ sur X. Alors X est-il un espace affinoïde ?

Rappelons qu'en géométrie analytique complexe, cette condition de nullité des groupes de cohomologie caractérise les espaces de Stein [S1]. En géométrie algébrique, un schéma noethérien vérifiant le même type de condition est affine d'après le critère de Serre [S2]. Par contre, l'analogue de ce critère en géométrie analytique rigide est faux [L] c'est-à-dire que la question ci- dessus a une réponse négative. Cela montre que la classe des espaces de Stein quasi–compacts (cf. déf.1) est strictement plus grande que celle des espaces affinoïdes. Les questions suivantes paraissent naturelles.

a) Soient X un espace de Stein quasi–compact, U une partie rationnelle de X (cf. déf.2). Alors U est-il un espace de Stein ?

b) Soient X, Y deux espaces de Stein quasi-compacts sur K. L'espace $X \times_{SpK} Y$ est-il de Stein ?

Notons que le contre-exemple construit dans [L] est un espace ayant deux composantes irréductibles qui se rencontrent, c'est donc un espace singulier.

c) Existe-t-il un espace de Stein quasi-compact régulier qui ne soit pas affinoïde ?

Manuscrit reçu le 28 mars 1989

Le but de cet exposé est de montrer que les questions a,b,c admettent des réponses positives (cf. cor. 1 et 2 du th. 2 et le th. 3). Le résultat clé est le théorème 2 qui est un critère simple pour qu'un espace soit de Stein. On trouvera un développement détaillé du présent article dans [L'].

Dans tout cet exposé, K désigne un corps complet pour une valeur absolue ultramétrique non triviale. Les espaces analytiques rigides sont définis sur K.

DÉFINITION 1. *Un espace de Stein quasi-compact est un espace analytique rigide quasi-compact séparé X tel que $H^q(X,\mathcal{F}) = 0$ pour tout $q \geq 1$ et pour tout faisceau cohérent $\mathcal{F}$ sur X.*

D'après un théorème de Tate-Kiehl [K], les espaces affinoïdes sont des espaces de Stein quasi-compacts.

PROPOSITION 1. *Soient X un espace de Stein quasi–compact, $A = \mathcal{O}_X(X)$. Alors on a les propriétés suivantes :*

1) Tout fermé analytique de X est de Stein.

2) L'anneau A est noethérien.

3) Pour tout ouvert affinoïde R de X, l'homomorphisme canonique $A \to \mathcal{O}_X(R)$ est plat.

4) La correspondance $\mathcal{F} \rightsquigarrow \Gamma(X,\mathcal{F})$ est une équivalence entre la catégorie des faisceaux cohérents sur X et la catégorie des A-modules de type fini.

5) Pour tout $x \in X$, on note $\alpha(x)$ l'image réciproque de l'idéal maximal de $\mathcal{O}_{X,x}$ par l'homomorphisme canonique $A \to \mathcal{O}_{X,x}$. Alors α définit une bijection $X \to \max A$ de X sur l'ensemble des idéaux maximaux de A, et l'homomorphisme canonique $\hat{A}_{\alpha(x)} \to \hat{\mathcal{O}}_{X,x}$ est un isomorphisme (où $\hat{}$ signifie complété formel relatif à l'idéal maximal).

DÉFINITION 2. Soit X un espace analytique rigide quasi-compact. On appelle *partie rationnelle de X* tout ouvert analytique U de X de la forme

$$U = \{x \in X \mid |f_i(x)| \leq |f_0(x)|,\ 0 \leq i \leq n\}$$

où $f_0, \cdots, f_n \in \mathcal{O}_X(X)$ engendrent l'idéal unité.

Notons que d'un certain point de vue, la notion de parties rationnelles correspond à celle de parties holomorphiquement convexes en géométrie analytique complexe et à celle d'ouverts principaux en géométrie algébrique.

DÉFINITION 3. On dit qu'un espace analytique rigide quasi-compact séparé X est un S-*espace* s'il est holomorphiquement séparable (i.e. pour tout $x \neq y$ dans X, il existe $f \in \mathcal{O}_X(X)$ tel que $f(x) = 0$ et $f(y) = 1$) et si $H^q(X, \mathcal{O}_X) = 0$ pour tout $q \geq 1$. Ainsi tout espace de Stein quasi-compact est un S-espace.

Remarque. La terminologie de S-espace est tout à fait provisoire, car on verra que ce sont exactement les espaces de Stein quasi–compacts (théorème 2).

PROPOSITION 2. *Soient X un S-espace, $A = \mathcal{O}_X(X), f_0, \cdots, f_n \in A$ tels que $\sum_{0 \leq i \leq n} f_i A = A$. Alors la partie rationnelle*

$$U = \{x \in X |\ |f_i(x)|\ \leq |f_0(x)|,\ 0 \leq i \leq n\}$$

est un S-espace et l'homomorphisme

$$\phi : A < T_1 \cdots, T_n > \ / \ (T_i\ f_0 - f_i)_{1 \leq i \leq n}\ \to\ \mathcal{O}_X(U)$$

défini par $\phi(T_i) = f_i|_U\ (f_0|_U)^{-1}$ est un isomorphisme de K-algèbres de Banach.

PREUVE: Restreignons-nous au cas où $U = \{x \in X |\ |f(x)| \leq 1\} (f \in A)$. Soit $Z = X \times_{SpK} \mathbf{B}^1_K$, où $\mathbf{B}^1_K = Spm\ K < T >$. Alors U est isomorphe au fermé analytique $V((T - f)\mathcal{O}_Z)$ de Z. On a la suite exacte

$$0 \to (T - f)\mathcal{O}_Z \to \mathcal{O}_Z \to \mathcal{O}_{V((T-f)\mathcal{O}_Z)} \to 0$$

Donc pour tout $q \geq 1$, on a la suite exacte

$$H^q(Z, \mathcal{O}_Z) \to H^q(U, \mathcal{O}_X|_U) \to H^{q+1}(Z, (T - f)\mathcal{O}_Z),$$

Comme l'homomorphisme $\mathcal{O}_Z \overset{\bullet(T-f)}{\longrightarrow} (T - f)\mathcal{O}_Z$ est bijectif, on a

$$H^q(Z, (T - f)\mathcal{O}_Z) \approx H^q(Z, \mathcal{O}_Z) = 0$$

pour tout $q \geq 1$ car $H^q(X, \mathcal{O}_X) = 0$. Il suit que $H^q(U, \mathcal{O}_X|_U) = 0$. Comme U est un ouvert analytique de X, donc holomorphiquement séparable, c'est bien un S-espace. Enfin la suite exacte

$$0 \to (T - f)\mathcal{O}_Z(Z) \to \mathcal{O}_Z(Z) \to \mathcal{O}_X(U) \to H^1(Z, (T - f)\mathcal{O}_Z) = 0$$

donne l'isomorphisme

$$A < T > /(T - f) \xrightarrow{\sim} \mathcal{O}_X(U)$$

puisque $\mathcal{O}_Z(Z) = A < T >$.

Le théorème suivant est une généralisation du théorème de Gerritzen et Grauert [G,G].

THÉORÈME 1. *Soient X un S-espace, R un espace affinoïde, $f : R \to X$ une immersion injective. Alors il existe un recouvrement de X par un nombre fini de parties rationnelles X_i telles que l'homomorphisme $\mathcal{O}_X(X_i) \to \mathcal{O}_R(f^{-1}(X_i))$ induit par f soit dense pour tout i.*

COROLLAIRE 1. *Soit X un S-espace. Alors X admet un recouvrement admissible par un nombre fini de parties rationnelles affinoïdes.*

COROLLAIRE 2. *Soient X un espace de Stein quasi-compact, Y un espace analytique rigide. Alors l'application canonique*

$$Mor(Y,X) \to Hom_{K-alg}(\mathcal{O}_X(X), \mathcal{O}_Y(Y))$$

est bijective. En particulier deux espaces de Stein quasi-compacts X_1, X_2 sont isomorphes si et seulement si $\mathcal{O}_{X_1}(X_1)$ et $\mathcal{O}_{X_2}(X_2)$ sont isomorphes.

PROPOSITION 3. *Soient X un espace de Stein quasi-compact. Alors il existe un espace affinoïde R et une immersion injective $f : X \to R$ (i.e. f injective et $f^{\#}_x : \mathcal{O}_{R,f(x)} \to \mathcal{O}_{X,x}$ surjectif pour tout $x \in X$.)*

PREUVE: Supposons pour simplifier qu'il existe $f \in A = \mathcal{O}_X(X)$ tel que $U := \{x \in X \mid |f(x)| \leq 1\}$ et $V := \{x \in X \mid |f(x)| \geq 1\}$ soient affinoïdes. Il existe donc $a_1, ..., a_n, b_1, ..., b_n \in A$ et $N \geq 1$ tels que

$$\mathcal{O}_X(U) = A < a_1, ..., a_n > \text{ et } \mathcal{O}_X(V) = A < b_1 f^{-N}, ..., b_n f^{-N} > .$$

Quitte à remplacer f par f^N, on peut supposer $N = 1$.

Soit $\lambda \in K$ tel que $|a_i(x)| \leq |\lambda|$, $|b_i(x)| \leq |\lambda|$, et $|f(x)| \leq |\lambda|$ pour tout $i \leq n$ et pour tout $x \in X$, soit

$$\phi : B := K < T_1, ..., T_n, S_1, ..., S_n, Z > \to A.$$

l'homomorphisme défini par $\phi(T_i) = \lambda^{-1} a_i$, $\phi(S_i) = \lambda^{-1} b_i$, $\phi(Z) = \lambda^{-1} f$. Il est clair que les homomorphismes induits par ϕ

$$B < \lambda Z > \to \mathcal{O}_X(U)$$

et

$$B < \frac{1}{\lambda Z} > \to \mathcal{O}_X(V)$$

sont denses. Donc ϕ induit une immersion injective de X dans $SpmB$.

THÉORÈME 2. *Soit X un espace analytique rigide quasi-compact et séparé. Alors X est un espace de Stein si et seulement s'il est holomorphiquement séparable et vérifie $H^q(X, \mathcal{O}_X) = 0$ pour tout $q \geq 1$.*

COROLLAIRE 1. *Soient X, Y deux espaces de Stein quasi-compacts. Alors $X \times_{SpK} Y$ est de Stein.*

PREUVE: α) Supposons d'abord Y affinoïde. Soit $\{X_i\}_i$ un recouvrement admissible affinoïde fini de X. Alors le complexe de Čech alterné $C_a^\bullet(\{X_i\}_i, \mathcal{O}_X)$:

$$0 \to \mathcal{O}_X(X) \to \bigoplus_i \mathcal{O}_X(X_i) \to \bigoplus_{i<j} \mathcal{O}_X(X_i \cap X_j) \to \cdots$$

est exact. Donc

$$C_a^\bullet(\{X_i \times Y\}_i, \mathcal{O}_{X\times Y}) = C_a^\bullet(\{X_i\}, \mathcal{O}_X)\hat{\otimes}_K \mathcal{O}_Y(Y)$$

est exact. D'autre part $X \times Y$ est clairement holomorphiquement séparable. Il suit du théorème 2 que $X \times Y$ est de Stein.

β) Cas général. Le même raisonnement que ci-dessus montre que $\check{H}^q(\{X_i \times Y\}_i, \mathcal{O}_{X\times Y}) = 0$ pour tout $q \geq 1$. D'après α), toute intersection finie de $X_i \times Y$ est de Stein, donc $H^q(X \times Y, \mathcal{O}_{X\times Y}) = 0$ pour tout $q \geq 1$. Ce qui montre le résultat.

COROLLAIRE 2. *Soit X un espace de Stein quasi-compact. Alors toute partie rationnelle U de X est de Stein.*

PREUVE: En effet U est isomorphe à un fermé analytique de $X \times_{SpK} \mathbf{B}_K^n$ pour un certain $n \geq 1$. Or $X \times_{SpK} \mathbf{B}_K^n$ est de Stein d'après le corollaire précédent. Donc U est de Stein.

COROLLAIRE 3. *Soient Ω un espace analytique rigide séparé, U, V deux ouverts analytiques quasi-compacts de Ω qui sont de Stein. Alors $U \cap V$ est un espace de Stein.*

PREUVE: Le morphisme diagonal $\Omega \to \Omega \times_{SpK} \Omega$ induit une immersion fermée $U \cap V \to U \times_{SpK} V$.

PROPOSITION 4. *Soient X, Y, Z trois espaces de Stein quasi-compacts munis de deux morphismes $X \to Z$, $Y \to Z$. On note $W = X \times_Z Y$, $A =$*

$\mathcal{O}_X(X)$, $B = \mathcal{O}_Y(Y)$, $C = \mathcal{O}_Z(Z)$. Alors W est de Stein et l'homomorphisme canonique $A\hat{\otimes}_C B \to \mathcal{O}_W(W)$ est un isomorphisme ($A\hat{\otimes}_C B$ est le séparé complété de $A \otimes_C B$ pour la semi-norme tensorielle).

COROLLAIRE. *Soit $f : X \to Z$ un morphisme d'espaces de Stein quasi-compacts. Alors pour tout ouvert analytique quasi-compact Y de Z qui est de Stein, $f^{-1}(Y)$ est un espace de Stein quasi-compact et on a*

$$\mathcal{O}_X(X)\hat{\otimes}_{\mathcal{O}_Z(Z)}\mathcal{O}_Z(Y) \xrightarrow{\sim} \mathcal{O}_X(f^{-1}(Y)).$$

PREUVE: On a $f^{-1}(Y) = X \times_Z Y$.

LEMME. *Soit k un corps commutatif. Alors il existe un polynôme non constant $q(T) \in k[T]$ tel que $k[T^2] \cap k[q(T)] = k$.*

PREUVE: On peut prendre $q(T) = T^2 + T$ si $car K = 0$, $q(T) = T^3 + T^2$ si $car K = 2$ et $q(T) = T^p + T^2$ si $car K = p > 2$.

THÉORÈME 3. *Soit K un corps complet pour une valeur absolue ultramétrique non triviale. Alors il existe un espace de Stein quasi- compact X, ouvert analytique de $\mathbb{B}^2_K$, qui n'est pas affinoïde.*

PREUVE: Soient k le corps résiduel de $K, Q(T) \in K^\circ[T]$ un polynôme unitaire dont l'image canonique dans $k[T]$ est un polynôme $q(T)$ défini dans le lemme ci-dessus. On fixe $\pi \in K^{\circ\circ} - \{0\}$ et on pose

$$A = K < T, U, V > /(UV - \pi^{-2}T^2V - \pi),$$
$$B = K < T, W, Z > /(WZ - Q(\pi^{-1}T)Z - \pi),$$

et $X_1 = SpmA$, $X_2 = SpmB$. On note t, u, v les images respectives de T, U, V dans A, t, w, z les images respectives de T, W, Z dans B. On a $A < v^{-1} >= K < \pi^{-1}t, v, v^{-1} >$ et $B < z^{-1} >= K < \pi^{-1}t, z, z^{-1} >$. On a donc un isomorphisme de $A < v^{-1} >$ sur $B < z^{-1} >$ qui envoie v sur z^{-1}. Cet isomorphisme permet de définir X comme l'espace obtenu par le recollement de X_1 et X_2 sur $Spm(A < v^{-1} >) \xrightarrow{\sim} Spm(B < z^{-1} >)$.

Soit d le degré de $Q(T)$. Considérons les homomorphismes

$$\phi_1 : K < T, S > \to A, \ \phi_2 : K < T, S > \to B$$

définis par $\phi_1(T) = t$, $\phi_1(S) = \pi^{d+1}v$, $\phi_2(T) = t$, $\phi_2(S) = \pi^d w - \pi^d Q(\pi^{-1}t) = \pi^{d+1}z^{-1}$. Alors ϕ_1 et ϕ_2 induisent une immersion ouverte de X dans $\mathbb{B}^2_K$. En particulier X est holomorphiquement séparable.

On montre que $\pi H^1(\{X_1, X_2\}, \mathcal{O}_X^\circ) = 0$. Donc $H^1(X, \mathcal{O}_X) = 0$. D'autre part $H^q(X, \mathcal{O}_X) = \check{H}^q(\{X_1, X_2\}, \mathcal{O}_X) = 0$ pour tout $q \geq 2$. Par conséquent, X est un espace de Stein d'après le théorème 2.

Supposons X affinoïde. Alors en utilisant les égalités

$$k[T^2] \cap k[q(T)] = k \text{ et } k[T] = k[T^2] + Tk[T^2]$$

on montre que l'image de $\overline{\mathcal{O}_X(X)}$ dans $\overline{B}$ est égale à $k + \bar{t}k[\bar{t}, \overline{w}]$ qui n'est pas un anneau noethérien. Ce qui est impossible. Donc X n'est pas affinoïde.

COROLLAIRE. *Il existe un ouvert analytique quasi-compact X de $\mathbf{B}_K^2$ tel que $\mathcal{O}_{\mathbf{B}_K^2}(X)$ ne soit pas une K-algèbre affinoïde.*

PREUVE: Prenons l'espace X construit dans le théorème ci-dessus. Alors d'après le corollaire 2 du théorème 1, $\mathcal{O}_{\mathbf{B}_K^2}(X)$ n'est pas une K-algèbre affinoïde.

Remarque. D'après un théorème de Zariski [Z], pour toute surface algébrique normale X sur un corps K, $\mathcal{O}_X(X)$ est une K-algèbre de type fini. Le corollaire ci-dessus montre que l'analogue de ce théorème est faux en géométrie rigide.

BIBLIOGRAPHIE

[B,G,R] S. BOSCH, U. GÜNTZER et R. REMMERT, *Non-archimedian analysis,*, Grundl. der math., **261** (1984).

[F] J. FRESNEL, *Cours de géométrie analytique rigide*, polycopié Université de Bordeaux I (1984).

[F,P] J. FRESNEL et M. van der PUT, *Géométrie analytique rigide et applications*, Progress in math **18** (1981). Birkhaüser

[G,G] L. GERRITZEN et H. GRAUERT, *Die Azyklizität der affinoïden Überdeckungen*, Global analysis, Papers in honor of K. Kodaira (1969), 159–184.. University of Tokyo Press, Princeton University Press

[K] R. KIEHL, *Theorem A and Theorem B in der nichtarchimedischen Funktionentheorie*, Inv. Math. **2** (1967), 256–273.

[L] Q. LIU, *Un contre-exemple au "critère cohomologique d'affinoïdicité",*, C.R. Acad. Sci. Paris (1988), 83–86.

[L'] Q. LIU, *Sur les espaces de Stein quasi-compacts en géométrie rigide,*. à paraître dans Tôhoku math. Journal.

[S1] J-P. SERRE, *Applications de la théorie générale à divers problèmes globaux*, Séminaire Cartan (1951–1952). exposé n° 20

[S2] J-P. SERRE, *Sur la cohomologie des variétés algébriques*, J. Math. Pures et Appl., **36** (1957), 1–16.

[Z] O. ZARISKI *Interprétations algébrico-géométriques du quatorzième problème de Hilbert*, Collected papers II (1973). ed. M. Artin and D. Mumford, M.I.T. Press

Mots clefs : affinoïde, quasi-compact, Stein

1980 *Mathematics subject classifications*: 14G20.

Université de Bordeaux I
CNRS, U.A. 226
U.F.R. de Mathématiques
351, cours de la Libération
33405 Talence FRANCE.