

M. MENDÈS FRANCE

## Sur certains produits infinis

*Journal de Théorie des Nombres de Bordeaux* 2<sup>e</sup> série, tome 1, n° 1 (1989),  
p. 157-162

[http://www.numdam.org/item?id=JTNB\\_1989\\_\\_1\\_1\\_157\\_0](http://www.numdam.org/item?id=JTNB_1989__1_1_157_0)

© Université Bordeaux 1, 1989, tous droits réservés.

L'accès aux archives de la revue « Journal de Théorie des Nombres de Bordeaux » (<http://jtnb.cedram.org/>) implique l'accord avec les conditions générales d'utilisation (<http://www.numdam.org/conditions>). Toute utilisation commerciale ou impression systématique est constitutive d'une infraction pénale. Toute copie ou impression de ce fichier doit contenir la présente mention de copyright.

NUMDAM

Article numérisé dans le cadre du programme  
Numérisation de documents anciens mathématiques

<http://www.numdam.org/>

## Sur certains produits infinis

par M. MENDÈS FRANCE

Ceci est un résumé d'un article à paraître écrit conjointement avec A. van der Poorten [1].

On considère le système dynamique plan

$$\begin{cases} x_{n+1} = F(x_n, y_n), & x_0 = x \\ y_{n+1} = G(x_n, y_n), & y_0 = 1 \end{cases}$$

où  $F$  et  $G$  sont deux fonctions homogènes de degré 1. On se propose d'étudier le point limite (s'il existe) quand  $n$  tend vers l'infini.

On pose

$$\phi(t) = \frac{F(x, y)}{G(x, y)} = \frac{F(t, 1)}{G(t, 1)}, (t = \frac{x}{y}).$$

Soit  $\phi^\nu$  la  $\nu^e$  itérée de  $\phi$ . Alors

$$\frac{x_{n+1}}{y_{n+1}} = \phi\left(\frac{x_n}{y_n}\right) = \dots = \phi^{n+1}(x).$$

Par ailleurs,

$$x_{n+1} = x_n F\left(1, \frac{y_n}{x_n}\right) = F\left(1, \frac{y_{n-1}}{x_{n-1}}\right) F\left(1, \frac{y_n}{x_n}\right) x_{n-1} = x \prod_{k=0}^n F\left(1, \frac{1}{\phi^k(x)}\right).$$

De même

$$y_{n+1} = \prod_{k=0}^n G(\phi^k(x), 1).$$

Supposons que pour  $n$  infini, ces produits convergent ou du moins tendent vers des limites finies ou infinies :

$$x_\infty = x \prod_{n=0}^{\infty} F\left(1, \frac{1}{\phi^n(x)}\right)$$

$$y_\infty = \prod_{n=0}^{\infty} G(\phi^n(x), 1).$$

Il s'agit de donner -si possible- une expression "fermée" de ces produits.

Admettons -tout le problème est là- qu'on connaisse une "intégrale première"  $V$  du système dynamique, c'est-à-dire un invariant

$$V(F(x, y), G(x, y)) = V(x, y).$$

Dès lors

$$V(x_{n+1}, y_{n+1}) = V(x_n, y_n)$$

et sous réserve de continuité,

$$V(x_\infty, y_\infty) = V(x, 1).$$

Si donc  $x_\infty$  (*resp.*  $y_\infty$ ) est connu, alors  $y_\infty$  (*resp.*  $x_\infty$ ) s'en déduit.

On a utilisé ce principe pour retrouver tous les produits infinis contenus dans deux très jolis articles d'A. Ostrowski [2],[3]. Dans ce résumé, on se contente d'en citer deux.

#### *Exemple 1 (Euler)*

En choisissant

$$\begin{cases} F(x, y) = \frac{x^2}{x+y} \\ G(x, y) = \frac{y^2}{x+y} \end{cases}$$

On trouve

$$\phi(t) = t^2, \quad V(x, y) = x - y$$

d'où on déduit

$$\prod_{n=0}^{\infty} (1 + x^{2^n}) = \frac{1}{1-x}, \quad |x| < 1$$

*Exemple 2*

On considère

$$\begin{cases} F(x, y) = \frac{(x + y)(2y^2 - x^2)}{xy} \\ G(x, y) = \frac{x + y}{x}y \end{cases}$$

On obtient

$$\phi(t) = 2 - t^2.$$

Avec un peu de patience, on découvre que

$$V(x, y) = y^2 \frac{x^2 - 4y^2}{(x - y)^2}.$$

Pour  $|x| > 2$ , on a  $x_\infty = \infty$  d'où on déduit

$$\prod_{n=0}^{\infty} \left(1 + \frac{1}{\phi^n(x)}\right) = \frac{\sqrt{x^2 - 4}}{|x - 1|}, \quad |x| \geq 2.$$

L'an dernier j'exposais ces résultats à Oberwolfach. A. Schinzel qui était présent s'est souvenu que le produit ci-dessus intervient de façon inattendue dans un problème d'arithmétique qu'il avait étudié vingt ans auparavant [4].

Soit  $q(m)$  le plus grand facteur premier de l'entier  $m$ . Soit  $f \in \mathbf{Z}[X]$  un polynôme de degré  $\nu \geq 2$ . Schinzel montrait que

$$\liminf_{n \rightarrow \infty} \frac{\log q(f(n))}{\log |f(n)|} \leq \begin{cases} \frac{1}{2}P(4) & \text{si } \nu = 2 \\ \frac{1}{2}P(6) & \text{si } \nu = 3 \\ P(\nu) & \text{si } \nu \geq 4 \end{cases}$$

$P(\nu)$  désigne le produit infini

$$P(\nu) = \prod_{n=0}^{\infty} \left(1 - \frac{1}{u_n}\right)$$

où  $u_0 = \nu - 1$  et  $u_{n+1} = u_n^2 - 2$ . En posant  $v_n = -u_n$ , on trouve, à des notations près le produit de l'exemple 2. Ainsi

$$P(\nu) = \frac{\sqrt{(\nu + 1)(\nu - 3)}}{\nu}, \quad \nu \geq 3.$$

Pour terminer cette étude, citons un résultat qui étend légèrement un théorème d'Ostrowski.

**THÉORÈME.** *Soit  $\phi$  une fonction rationnelle sur un sous corps  $k \subset \mathbb{C}$ . Supposons que dans un domaine  $D \subset \mathbb{C}$ ,  $\phi^n(x)$  tend vers une limite  $\ell$  indépendante de  $x$ . Soit  $H$  une application continue définie dans  $D$ . Si le produit*

$$y(x) = \prod_{n=0}^{\infty} H(\phi^n(x))$$

*converge dans  $D$  et est algébrique de degré  $r$ , alors  $y(x)$  est la racine  $r^e$  d'une fonction rationnelle.*

**PREUVE:** Par hypothèse  $y = y(x)$  est solution d'une équation polynomiale de degré  $r$  (minimal)

$$y^r + a_{r-1}(x)y^{r-1} + \dots + a_0(x) = 0$$

où les  $a_j(x)$  sont dans  $k(x)$ . On a aussi

$$y^r(\phi) + a_{r-1}(\phi)y^{r-1}(\phi) + \dots + a_0(\phi) = 0.$$

Or

$$y(\phi) = \prod_{n=0}^{\infty} H(\phi^{n+1}(x)) = \frac{y(x)}{H(x)}$$

donc

$$y^r(x) + H(x)a_{r-1}(\phi)y^{r-1}(x) + \dots + H^r(x)a_0(\phi) = 0.$$

Le polynôme minimal étant unique, on en déduit

$$\begin{aligned} a_0(x) &= H^r(x)a_0(\phi) \\ &= H^r(x)H^r(\phi)\dots H^r(\phi^{n-1})a_0(\phi^n) \end{aligned}$$

d'où

$$\begin{aligned} a_0(x) &= y^r(x) \lim_{n \rightarrow \infty} a_0(\phi^n) \\ &= y^r(x) \cdot a_0(\ell) \end{aligned}$$

Bref

$$y^r(x) = \frac{a_0(x)}{a_0(\ell)}.$$

Ceci implique  $a_0(\ell) = -1$  et  $y(x) = (-a_0(x))^{\frac{1}{r}}$ . CQFD

*Remarque* : La condition " $\phi^n(x) \rightarrow \ell$ " peut être remplacée par " $H$  inversible". En effet, la convergence du produit infini implique

$$H(\phi_n(x)) \rightarrow 1 \text{ d'où } \phi^n(x) \rightarrow H^{-1}(1).$$

*Apostille* : J. Fresnel me signale que les seules courbes  $V(x, y) = \text{const.}$  intéressantes dans notre contexte sont de genre zéro.

## RÉFÉRENCES

- [1] M. Mendès France, A. Van der POORTEN, *From geometry to Euler identities*. (à paraître).
- [2] A. Ostrowski, *Sur quelques généralisations du produit d'Euler*  $\prod_{\nu=0}^{\infty} (1+x^{2^\nu})$ , CRAS Paris, séance du 23 janvier 1930. (in *Collected Math. Papers*, vol. 3, Birkhauser, 1984).
- [3] A. Ostrowski, *Über einige Verallgemeinerungen des Eulerschen Produktes*  $\prod_{\nu=0}^{\infty} (1+x^{2^\nu}) = \frac{1}{1-x}$ , Verh. Naturf. Ges. Basel 11, 1929, 153–214 (in *Collected Mathematical Papers*, vol. 3, Birkhauser 1984).

- [4] A. Schinzel, *On two theorems of Gelfond and some of their applications*, Acta Arith. **13** (1967), 177–236.

*Mots clefs* : Produits infinis, systèmes dynamiques

1980 *Mathematics subject classifications*: 11D23, 12D99.

Université Bordeaux I  
351, cours de la Libération  
33405 Talence FRANCE.