Journal de la société statistique de Paris

Jean-Claude Augros

Évaluation probabiliste des options : introduction à l'univers forward-neutre

Journal de la société statistique de Paris, tome 139, nº 3 (1998), p. 5-39
<http://www.numdam.org/item?id=JSFS_1998__139_3_5_0>

ÉVALUATION PROBABILISTE DES OPTIONS : INTRODUCTION À L'UNIVERS *FORWARD*-NEUTRE

Jean-Claude AUGROS

Université Claude Bernard Lyon 1
et Institut de Science Financière et d'Assurances (ISFA) [1]

Résumé

Évaluation probabiliste des options : introduction à l'univers *forward*-neutre. Cet article, à vocation essentiellement pédagogique, vise à présenter en termes simples et intuitifs l'univers *forward*-neutre et à mettre en évidence son intérêt pour l'évaluation des options en présence de taux d'intérêt stochastiques.

Dans une première étape, l'article rappelle comment, selon l'approche probabiliste désormais classique, la valeur présente d'une option peut s'interpréter, dans l'univers risque neutre, comme sa valeur finale espérée, actualisée au taux sans risque.

Puis, dans une deuxième étape, cet article révèle, au travers de l'évaluation en temps discret d'une option sur contrat *forward*, l'existence de la probabilité *forward*-neutre sous laquelle le processus des prix *forward* est une martingale.

Enfin, dans une troisième étape, cet article montre comment il est possible, grâce à l'univers *forward*-neutre, de redémontrer, en temps continu, la formule de Merton d'évaluation d'une option sur action en présence de taux stochastiques, ce résultat pouvant facilement être étendu au cas d'une option sur obligation en présence d'une structure de volatilité des obligations déterministe.

Mots clés : probabilité *forward*-neutre, option sur actions et sur taux.

Abstract

Probabilistic option valuation : introduction to forward-neutral world. The aim of this comprehensive paper is to present the forward-neutral world and highlight its interest in option pricing with stochastic interest rates.

Firstly, the article points out that by using the classical probabilistic approach, in the risk-neutral world, the present value of an option can be read as its final expected value discounted with risk-free interest.

1. Campus de la Doua, bât. 101, 43, bd. du 11 novembre 1918, 69622 Villeurbanne cedex. Tél : 04.72.43.11.75. Fax : 04.72.43.11.76. e-mail : isfa@cismsun.univ-lyon1.fr

Secondly, through the valuation of an option on forward contract, this article reveals the existence of a forward-neutral probability such that the forward prices process forms a martingale.

Finally, this paper shows, thanks to forward-neutral world, how it is possible, in continuous time, to redemonstrate Merton's formula of stock option pricing in the presence of stochastic interest rates; this result can be extended to the case of an option on bonds with a deterministic bond volatility structure.

Keywords : forward-neutral probability, option on share with stochastic interest rate.

Codification au *Journal of Economic Literature* : G 13.

Les pionniers de la recherche sur les options ont d'abord cherché à fournir aux financiers des méthodes d'évaluation de ces produits ainsi que des outils de gestion et de couverture. Depuis les travaux initiaux de BACHELIER (1900) jusqu'à ceux de BLACK et SCHOLES (1973) et MERTON (1973), près de trois quarts de siècle ont été nécessaires pour satisfaire ce premier objectif. Le développement considérable et simultané des marchés d'options pourrait justifier, à lui seul, le bien-fondé de cet investissement scientifique. En réalité, les applications de ces recherches dépassent très largement le cadre strict des marchés d'options. Désormais, la culture optionnelle s'avère utile dans presque tous les domaines de la finance : analyse des actifs financiers à caractère optionnel, bien sûr, (convertibles, bons, options de remboursement anticipé...), mais aussi finance d'entreprise, choix d'investissement, évaluation d'entreprises, gestion des risques, gestion de bilan,... La lecture «optionnelle» du bilan d'une firme a ainsi été introduite dans le secteur bancaire, puis, plus récemment, dans celui de l'assurance (BRIYS et de VARENNE (1993) et ALBIZZATI (1996)). Il est vrai que le bilan des entreprises de ces deux secteurs économiques recèle de très nombreuses options cachées dont les fluctuations de valeur, induites par les variations des taux d'intérêt, des taux de change, des prix de l'immobilier ..., sont susceptibles de mettre en péril leur équilibre financier.

Dans ces conditions, les principaux modèles d'évaluation d'options occupent désormais une place importante dans la «boîte à outils» couramment utilisée par les financiers d'entreprises.

L'objet de cet article est de donner un aperçu de cette panoplie de modèles, tout en se référant aux concepts les plus marquants de la théorie financière moderne, en l'occurrence ceux relevant de l'approche probabiliste de l'évaluation des actifs financiers.

Cette approche a connu, en effet, un développement important depuis les travaux fondamentaux de HARRISON et KREPS (1979) et HARRISON et PLISKA (1982). En présence de marchés complets et en l'absence d'opportunité d'arbitrage, le processus du prix de n'importe quel actif peut s'interpréter, selon cette approche, comme une martingale [1] dans un univers de probabilité particulier. Ainsi, sous la probabilité «risque-neutre», le prix d'une option est égal à l'espérance de sa valeur finale actualisée au taux sans risque. Le recours à l'univers risque-neutre peut, toutefois, s'avérer insuffisant pour évaluer une option dans certaines conditions particulières. Notamment, en présence de taux d'intérêt stochastiques, il est nécessaire de recourir à un nouvel univers de probabilité, qualifié cette fois-ci de «*forward*-neutre», dans lequel, pour une échéance donnée, le processus du prix *forward* d'un actif est une martingale. Cette approche probabiliste de l'évaluation des actifs financiers nécessite le recours à des outils mathématiques complexes qui seront simplement évoqués ici. Il est possible, en revanche, avec des arguments simples, de révéler ces lois de probabilités cachées sous lesquelles les prix des actifs peuvent être obtenus par un calcul d'espérance.

Nous envisageons, dans cet article, de montrer comment le recours successif à ces deux univers de probabilité facilite l'obtention d'une formule d'évaluation d'options. Après avoir rappelé, dans une première section, le résultat majeur obtenu par BLACK et SCHOLES dans leur modèle pionnier d'évaluation d'une option sur action en présence de taux d'intérêt non stochastiques, nous introduisons, dans une deuxième section, consacrée à l'évaluation d'une option sur contrat à terme, le concept de probabilité *forward*-neutre : dans un soucis pédagogique, l'univers *forward* neutre est présenté, dans un cadre discret, à l'aide d'arguments financiers. Enfin, dans une troisième section, nous utilisons ce concept pour évaluer, en temps continu et en présence de taux d'intérêt stochastiques, une option portant sur une action ou sur une obligation.

I. ÉVALUATION D'UNE OPTION SUR UN ACTIF AU COMPTANT

I.1 Le modèle originel de Black et Scholes (BS 1973)

Ce modèle a pour objectif d'évaluer une option européenne sur action en l'absence de distribution de dividende. L'hypothèse principale est que le cours, $S(t)$ ou S, de l'action sous-jacente suit un mouvement brownien géométrique défini par l'équation différentielle stochastique (EDS) suivante :

$$\frac{\mathrm{d}S}{S} = \mu \cdot \mathrm{d}t + \sigma \cdot \mathrm{d}Z,$$

où μ et σ sont des constantes représentant respectivement l'espérance et l'écart-type du rendement instantané de l'action, $Z(t)$ ou Z étant un processus de Wiener standard sous la probabilité historique, ou réelle, Π.

Le raisonnement d'arbitrage retenu par BLACK et SCHOLES consiste à associer judicieusement une position sur l'option et une position sur le sous-jacent de manière à éliminer le risque du portefeuille résultant[2]. En l'absence

1. Les notes 1 à 23 renvoient à l'annexe qui détaille les aspects plus mathématiques.

d'opportunité d'arbitrage, le rendement instantané de ce portefeuille doit égaler le taux sans risque, supposé constant par hypothèse. Ce raisonnement d'arbitrage conduit à une équation aux dérivées partielles (EDP) régissant la valeur de l' option[3].

r désignant le taux d'intérêt continu sans risque (constant par hypothèse), C la valeur d'un *call* européen, de prix d'exercice K, de durée $\tau = T - t$ (où T désigne l'échéance de l'option et t la date présente) et portant sur une action cotée S et de volatilité σ, l'EDP de BLACK et SCHOLES s'écrit :

$$\frac{1}{2}S^2\sigma^2 C_{SS} + rSC_S - rC - C_\tau = 0$$

avec : $C[S(T), T, K] = \mathrm{Max}\,[0, S(T) - K]$

où C_x et C_{xx} désignent respectivement les dérivées partielles première et seconde de C par rapport à x.

La formule de BS est fournie par la solution de l'EDP qui satisfait la valeur de l'option à l'échéance[4]. La valeur C (resp. P) d'un *call* (resp. *put*) européen, s'écrit :

$$C = S \cdot N(\mathrm{d}_1) - K\mathrm{e}^{-r\tau}N(\mathrm{d}_2) \qquad P = -S \cdot N(-\mathrm{d}_1) + K\mathrm{e}^{-r\tau}N(-\mathrm{d}_2),$$

avec $$\mathrm{d}_1 = \frac{\mathrm{Log}\left(\frac{S}{K}\right) + \left(r + \frac{1}{2}\sigma^2\right)\tau}{\sigma\sqrt{\tau}} \text{ et } \mathrm{d}_2 = \mathrm{d}_1 - \sigma\sqrt{\tau},$$

où $N(d)$ représente la fonction de répartition d'une variable normale centrée réduite de $+\infty$ à d telle que : $N(d) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_{-\infty}^{\mathrm{d}} \exp\left(-\frac{1}{2}\xi^2\right) d\xi$.

Tandis que BLACK et SCHOLES sont parvenus à leur célèbre formule en transformant, à l'aide d'un changement de variable très peu intuitif, leur EDP initiale en une équation connue de la physique (celle de la chaleur), il est possible, par ailleurs, de retrouver ce résultat plus facilement en recherchant la limite du modèle binomial proposé par COX, ROSS et RUBINSTEIN (1979). Ce modèle permet, en outre, de révéler, de manière simple, l'univers de probabilité risque-neutre.

I.2 Approche discrète : le modèle binomial

Supposons que la valeur d'un titre suive un processus binomial multiplicatif selon lequel, au cours d'un instant Δt, la valeur d'une action passe de S à $u \times S$ (avec la probabilité réelle π) ou $d \times S$ (avec la probabilité $1 - \pi$), avec $u > 1$ et $d < 1$. À l'aide d'un raisonnement d'arbitrage, équivalent à celui de BS, il est possible, par exemple, d'exprimer la valeur d'un *call* à une date t quelconque en fonction des valeurs possibles, C_u et C_d, de l'option à la date $t + \Delta t$. Il vient :

$$C = \frac{1}{\widehat{r}}\,[pC_u + (1-p)C_d], \tag{1}$$

avec $$p = \frac{\widehat{r} - d}{u - d} \text{ où } \widehat{r} = \mathrm{e}^{r\Delta t} \text{ et } d < \widehat{r} < u.$$

Cette formule d'évaluation peut facilement être généralisée à n périodes à l'aide d'un raisonnement récursif. Connaissant la valeur finale de l'option, égale à sa valeur intrinsèque, on détermine, de proche en proche, à l'aide de (1), la valeur de l'option à la date présente[5]. Cette méthode se prête facilement à une procédure de calcul numérique par treillis. Elle permet surtout d'évaluer des options américaines, exerçables à tout moment, et de prendre en compte le versement de coupons pendant la durée de vie de l'option.

La formule binomiale présente enfin un intérêt pédagogique évident : le paramètre p peut, en effet, s'interpréter comme la probabilité de hausse du sous-jacent dans un monde neutre à l'égard du risque. En effet, dans cet univers, tous les actifs ont la même rentabilité espérée égale au taux sans risque. Or on vérifie facilement[6] que, si $E(\Delta S/S) = \widehat{r} - 1$, p représente alors la probabilité de hausse du titre au cours de la période Δt. Ainsi la formule binomiale permet-elle d'interpréter la valeur d'une option comme l'espérance de son prix final, actualisée au taux sans risque, l'espérance étant calculée par rapport à la probabilité risque-neutre, p, ou probabilité corrigée du risque.

I.3 Approche probabiliste en temps continu

Depuis les travaux de HARRISON et KREPS (1979) et de HARRISON et PLISKA (1981), le résultat précédent a été étendu au cas continu : **dans un marché complet, en l'absence d'opportunité d'arbitrage, la valeur de n'importe quel actif, optionnel ou non, est égale à l'espérance actualisée de ses revenus futurs sous la probabilité risque-neutre**. En d'autres termes, cette probabilité donne la propriété de martingale à la suite des prix actualisés. Ce résultat permet, à nouveau, de retrouver facilement la formule de BS par un calcul d'espérance.

En représentant l'incertitude de l'économie à l'aide d'un espace probabilisé filtré, la valeur en t d'un *call* venant à échéance en T prend la forme suivante d'une espérance sous la probabilité risque-neutre P :

$$C(t) = E_P\left\{\mathrm{e}^{-\int_t^T r(u)\cdot \mathrm{d}u}\,\mathrm{Max}\left[(S(T)-K),0\right]|F_t\right\} \tag{2}$$

où la filtration F_t représente l'information disponible en t.

La valeur de l'option peut s'interpréter comme l'espérance de sa valeur finale exprimée dans un autre numéraire que l'unité monétaire courante. Ce numéraire correspond à un fonds de capitalisation, investi sans risque, dont la valeur initiale, en t, est égale à une unité monétaire courante. La probabilité risque-neutre rend martingale le prix de l'option exprimé dans ce nouveau numéraire.

Dans le cadre du modèle de BS, où le taux à court terme, r, est constant et donc le facteur d'actualisation connu, le calcul de l'espérance se résume à celui de l'espérance de la valeur finale de l'option. La valeur de l'action à l'échéance étant solution de l'équation de diffusion régissant S, dans l'univers risque-neutre, telle que $dS = S \cdot r \cdot dt + S \cdot \sigma \cdot d\widehat{Z}$, la distribution lognormale de $S(T)$ est parfaitement définie[7], avec[8] :

$$S(T) = S(t) \exp \left[\left(r - \frac{1}{2}\sigma^2 \right) (T - t) + \sigma \left(\widehat{Z}(T) - \widehat{Z}(t) \right) \right]$$

où $\widehat{Z}$ représente un brownien standard sous la probabilité risque-neutre. Dès lors, l'obtention de la formule de BS est immédiate[9].

Si, en revanche, l'évolution du taux à court terme est stochastique, la formule (2) précédente représente l'espérance d'un produit complexe difficilement calculable. Un nouveau changement d'univers de probabilité est nécessaire pour contourner cette difficulté. L'évaluation d'une option sur contrat va précisément nous permettre d'introduire cette nouvelle mesure de probabilité qualifiée, cette fois-ci, de *forward*-neutre. En effet, après avoir présenté le plus courant des modèles d'évaluation d'options sur contrat – celui de Black, en l'occurrence – nous utiliserons une approche discrète (binomiale) de ce modèle pour dévoiler ce nouvel univers de probabilité, véritable clef de voûte de l'évaluation des options de taux.

II. ÉVALUATION D'UNE OPTION SUR CONTRAT À TERME

Black (1976) a, le premier, proposé un modèle d'évaluation d'une option européenne sur un contrat à terme de marchandise immédiatement dérivé du modèle de Black et Scholes. Cette formule, directement transposable à l'évaluation des options sur contrat financier, a été démontrée, à l'origine, dans le cas particulier d'une option européenne sur contrat *forward* dont l'échéance se confond avec celle du contrat à terme sous-jacent.

II.1 Définition d'un contrat *forward*

Comme un contrat *futures*, un contrat *forward* constitue un engagement ferme à réaliser une transaction à une date future, ou date de livraison, et à un prix *forward* contractuel, ou prix de livraison, convenus au moment de la conclusion du contrat. À la différence d'un contrat *futures*, aucun paiement n'intervient avant l'échéance d'un contrat *forward* et la livraison de l'actif sous-jacent par le vendeur à l'acheteur du contrat. Le prix *forward* d'équilibre, pour une échéance donnée, représente le prix contractuel pour lequel un contrat *forward* nouvellement créé a une valeur nulle. Il évolue librement jusqu'à la date d'échéance considérée où il est alors égal au prix *spot*, ou prix au comptant de l'actif. À cette date, la valeur du contrat est strictement égale à la différence entre le prix *spot* en vigueur et le prix de livraison du contrat.

II.2 Le modèle de Black

L'hypothèse principale du modèle de BLACK est que le prix *forward* d'un actif financier suit un mouvement brownien géométrique de même volatilité, σ, que le prix *spot*[10]. Les autres hypothèses du modèle sont communes à celles du modèle de BS. On suppose notamment que l'actif faisant l'objet du contrat *forward* est ici une action qui ne détache pas de dividende pendant la durée de vie du contrat.

Un raisonnement d'arbitrage, analogue à celui de BS et reposant sur la constitution d'un portefeuille d'arbitrage à partir de l'option et du contrat sous-jacent, conduit à une formule voisine de celle de BS. Il est d'ailleurs possible de relier les deux formules. Le taux à court terme étant constant par hypothèse, un raisonnement d'arbitrage[11] consistant à acheter le sous-jacent au comptant en t et à le vendre simultanément à terme, pour la date de livraison T, conduit, en effet, à la relation bien connue entre son prix au comptant, $S(t)$, et son prix *forward*, $F(t)$, pour la maturité τ (avec $\tau = T - t$), telle que $F(t) = S(t)\mathrm{e}^{r\tau}$. Comme à l'échéance du contrat $F(T) = S(T)$, en substituant $F(t)\mathrm{e}^{-r\tau}$ à $S(t)$ dans la formule de BS, on obtient de manière immédiate celle de Black. τ désignant à la fois la durée de vie du contrat et celle de l'option, le prix d'un *call* (*put*) européen, permettant d'acheter (vendre) à l'échéance un contrat *forward* au prix d'exercice K, s'écrit :

$$C = \mathrm{e}^{-r\tau}[F(t)N(\mathrm{d}_1) - KN(\mathrm{d}_2)] \text{ et } P = \mathrm{e}^{-r\tau}[-F(t)N(-\mathrm{d}_1) + KN(-\mathrm{d}_2)],$$

avec
$$\mathrm{d}_1 = \frac{\mathrm{Log}\left(\dfrac{F(t)}{K}\right) + \dfrac{1}{2}\sigma^2\tau}{\sigma\sqrt{\tau}} \text{ et } \mathrm{d}_2 = \mathrm{d}_1 - \sigma\sqrt{\tau}.$$

Le champ d'application de la formule de BLACK peut être étendu à d'autres catégories d'options sur contrat, notamment aux options européennes sur contrat *futures*. En revanche cette formule est inadaptée pour évaluer des options américaines sur contrat *futures*. Dans ce cas, le recours au modèle binomial ou à l'approximation analytique de BARONE-ADESI et WHALEY (1987) s'avère nécessaire (voir AUGROS, 1989).

II.3 Approche discrète de la formule de Black

L'approche binomiale peut également être utilisée pour démontrer la formule de BLACK. Elle présente, en outre, l'avantage de révéler, de manière simple, un nouvel univers de probabilité.

Supposons que le prix *forward*, F, en t, pour une livraison en T, suive un processus binomial multiplicatif, tel que ce prix vaille $u \times F$ ou $d \times F$ à la date $t + \Delta t$, avec $u = \mathrm{e}^{\sigma\sqrt{\Delta t}} > 1$ et $d = (1/u) < 1$. Tandis qu'un contrat conclu en t, au prix F, a une valeur $V(t)$ nulle au moment de sa négociation en t, à la date $t + \Delta t$, sa valeur $V(t + \Delta t)$ est positive ou négative selon que le prix *forward* a augmenté ou diminué. Un raisonnement d'arbitrage[12], consistant à acheter un contrat ancien et à en vendre un nouveau de même échéance, permet de définir $V(t+\Delta t)$. En l'absence d'opportunité d'arbitrage, on vérifie alors que :

$$V(t+\Delta t) = (u-1)F\mathrm{e}^{-r(\tau-\Delta t)} \text{ ou } (d-1)F\mathrm{e}^{-r(\tau-\Delta t)}$$

avec $\tau = T - t$.

Soit à évaluer, en t, un *call* (sur le contrat) dont l'échéance est située en t^*, avec $t < t^* < T$.

Considérons désormais un portefeuille d'arbitrage consistant, par exemple, en une position longue sur le *call* sur le contrat et courte sur H contrats sous-jacents créés en t. Au cours de la période Δt, ce portefeuille suit l'évolution binomiale suivante :

$$C - H \times 0 \begin{cases} C_u - H(u-1)Fe^{-r(\tau-\Delta t)} \\ C_d - H(d-1)Fe^{-r(\tau-\Delta t)} \end{cases}$$

En égalisant les deux branches de l'arbre, soit en choisissant

$$H = \frac{C_u - C_d}{(u-d)\cdot F\mathrm{e}^{-r(\tau-\Delta t)}},$$

le portefeuille est sans risque. Il rapporte donc le taux sans risque. On en déduit la valeur du *call* en début de période en fonction de ses valeurs possibles en fin de période. Soit :

$$C = \frac{1}{\widehat{r}}[qC_u + (1-q)C_d]$$

avec
$$q = \frac{1-d}{u-d}. \qquad (3)$$

Cette formule peut également être généralisée à n périodes par un raisonnement récursif. Dans le cas où $t^* = T$, la formule obtenue admet celle de Black comme limite lorsque Δt tend vers zéro. Le paramètre q peut s'interpréter comme une probabilité sous laquelle la suite des prix *forward* de tout actif financier est une martingale. On vérifie, en effet, que, sous la probabilité q, le prix *forward* d'un actif en t est bien égal à sa valeur espérée en $t + \Delta t$. Par exemple, le prix *forward* de l'actif sous-jacent de l'option est tel que : $F = quF + (1-q)dF$. De même, la formule binomiale (3) donnant la valeur de l'option permet également de vérifier que le prix *forward*, $\widehat{r}C$, de l'option est aussi une martingale.

En présence de taux stochastiques, la propriété de martingale des prix *forward* reste vraie sous la probabilité q. Cette probabilité, qualifiée alors de *forward*-neutre[13], est distincte de la probabilité réelle π et de la probabilité risque-neutre p. Comme le paragraphe suivant va le démontrer, elle permet l'évaluation d'une option en présence de taux stochastiques.

II.4 La probabilité *forward* neutre discrète

Comme dans le paragraphe précédent, il est supposé que le prix *forward* F d'une action, pour une livraison en T, suit un processus binomial multiplicatif stable au cours du temps. Désormais, les taux d'intérêt sont stochastiques et corrélés avec le prix de l'action. La structure des taux, à la date présente t, est définie par le prix des obligations zéro-coupon $B(t, i)$ rapportant 1 franc en i, avec $i = t + \Delta t$ à $t + n \cdot \Delta t$. Soit à évaluer une option européenne sur le contrat de même échéance que le contrat lui-même ou, ce qui est équivalent, une option sur l'action d'échéance T.

On considère, d'abord, l'évaluation de l'option dans un univers à deux périodes. Soit $t = 0$, la date présente, et $t = 2$, la date d'échéance de l'option. $B(0,1)$ et $B(0,2)$ définissent la structure des taux en $t = 0$. $B_0(1,2)$ représente le prix *forward* en $t = 0$ d'un contrat prévoyant la livraison, en $t = 1$, d'une obligation zéro-coupon rapportant 1 franc en $t = 2$, avec :

$$B_0(1,2) = \frac{B(0,2)}{B(0,1)}.$$

Le prix *forward* de l'action, pour une livraison en $t = 2$, évolue selon le schéma suivant :

$$\begin{array}{ccccc}
t = 0 & & t = 1 & & t = 2 \\
 & & & \nearrow & u^2F \\
 & \nearrow & uF & & \\
F = \dfrac{S(0)}{B(0,2)} & & & \searrow\nearrow & udF \\
 & \searrow & dF & & \\
 & & & \searrow & d^2F
\end{array} \left.\vphantom{\begin{array}{c}a\\a\\a\\a\\a\\a\end{array}}\right\} = S(2)$$

Le prix de l'option – par exemple, un *call* de prix d'exercice K – évolue également selon un treillis :

$$\begin{array}{ccccl}
 & & & \nearrow & C_{uu} = (u^2F - K)^+ \\
 & \nearrow & C_u & & \\
C & & & \searrow\nearrow & C_{ud} = (udF - K)^+ \\
 & \searrow & C_d & & \\
 & & & \searrow & C_{dd} = (d^2F - K)^+
\end{array}$$

À la date $t = 1$, il est possible de constituer un portefeuille d'arbitrage sans risque en prenant, par exemple, une position longue sur le *call* et une position courte sur H_1 contrats *forward* conclus en $t = 1$ et prévoyant la livraison d'une action en $t = 2$, avec, comme prix de livraison, le prix *forward* en vigueur à la date $t = 1$.

Si, en $t = 1$, le prix *forward* est uF, le portefeuille évolue, de $t = 1$ à $t = 2$, selon le schéma suivant :

$$C_u - H_1 \times 0 \begin{cases} C_{uu} - H_1 \cdot uF(u-1) \\ C_{ud} - H_1 \cdot uF(d-1) \end{cases}$$

Le portefeuille est sans risque si les deux branches de l'arbre sont équivalentes, soit si :

$$H_1 = \frac{C_{uu} - C_{ud}}{(u-d)uF}.$$

Le portefeuille étant sans risque, il rapporte le taux sans risque. Il vient, par conséquent :

$$C_u = B(1,2)[q \cdot C_{uu} + (1-q) \cdot C_{ud}]$$

avec
$$q = \frac{1-d}{u-d},$$

où $B(1,2)$ représente le facteur d'actualisation sur la période. Celui-ci étant connu à la date $t = 1$, le portefeuille constitué à cette date n'est pas soumis au risque de taux.

Lorsqu'en $t = 1$ le prix *forward* est égal à dF on démontre de même que :

$$C_d = B(1,2)[q \cdot C_{ud} + (1-q) \cdot C_{dd}].$$

En revanche, à la date $t = 0$, le prix $B(1,2)$ de l'obligation zéro-coupon est inconnu. Soit $\widetilde{B}(1,2)$, ce prix vu de $t = 0$. La constitution, en $t = 0$, d'un portefeuille d'arbitrage nécessite, désormais, la couverture de deux types de risque : celui lié aux fluctuations du prix *forward* de l'action, d'une part, et le risque de taux d'intérêt, d'autre part.

Afin d'éliminer la première source de risque, il convient de prendre, par exemple, une position longue sur le *call* et de vendre à terme H_0 actions au prix de livraison F et pour la date de livraison $t = 2$. Le portefeuille évolue alors, entre $t = 0$ et $t = 1$, selon le schéma suivant :

$$C - H_0 \times 0 \begin{cases} \widetilde{C}_u - H_0 \widetilde{B}(1,2) F(u-1) \\ \widetilde{C}_d - H_0 \widetilde{B}(1,2) F(d-1) \end{cases}$$

avec $\widetilde{C}_u = \widetilde{B}(1,2)[q \cdot C_{uu} + (1-q) \cdot C_{ud}]$,

$\widetilde{C}_d = \widetilde{B}(1,2)[q \cdot C_{ud} + (1-q) \cdot C_{dd}]$.

Le risque associé à l'évolution aléatoire de la valeur du contrat à terme sur l'action peut être éliminé en choisissant H_0 de telle sorte qu'il y ait égalité des deux branches. Soit avec :

$$H_0 = \frac{qC_{uu} + (1-q)C_{ud} - qC_{ud} - (1-q)C_{dd}}{(u-d)F}.$$

En remplaçant H_0 par l'expression précédente, la valeur du portefeuille en $t = 1$ est égale, après simplification, à $\widetilde{B}(1,2) \cdot X$, avec :

$$X = [q^2 \cdot C_{uu} + 2q(1-q) \cdot C_{ud} + (1-q)^2 \cdot C_{dd}].$$

Il ne reste plus qu'à couvrir le portefeuille contre le risque de taux d'intérêt. Il suffit, pour cela, en $t = 0$, de vendre X contrats *forward*, d'échéance $t = 1$, prévoyant la livraison, au prix $B_0(1,2)$, d'une obligation zéro-coupon rapportant 1 franc à la date $t = 2$. L'évolution de la valeur du portefeuille d'arbitrage peut alors être représentée par le schéma suivant :

$$C - H_0 \times 0 - X \times 0 \begin{cases} \nearrow B_0(1,2) \cdot X \\ \searrow B_0(1,2) \cdot X \end{cases}$$

La valeur du portefeuille d'arbitrage, en $t = 1$, étant connue avec certitude en $t = 0$, le portefeuille doit donc rapporter le taux sans risque. Il vient, par conséquent :

$$C = B(0,1) \cdot B_0(1,2) \cdot X$$

ou

$$C = B(0,2) \cdot [q^2 \cdot C_{uu} + 2q(1-q) \cdot C_{ud} + (1-q)^2 \cdot C_{dd}].$$

Sous la probabilité q, la propriété de martingale du prix *forward* de l'option, pour l'échéance $t = 2$, est vérifiée. En effet, le prix *forward* de l'option, $C/B(0,2)$, est bien égale à X, l'espérance sous q de sa valeur finale.

La probabilité q peut être qualifiée de **probabilité *forward* neutre discrète**.

Le résultat précédent peut être généralisé à n périodes. Il vient alors :

$$C(t,T,F,K) = B(t,T) \left\{ \sum_{j=0}^{j=n} \frac{n!}{j!(n-j)!} q^j (1-q)^{n-j} (u^j d^{n-j} F - K)^+ | F_t \right\},$$

avec :

$$F = \frac{S(t)}{B(t,T)}$$

et où $B(t,T)$ représente l'espérance, sous la probabilité risque neutre, de la valeur finale d'une obligation zéro-coupon actualisée sur n périodes au taux sans risque, telle que :

$$B(t,T) = E_p \left[\sum_{i=0}^{i=n-1} \frac{1}{\widetilde{\widetilde{r}}_{t+i}} | F_t \right],$$

où $(\widetilde{r}_{t+i} - 1)$ désigne le taux sans risque discret de la période commençant à la date $t + i$.

La valeur de l'option apparaît ainsi comme le produit de deux espérances, l'une calculée sous la probabilité risque neutre p, l'autre sous la probabilité *forward* neutre q.

Comme la section suivante va le révéler, ce résultat fondamental peut être étendu au cas de l'évaluation d'une option, en temps continu, en présence de taux d'intérêt stochastiques.

III. ÉVALUATION EN TEMPS CONTINU D'UNE OPTION EN PRÉSENCE DE TAUX STOCHASTIQUES

Nous distinguons successivement le cas d'une option sur action, puis celui d'une option sur obligation.

III.1 Le cas d'une option sur action

III.1.1 *Hypothèses*

Comme dans le modèle de BLACK et SCHOLES, la dynamique du prix de l'action est définie par l'équation différentielle stochastique suivante :

$$\frac{dS}{S} = \mu dt + \sigma dZ. \tag{4}$$

Toutefois, μ et σ ne sont pas nécessairement des constantes. μ peut varier de manière stochastique au cours du temps ; σ peut varier également, mais de façon prédéterminée. Comme dans les sections précédentes, nous admettons que l'action ne détache pas de coupon pendant la durée de vie de l'option.

Les taux d'intérêt évoluant au cours du temps de manière stochastique, on postule que la dynamique du prix d'une obligation zéro-coupon sans risque de défaut est définie par l'équation différentielle stochastique suivante :

$$\frac{dB(t,T)}{B(t,T)} = \alpha(\tau)dt - \delta(\tau)dZ', \tag{5}$$

où $B(t,T)$ représente le prix, en t, d'un zéro-coupon, sans risque de défaut, rapportant 1 franc à la date T ;

$\alpha(\tau)$ désigne le rendement instantané espéré du zéro-coupon, avec $\tau = T - t$. Celui-ci peut varier, de manière stochastique, en relation avec le prix des obligations ;

$\delta(\tau)$ est l'écart-type du rendement instantané du zéro-coupon. $\delta(\tau)$ dépend de la maturité de l'obligation, mais n'est pas stochastique ;

Z' est un processus brownien standard.

Le rendement d'une action et celui d'une obligation zéro-coupon peuvent être partiellement corrélés[14], avec $dZ \cdot \mathrm{d}Z' = -k \cdot \mathrm{d}t$ (pour les probabilistes, $\mathrm{d}Z \cdot \mathrm{d}Z'$ est plus souvent noté $\mathrm{d} < Z, Z' >$), où k désigne le coefficient de corrélation instantané entre les rendements non anticipés de $S(t)$ et de $B(t,T)$.

Pour simplifier l'écriture, nous nous autorisons, par la suite, à remplacer $r(t)$, $\mu(t)$, $\sigma(t)$, $\alpha(\tau)$, et $\delta(\tau)$ par r, μ, σ, α et δ.

III.1.2 *Passage dans l'univers risque-neutre*

Comme en présence de taux non stochastiques, on suppose ici qu'il existe une probabilité P sous laquelle les prix des actifs financiers se comportent comme si les investisseurs étaient indifférents aux multiples sources de risque. Dans cet univers de probabilité virtuel, le rendement espéré instantané de tous les actifs risqués, actions ou obligations, est égal au taux sans risque.

• On définit grâce au théorème de Girsanov un nouveau processus brownien standard, $\widehat{Z}$, sous la probabilité risque-neutre P, tel que :

$$\mathrm{d}\widehat{Z} = \mathrm{d}Z + \lambda_S(t) \cdot \mathrm{d}t.$$

r désignant le taux sans risque instantané en t, $\lambda_S(t)$ représente le prix de marché unitaire (par unité de σ) du risque associé au risque total de l'action, avec :

$$\lambda_S(t) = \frac{\mu - r}{\sigma}.$$

Le rendement instantané de l'action, dans l'univers risque-neutre, est donc défini par l'EDS suivante :

$$\frac{dS}{S} = r \cdot \mathrm{d}t + \sigma \cdot \mathrm{d}\widehat{Z}. \tag{6}$$

• On définit, de même, le mouvement brownien standard, $\widehat{Z'}$, sous la probabilité risque-neutre, tel que :

$$\mathrm{d}\widehat{Z'} = \mathrm{d}Z' - \lambda_B(t) \cdot \mathrm{d}t,$$

où $\lambda_B(t)$ représente le prix de marché du risque, associé au risque du zéro-coupon $B(t,T)$, tel que :

$$\lambda_B(t) = \frac{\alpha - r}{\delta}.$$

Le rendement instantané de l'obligation zéro-coupon, dans l'univers risque-neutre, s'écrit alors :

$$\frac{\mathrm{d}B(t,T)}{B(t,T)} = r \cdot \mathrm{d}t - \delta \cdot \mathrm{d}\widehat{Z'}. \tag{7}$$

avec $d < \widehat{Z}, \widehat{Z'} >= d < Z, Z' >) = -k \cdot dt$.

III.1.3 *Décomposition de la volatilité de l'action*

Il est possible de définir un nouveau processus brownien standard, $\widehat{\widehat{Z}}$, orthogonal à $\widehat{Z'}$, tel que $d < \widehat{Z'}, \widehat{\widehat{Z}} >= 0$. Alors $\widehat{Z}$ se décompose de la façon suivante :

$$\mathrm{d}\widehat{Z} = -k\mathrm{d}\widehat{Z'} + \sqrt{1-k^2}\,\mathrm{d}\widehat{\widehat{Z}}.$$

Sous la probabilité risque-neutre, le rendement instantané de l'action S peut donc également être défini par d'EDS suivante :

$$\frac{dS}{S} = rdt - \sigma k d\widehat{Z'} + \sigma\sqrt{1-k^2}\,d\widehat{\widehat{Z}}. \tag{8}$$

La volatilité totale de l'action, σ, se décompose alors en deux composantes distinctes : la première, σk, représente la volatilité de l'action due au risque de taux, tandis que la seconde, $\sigma\sqrt{1-k^2}$, est due à d'autres facteurs que le risque de taux.

III.1.4. *Passage dans l'univers forward-neutre*

Le résultat général, selon lequel la valeur d'une option européenne est égale à l'espérance, sous la probabilité risque-neutre, de sa valeur finale actualisée (formule 2), reste, bien sûr, valide en présence de taux d'intérêt stochastiques. Comme, dans ce cas, la valeur de l'option équivaut à l'espérance d'un produit complexe, il est préférable de généraliser au cas continu le résultat, obtenu précédemment en temps discret, selon lequel, **dans le marché complet considéré, et en l'absence d'opportunité d'arbitrage, il existe une probabilité, qualifiée de *forward*-neutre, sous laquelle la suite des prix forward de n'importe quel actif, optionnel ou non, est une martingale et a la même volatilité que dans l'univers historique** (GEMAN, 1989; JAMSHIDIAN, 1989). Cette probabilité est définie, en temps continu, à l'aide du théorème de Girsanov. Ce nouveau changement d'univers de représentation est choisi de manière à annuler la dérive du processus d'évolution du prix *forward* de l'actif sous-jacent, pour l'échéance T, correspondant à celle de l'option.

Désignons par Q_T cette nouvelle probabilité[15]. On définit une nouvelle variable, Z'_T, telle que : $\mathrm{d}Z'_T = \mathrm{d}\widehat{Z'} + \delta \cdot \mathrm{d}t$. Pour la mesure de probabilité Q_T, définie par le théorème de Girsanov, Z'_T est un processus brownien standard. Sous Q_T, le rendement instantané de l'obligation zéro-coupon $B(t,T)$ obéit, par conséquent, à l'EDS suivante :

$$\frac{\mathrm{d}B(t,T)}{B(t,T)} = (r+\delta^2)\,\mathrm{d}t - \delta\mathrm{d}Z'_T. \tag{9}$$

De même, le rendement instantané de l'action est régit par l'EDS ci-dessous :

$$\frac{\mathrm{d}S}{S} = (r + k\sigma\delta)\mathrm{d}t - k\sigma\mathrm{d}Z'_T + \sigma\sqrt{1-k^2}\mathrm{d}\widehat{\widehat{Z}}, \tag{10}$$

avec $d < Z'_T, \widehat{\widehat{Z}} >= 0$.

Désignons par $F(t,T)$ ou F le prix *forward* de l'action en t, pour une livraison en T, tel que :

$$F = F(t,T) = \frac{S(t)}{B(t,T)}.$$

Grâce au lemme d'Itô, il est possible de différentier F. Il vient :

$$\frac{\mathrm{d}F}{F} = \frac{\mathrm{d}S}{S} - \frac{\mathrm{d}B}{B} + \left(\frac{\mathrm{d}B}{B}\right)^2 - \frac{\mathrm{d}S}{S}\frac{\mathrm{d}B}{B}.$$

En remplaçant $\frac{\mathrm{d}S}{S}$ et $\frac{\mathrm{d}B}{B}$ par leurs expressions, données respectivement par (9) et (10), il ressort, après simplification, que, sous Q_T :

$$\frac{\mathrm{d}F}{F} = (\delta - k\sigma)\mathrm{d}Z'_T + \sigma\sqrt{1-k^2}\,\mathrm{d}\widehat{\widehat{Z}}.$$

La dérive du processus du prix forward étant nulle, on vérifie bien que le passage dans l'univers *forward*-neutre donne la propriété de martingale à ce processus. La variance de $\frac{\mathrm{d}F}{F}$ s'écrit :

$$\left(\frac{\mathrm{d}F}{F}\right)^2 = \left(\sigma^2 + \delta^2 - 2k\sigma\delta\right)\mathrm{d}t.$$

On remarque que la volatilité du prix *forward* est la même dans l'univers *forward*-neutre que dans l'univers historique.

Si l'on désigne par $\widehat{\sigma}^2$ la variance moyenne sur $[t,T]$ du rendement du prix *forward* de l'action, il vient :

$$\widehat{\sigma}^2 = \frac{1}{\tau}\int_t^T (\sigma^2 + \delta^2 - 2k\sigma\delta)\mathrm{d}u,$$

où σ et δ sont des fonctions de u.

III.1.5 *Loi du prix forward de l'action à l'échéance de l'option*

On pose $Y = \mathrm{Log}F(t,T) = \mathrm{Log}\frac{S(t)}{B(t,T)}$. Il vient, grâce au lemme d'Itô :

$$\mathrm{d}Y = \frac{\mathrm{d}S}{S} - \frac{\mathrm{d}B}{B} - \frac{1}{2}\left(\frac{\mathrm{d}S}{S}\right)^2 + \frac{1}{2}\left(\frac{\mathrm{d}B}{B}\right)^2.$$

Soit, sous Q_T :

$$\mathrm{d}Y = -\frac{1}{2}\left(\sigma^2 + \delta^2 - 2k\sigma\delta\right)\mathrm{d}t + (\delta - k\sigma)\mathrm{d}Z'_T + \sigma\sqrt{1-k^2}\mathrm{d}\widehat{\widehat{Z}}.$$

En intégrant de t à T, il vient :

$$\mathrm{Log}\frac{F(T,T)}{F(t,T)} = -\frac{1}{2}\int_t^T \left(\sigma^2 + \delta^2 - 2k\sigma\delta\right) \mathrm{d}u + \int_t^T (\delta - k\sigma)\mathrm{d}Z'_T + \int_t^T \sigma\sqrt{1-k^2}\mathrm{d}\hat{\hat{Z}},$$

soit :

$$F(T,T) = F(t,T)\exp\left[-\frac{1}{2}\tau\hat{\sigma}^2 + \int_t^T (\delta - k\sigma)\mathrm{d}Z'_T + \int_t^T \sigma\sqrt{1-k^2}\,\mathrm{d}\hat{\hat{Z}}\right],$$

ou, sachant qu'en T le prix *forward* de l'action rejoint le prix spot :

$$F(T,T) = S(T) = F(t,T)\cdot \mathrm{e}^u,$$

u suivant une loi normale $N(m,\varphi)$, avec :

$$\begin{cases} m = -\dfrac{1}{2}\tau\hat{\sigma}^2 \\ \varphi^2 = \displaystyle\int_t^T \left[(\delta - k\sigma)^2 + \sigma^2(1-k^2)\right] \mathrm{d}u = \tau\hat{\sigma}^2 \end{cases}$$

III.1.6 *Calcul de la valeur de l'option*

Soit, par exemple, à évaluer en t un *call* européen sur une action dont l'échéance est fixée en T. Le prix *forward* de l'option, pour l'échéance T, étant une Q_T-martingale, il vient :

$$\frac{C(t)}{B(t,T)} = E_{Q_T}\left[\frac{C(T)}{B(T,T)}\middle| F_t\right],$$

soit :

$$C(t) = B(t,T)\cdot E_{Q_T}\left[(S(T)-K)^+\middle| F_t\right]. \tag{11}$$

La probabilité *forward*-neutre, Q_T, rend martingale le prix d'une option exprimé dans un numéraire représenté, ici, par une obligation zéro-coupon rapportant une unité monétaire à la date d'échéance de l'option.

Dans l'expression (11), la valeur de l'option apparaît comme le produit de deux termes. Le premier représente le prix de l'obligation zéro-coupon $B(t,T)$ directement observable sur le marché. Or, selon la règle générale d'évaluation énoncée précédemment, la valeur de cette obligation correspond à la valeur espérée, sous la probabilité risque-neutre, de son flux final ou, en d'autres termes, à la valeur espérée de la fonction d'actualisation. Soit :

$$B(t,T) = E_P\left[\exp\left(-\int_t^T r(u)\mathrm{d}u\right)\middle| F_t\right].$$

Le second terme de la relation (11) représente l'espérance, sous la probabilité *forward*-neutre, de la valeur finale de l'option. Le recours à l'univers *forward*-neutre a donc permis de substituer, à l'espérance d'un produit complexe, le produit de deux espérances dont le calcul est considérablement simplifié. Comme l'affirme GEMAN (1989), le passage dans l'univers *forward*-neutre a pour effet de «neutraliser l'aléatoire contenu dans les taux d'intérêt jusqu'à l'instant T».

Connaissant la loi de $S(T)$, il est facile, désormais, de calculer l'espérance de la valeur finale de l'option[16]. On retrouve le résultat obtenu par MERTON (1973) par résolution de l'EDP régissant la valeur de l'option (cf. infra), selon lequel :

$$\left.\begin{aligned}
&C = S(t)N(\mathrm{d}_1) - KB(t,T)N(\mathrm{d}_2)\\
\text{avec}\quad &\mathrm{d}_1 = \frac{\mathrm{Log}\dfrac{S(t)}{KB(t,T)} + \dfrac{1}{2}\widehat{\sigma}^2\tau}{\widehat{\sigma}\sqrt{\tau}} \quad \text{et} \quad \mathrm{d}_2 = \mathrm{d}_1 - \widehat{\sigma}\sqrt{\tau}\\
\text{où}\quad &\widehat{\sigma}^2 = \frac{1}{\tau}\int_t^T \left(\sigma^2 + \delta^2 - 2k\sigma\delta\right)\mathrm{d}u
\end{aligned}\right\} \tag{12}$$

Dans le cas général, la formule (12) n'a pas de solution autre que numérique.

Toutefois, si on retient, par exemple, pour l'obligation zéro-coupon $B(t,T)$ une structure de volatilité linéaire par rapport à la maturité, telle que $\delta(\tau) = \delta \times (T-t)$, avec δ = constante, et si l'on admet, en outre, que σ et k sont aussi des constantes, on obtient alors une expression analytique de (12) avec :

$$\widehat{\sigma}^2 = \frac{1}{\tau}\int_t^T \left[\sigma^2 + \delta^2 \times (T-u)^2 - 2k\sigma\delta \times (T-u)\right]\mathrm{d}u,$$

soit : $$\widehat{\sigma}^2 = \sigma^2 + \delta^2\frac{\tau^2}{3} - k\sigma\delta\tau.$$

La connaissance de la courbe des taux et de la structure de volatilité suffit à définir le processus suivi par le taux sans risque instantané. Ce dernier est ici gaussien. On montre, en effet[17], que :

$$r(t) = f(s,t) + \frac{\delta^2(t-s)^2}{2} + \delta \times [\widehat{Z'}(t) - \widehat{Z'}(s)], \tag{13}$$

où $f(s,t)$ désigne, en s, le taux spot *forward* pour la maturité t, (avec $s < t$). $f(s,t)$ est défini par :

$$f(s,t) = -\frac{\partial \mathrm{Log}\, B(s,t)}{\partial t}.$$

Les taux *forward*, tels que $f(s,t)$, se déduisent de la courbe des taux. Ils sont donc également observables. Le processus de taux correspond ici à la version continue du modèle discret de HO et LEE (1986).

L'hypothèse de taux gaussien peut sembler, *a priori*, gênante puisqu'elle rend possible l'apparition de taux négatifs. Dans les conditions courantes d'application de ce modèle, la probabilité de survenance de taux négatifs est cependant faible. Cet inconvénient apparaît donc assez peu contraignant dans la pratique.

III.1.7 *Comparaison avec l'approche classique par EDP*

La formule (12) a été obtenue initialement par MERTON (1973) par résolution de l'EDP régissant la valeur d'une option. A titre de comparaison avec l'approche probabiliste précédente, la méthode classique est reprise ici.

Grâce au lemme d'Itô, la variation instantanée de la valeur, $C[S,\ B(t,\,T),\ \tau]$, de l'option s'écrit :

$$\mathrm{d}C = C_S \cdot \mathrm{d}S + C_B \cdot \mathrm{d}B + C_t \cdot \mathrm{d}t + \frac{1}{2}\left[C_{SS}(\mathrm{d}S)^2 + C_{BB}(\mathrm{d}B)^2 + 2C_{SB}\cdot \mathrm{d}S \cdot \mathrm{d}B\right]$$

En remplaçant $\mathrm{d}S$ et $\mathrm{d}B$ par (4) et (5) respectivement, l'expression précédente devient :

$$\frac{\mathrm{d}C}{C} = \beta \cdot \mathrm{d}t + \gamma \cdot \mathrm{d}Z + \eta \cdot \mathrm{d}Z' \qquad (14)$$

avec :

$$\begin{aligned}
\beta &= \frac{1}{C}\left[\frac{1}{2}S^2\sigma^2 C_{SS} + \frac{1}{2}B^2\delta^2 C_{BB} + SB\sigma\delta k C_{SB} + S\mu C_S + B\alpha C_B + C_t\right] \\
\gamma &= \frac{\sigma S C_S}{C} \\
\eta &= -\frac{\delta B C_B}{C}
\end{aligned}$$

Il est possible de constituer un portefeuille d'arbitrage de valeur $X = X_1 + X_2 + X_3 = 0$ où X_1, X_2 et X_3 représentent le nombre d'unités monétaires investies respectivement dans l'action S, dans l'option C et dans l'obligation zéro-coupon $B(t,T)$. La variation instantanée de la valeur de ce portefeuille s'écrit :

$$\mathrm{d}X = X_1\frac{\mathrm{d}S}{S} + X_2\frac{\mathrm{d}C}{C} + X_3\frac{\mathrm{d}B}{B}$$

Comme $X_3 = -(X_1 + X_2)$, en remplaçant $\frac{\mathrm{d}S}{S}$, $\frac{\mathrm{d}B}{B}$ et $\frac{\mathrm{d}C}{C}$ par (4), (5) et (14) respectivement, il vient :

$$\mathrm{d}X = [X_1(\mu - \alpha) + X_2(\beta - \alpha)]\mathrm{d}t + [X_1\sigma + X_2\gamma]\mathrm{d}Z + [X_1\delta + X_2(\eta + \delta)]\mathrm{d}Z'.$$

En l'absence d'opportunité d'arbitrage, ce portefeuille, dont le risque et la valeur initiale sont nuls, a une rentabilité nulle. D'où :

$$\begin{aligned}
&[X_1(\mu - \alpha) + X_2(\beta - \alpha)] = 0 \\
&[X_1\sigma + X_2\gamma] = 0 \\
&[X_1\delta + X_2(\eta + \delta)] = 0
\end{aligned}$$

Ce système ne possède de solutions non nulles que si :

$$\frac{\beta-\alpha}{\mu-\alpha}=\frac{\gamma}{\sigma}=\frac{\eta+\delta}{\delta} \tag{15}$$

En remplaçant β, γ et η par leurs expressions respectives, on déduit, de la seconde égalité, la relation suivante :

$$C=S\cdot C_S+B\cdot C_B \tag{16}$$

Il s'agit de la relation d'Euler qui constitue une condition nécessaire pour que C soit une fonction homogène, de degré 1, par rapport à S et $B(t,T)$. De la première égalité donnée par (15), on déduit l'EDP qui gouverne la valeur de l'option ; soit :

$$\frac{1}{2}S^2\sigma^2C_{SS}+\frac{1}{2}B^2\delta^2C_{BB}+SB\sigma\delta kC_{SB}+C_t=0 \tag{17}$$

La valeur de l'option doit, par ailleurs, satisfaire les conditions aux bornes suivantes :

$$C[S(T),K]=\mathrm{Max}[0,S(T)-K] \quad \text{et} \quad C[S=0,K]=0$$

La recherche de la solution de (17) qui satisfait les conditions aux bornes précédentes nécessite un changement de variable. La présomption d'homogénéité de C par rapport à S et B permet d'avancer le changement de variable suivant :

$$C(S,B)=B\cdot h\left(\frac{S}{B}\right)=B\cdot h(F), \quad \text{où} \quad F=F(t,T)=\frac{S(t)}{B(t,T)}$$

Dans l'univers de probabilité réel, le rendement instantané du prix *forward* F s'écrit :

$$\frac{\mathrm{d}F}{F}=(\mu-\alpha+\delta^2+k\sigma\delta)\mathrm{d}t+\sigma\cdot\mathrm{d}Z+\delta\cdot\mathrm{d}Z'$$

D'où : $$\left(\frac{\mathrm{d}F}{F}\right)^2=(\sigma^2+\delta^2-2k\sigma\delta)\mathrm{d}t=V(t)^2\mathrm{d}t$$

La variance instantanée, $V(t)^2$, de $\frac{\mathrm{d}F}{F}$ ne dépend que du temps, et ce de manière déterministe. A nouveau, on désigne par $\widehat{\sigma}^2$ la variance moyenne de $\frac{\mathrm{d}F}{F}$ sur la durée $[t,T]$, telle que :

$$\widehat{\sigma}^2=\frac{1}{\tau}\int_t^T(\sigma^2+\delta^2-2k\sigma\delta)\mathrm{d}u$$

En remplaçant, dans (17), les dérivées partielles de C par les expressions suivantes :

$$C_{SS} = \frac{h_{FF}}{B}\,;\; C_{SB} = -h_{FF}\frac{F}{B}\,;\; C_{BB} = h_{FF}\frac{F^2}{B} \quad \text{et} \quad C_t = -C_\tau = -B \cdot h_\tau,$$

l'EDP (17) devient :

$$\frac{1}{2}F^2 V(t)^2 h_{FF} - h_\tau = 0 \tag{18}$$

avec $$h[F(T)] = \mathrm{Max}[0, F(T) - K] \quad \text{et} \quad h[F = 0] = 0.$$

La comparaison de l'EDP (18) avec l'EDP (17), puis avec celle de Black et Scholes, ainsi que la mise en parallèle de leurs conditions aux bornes, permet d'interpréter h comme le prix d'un *call* européen, portant sur un sous-jacent de valeur F et de volatilité $\widehat{\sigma}$, dont le prix d'exercice serait égal à K, la durée de vie égale à $\tau = T - t$ et pour laquelle δ, k et les taux d'intérêt seraient nuls.

Dès lors, la valeur de h peut être obtenue facilement à l'aide de la formule de Black et Scholes. Il vient :

$$h = F \cdot N(\mathrm{d}_1) - K \cdot N(\mathrm{d}_2)$$

avec $$\mathrm{d}_1 = \frac{\mathrm{Log}\dfrac{S}{K \cdot B} + \dfrac{1}{2}\widehat{\sigma}^2\tau}{\widehat{\sigma}\sqrt{\tau}} \quad \text{et} \quad \mathrm{d}_2 = \mathrm{d}_1 - \widehat{\sigma}\sqrt{\tau}.$$

Sachant que $C(t) = B(t,T) \cdot h$, on obtient à nouveau la formule (12) donnant la valeur de l'option[18]. Comme dans la méthode par martingale, la valeur de l'option apparaît comme le produit de deux termes facilement calculables.

III.2. Le cas d'une option sur obligation

Il est possible d'adapter le modèle de Merton (1973) au cas où les options ont pour sous-jacent une obligation. A titre d'illustration, nous envisageons ici l'évaluation d'une option européenne sur une obligation zéro-coupon sans risque de défaut dans le cas où la structure de volatilité de l'obligation zéro-coupon est de nature déterministe. Nous examinons successivement le cas où la structure est linéaire avec la maturité, puis celle où elle est exponentielle. Dans ces deux cas, il est, en effet, possible d'obtenir des solutions analytiques fréquemment utilisées dans la littérature. En outre, comme l'ont montré El Karoui et Rochet (1989), le taux à court terme présente alors la particularité d'être markovien et donc de suivre une diffusion.

III.2.1 *Structure de volatilité linéaire*

Comme dans le paragraphe précédent, la dynamique d'une obligation zéro-coupon est définie, sous la probabilité risque-neutre, par l'EDS suivante :

$$\frac{\mathrm{d}B(t,T)}{B(t,T)} = r(t)\mathrm{d}t - \delta \times (T-t)\mathrm{d}\widehat{Z'},$$

où le rendement instantané espéré de l'obligation est égal au taux sans risque instantané $r(t)$, où sa volatilité, linéaire avec la maturité, est égale à $\delta \times (T-t)$ et où $\widehat{Z'}$ est un brownien standard sous la probabilité risque-neutre P.

Soit $F(t,t^*,T)$, le prix *forward*, à la date t, pour une livraison en t^*, de l'obligation zéro-coupon $B(t,T)$, tel que $F(t,t^*,T) = \dfrac{B(t,T)}{B(t,t^*)}$.

En posant $\mathrm{d}Z_{t^*} = \mathrm{d}\widehat{Z'} + \delta \times (t^* - t)\mathrm{d}t$, on définit un nouveau brownien, Z_{t^*}, sous une nouvelle mesure de probabilité, Q_{t^*}, ou probabilité *forward*-neutre. On montre facilement[19] que ce changement de probabilité donne la propriété de martingale au processus du prix *forward* pour la date de livraison t^*.

Soit à évaluer un call sur une obligation zéro-coupon $B(t,T)$. Supposons que l'échéance de l'option soit fixée en t^* et que son prix d'exercice soit égal à K. Le processus du prix forward de l'option, pour l'échéance t^*, étant aussi une martingale sous Q_{t^*}, il vient :

$$\frac{C(t)}{B(t,t^*)} = E_{Q_{t^*}}\left[(F(t^*,t^*,T) - K)^+ \middle| F_t\right].$$

Sachant qu'à la date t^* le prix *forward*, $F(t^*,t^*,T)$, de l'obligation zéro-coupon rejoint son prix spot $B(t^*,T)$, la relation précédente s'écrit également :

$$C(t) = B(t,t^*)E_{Q_{t^*}}\left[(B(t^*,T) - K)^+ \middle| F_t\right].$$

$B(t^*,T)$ suit une loi lognormale définie sous Q_{t^*} par l'équation suivante[20] :

$$B(t^*,T) = \frac{B(t,T)}{B(t,t^*)} \exp\left[-\frac{1}{2}\delta^2(T-t^*)^2(t^*-t) - \delta \times (T-t^*)\left(Z_{t^*}(t^*) - Z_{t^*}(t)\right)\right].$$

Dès lors, le calcul de l'espérance, sous Q_{t^*}, de la valeur de l'option à l'échéance conduit au résultat obtenu par HEATH, JARROW et MORTON, (1992) selon lequel :

$$\left.\begin{aligned} C(t) &= B(t,T)N(\mathrm{d}_1) - KB(t,t^*)N(\mathrm{d}_2), \\ \text{avec}\quad d_1 &= \frac{\mathrm{Log}\dfrac{B(t,T)}{KB(t,t^*)} + \dfrac{1}{2}\delta^2 \times (T-t^*)^2(t^*-t)}{\delta \times (T-t^*)\sqrt{t^*-t}} \\ \text{et}\quad \mathrm{d}_2 &= \mathrm{d}_1 - \delta \times (T-t^*)\sqrt{t^*-t} \end{aligned}\right\} \quad (19)$$

Ce résultat peut être obtenu directement à partir de la formule (12) de MERTON dans laquelle il suffit de remplacer la valeur du sous-jacent $S(t)$ par $B(t,T)$ et le facteur d'actualisation $B(t,T)$ par $B(t,t^*)$. En outre, le coefficient de corrélation k entre les rendements respectifs de $B(t,T)$ et $B(t,t^*)$ étant ici égal à l'unité, on obtient, après intégration, la valeur suivante pour $\widehat{\sigma}^2$:

$$\widehat{\sigma}^2 = \frac{1}{t^* - t}\int_t^{t^*} \left[\delta^2(t-u)^2 + \delta^2(t^*-u)^2 - 2\delta^2(T-u)(t^*-u)\right] du,$$

soit :

$$\widehat{\sigma}^2 = \delta^2(T-t^*)^2.$$

On vérifie facilement que, dans ce modèle linéaire gaussien, le taux spot est un processus markovien définie par une diffusion[21].

III.2.2 *Structure de volatilité exponentielle*

On admet, désormais, que la dynamique du prix, $B(t,T)$, d'une obligation zéro-coupon est définie, sous la probabilité risque-neutre, par l'EDS suivante :

$$\frac{\mathrm{d}B(t,T)}{B(t,T)} = r(t)\mathrm{d}t - \frac{\delta}{a}\left[1 - \mathrm{e}^{-a(T-t)}\right]\mathrm{d}\widehat{Z'},$$

où a et δ sont des constantes.

La structure de volatilité est ici la même que dans le modèle de VASICEK (1977). Dans ce cas, également, le taux à court terme est markovien et la dynamique de $r(t)$ est définie par une diffusion gaussienne représentée par un processus d'ORNSTEIN-UHLENBECK[22].

Soit à évaluer une option européenne sur l'obligation zéro-coupon $B(t,T)$, de prix d'exercice K et d'échéance t^*, telle que $t^* < T$.

Le prix de l'obligation zéro-coupon $B(t,t^*)$ satisfait, de même, l'EDS suivante :

$$\frac{\mathrm{d}B(t,t^*)}{B(t,t^*)} = r(t)\mathrm{d}t - \frac{\delta}{a}\left[1 - \mathrm{e}^{-a(t^*-t)}\right]\mathrm{d}\widehat{Z'}.$$

La formule de Merton donne immédiatement l'expression de la valeur de l'option proposée par JAMSHIDIAN (1989). Il suffit, à nouveau, de remplacer dans (12), S(t) par $B(t,T)$, $B(t,T)$ par $B(t,t^*)$ et k par 1. Soit, pour un *call* :

$$C(t) = B(t,T)\cdot N(\mathrm{d}_1) - K\cdot B(t,t^*)\cdot N(\mathrm{d}_2),$$

avec :

$$\mathrm{d}_1 = \frac{\mathrm{Log}\dfrac{B(t,T)}{KB(t,t^*)} + \dfrac{1}{2}\widehat{\sigma}^2\tau}{\widehat{\sigma}\sqrt{\tau}} \quad \text{et} \quad \mathrm{d}_2 = \mathrm{d}_1 = \widehat{\sigma}\sqrt{\tau}$$

et

$$\widehat{\sigma}^2 = \frac{1}{t^*-t}\int_t^{t^*} \frac{\delta^2}{a^2}\left\{\left[1-\mathrm{e}^{-a(T-u)}\right]^2 + \left[1-\mathrm{e}^{-a(t^*-u)}\right]^2 - 2\left[1-\mathrm{e}^{-a(T-u)}\right]\left[1-\mathrm{e}^{-a(t^*-u)}\right]\right\}\mathrm{d}u.$$

Après intégration, on obtient, pour $\widehat{\sigma}^2$:

$$\widehat{\sigma}^2 = \frac{1}{t^* - t} \times \frac{\delta^2}{2a^3} \left[1 - \mathrm{e}^{-2a(t^*-t)}\right] \left[1 - \mathrm{e}^{-a(T-t^*)}\right]^2 .$$

Les modèles à structure de volatilité linéaire et exponentielle, retenus, ici, à titre d'illustration, pour évaluer une option sur une obligation zéro-coupon sans risque de défaut, fournissent la clé de l'évaluation de bien d'autres produits optionnels. Des formules fermées ont ainsi pu être obtenues pour les obligations à coupons sans risque de défaut (JAMSHIDIAN, 1989; EL KAROUI et ROCHET, 1989), les *caps*, les *floors*, les *collars* et les options de taux asiatiques... (GEMAN et YOR, 1993; QUITTARD-PINON, 1995).

Naturellement, d'autres voies peuvent être envisagées pour évaluer les options de taux, les processus alternatifs d'évolution des taux d'intérêt pouvant conduire à des solutions par intégration numérique ou par arborescence (HO et LEE, 1986; HEATH, JARROW et MORTON, 1990; HULL et WHITE, 1993).

CONCLUSION

Quelles que soient les critiques que l'on peut formuler quant au choix des hypothèses retenues dans les modèles présentés ici (volatilité constante ou à structure déterministe, possibilités de taux négatifs...), la méthode d'évaluation par martingale s'est révélée d'une très grande efficacité pour fournir des formules fermées à plusieurs problèmes d'évaluation d'option. Les formules classiques, obtenues par les pionniers de la théorie des options par résolution d'équations aux dérivées partielles, ont pu être facilement redémontrées. Il convient, d'ailleurs, d'observer que le théorème de Feynman- Kac permet de passer très facilement de l'EDP régissant la valeur d'une option à la formulation en terme d'espérance et donc de faire le lien entre les deux approches[23].

Tous les problèmes d'évaluation d'option ne peuvent cependant être résolus par un calcul d'espérance. En l'absence de solution analytique, force est alors de recourir à l'outil numérique, qu'il s'agisse des méthodes par arborescences, de celles de simulation par la méthode de Monte-Carlo ou bien, encore, des techniques de résolution numérique d'EDP à l'aide de différences finies ou par éléments finis.

RÉFÉRENCES BIBLIOGRAPHIQUES

ALBIZATTI M.O. (1996), *Quelques aspects de la gestion des risques en assurance : une approche financière et probabiliste*, thèse, Université de Reims.

AUGROS J.C. (1989), *Les options sur taux d'intérêt*, Paris, Economica.

AUGROS J.C. (1997), *Les options de taux d'intérêt*, Encyclopédie des Marchés Financiers, Economica.

BACHELIER L. (1900), *Théorie de la spéculation*, Paris, Gautier-Villars et in P.H. Cootner ed (1967) "The Random Character of Stock Market Prices", Cambridge, M.I.T. Press.

BARONE-ADESI G. and WHALEY R. (1987), "Efficient Analytic Approximation of American Option Values", *Journal of Finance*, Vol. 42, p. 301-320.

BLACK F. (1976), "The Pricing of Commodity Contracts", *Journal of Financial Economics*, 3, p. 167-179.

BLACK F. et SCHOLES M. 1973), "The Pricing of Options and Corporate Liabilities", *Journal of Political Economy*, 81, p. 637-654.

BRIYS E. et de VARENNE F. (1994), "Life Insurance in a Contingent Claim Framework : Pricing and Regulatory Implications", *The Geneva Papers on Risk and Insurance Theory*, Vol. 19, p. 53-72.

COX J., ROSS S. et RUBINSTEIN M. (1979), "Option Pricing, a Simplified Approach", *Journal of Financial Economics*, 7, p. 229-264.

COX J. et RUBINSTEIN M. (1985), *Options Markets*, Prentice Hall, Englewood Cliffs, New Jersey.

DEVOLDER P. (1993), *Finance stochastique*, Editions de l'Université de Bruxelles, collection actuariat.

DANA R.A. et JEANBLANC-PICQUE M. (1994), *Marchés financiers en temps continu : valorisation et équilibre*, Paris, Economica.

EL KAROUI N. et ROCHET J.C. (1989), "A Pricing Formula for Options on Coupon-Bonds", papier de recherche, *Université de Paris VI.*

GEMAN H. (1989), "The Importance of the Forward-risk Adjusted Probability in a Stochastic Approach of Interest Rates" *Essec Working Paper.*

GEMAN H. et YOR M. (1993), "Bessel Processes, Asian Options and Perpetuities", *Mathematical Finance*, 4.

GODOUNOV S. (1973), *Equations de la physique mathématique*, éditions MIR, Moscou.

HARRISON J.M. et KREPS D. (1979), "Martingales and Arbitrage in Multiperiod Securities Markets", *Journal of Economic Theory*, 20, p. 381-408.

HARRISON J.M. et PLISKA S. (1981), "Martingales and Stochastic Integrals in the Theory of Continuous Trading", *Stochastic Processes and their Applications*, 11, p. 215-260.

HEATH D., JARROW R. et MORTON A. (1990), "Bond Pricing and the Term Structure of Interest Rates : a Discrete Time Approximation", *Journal of Financial and Quantitative Analysis*, vol. 25, n° 4, décembre, p. 419-441.

HEATH D., JARROW R. et MORTON A. (1992), "Bond Pricing and the Term Structure of Interest Rates : a New Methodology for Contingent Claims Valuation", *Econometrica*, vol. 60, p. 77-105.

HO T.S.Y. et LEE S.B. (1986), "Term Structure Movements and Pricing Interest Rate Contingent Claims", *Journal of Finance*, p. 1011-1029.

HULL J. et WHITE A. (1993), "One-Factor Interest Rate Models and the Valuation of Interest Rate Derivative Securities", *Journal of Financial and Quantitative Analysis*, 28.

JAMSHIDIAN F. (1989), "An Exact Bond Option Formula", *Journal of Finance*, 44, p. 205-209.

MERTON R.C. (1973), "Theory of Rational Option Pricing", *Bell Journal of Economics and Management Science*, p. 141-183.

QUITTARD-PINON F. (1993), *Marchés des capitaux et théorie financière*, Paris, Economica.

QUITTARD-PINON F. (1995), "Formules fermées pour caps, floors et options asiatiques sur taux d'intérêt", *Journal de la Société de Statistique de Paris*, 4ème trimestre.

VASICEK O. (1977), "An Equilibrium Characterization of the Term Structure", *Journal of Financial Economics*, 5, p. 177-188.

ANNEXES

[1] L'évolution incertaine, au cours du temps, d'une variable économique aléatoire, telle qu'un cours boursier, peut être décrite par un processus stochastique, c'est-à-dire par une collection de variables aléatoires X(t) définies sur un espace probabilisé (Ω, F, Π) muni d'une filtration $\mathcal{F}$.

Ω représente l'ensemble des états de la nature. A chaque état élémentaire de la nature, ω, correspond une valeur possible de la variable économique. A une date t quelconque, pour un état élémentaire ω donné, la variable prend une valeur notée $X(t, w)$ ou $X(t)$. *Ex post* l'ensemble des valeurs $X(t)$ observées constitue la trajectoire du processus.

F est une tribu sur Ω, c'est-à-dire un sous-ensemble de l'ensemble $B(\Omega)$ des parties de Ω. Une tribu permet de structurer l'information de manière cohérente. A cette fin elle doit respecter les conditions suivantes :

- $\Omega \in F$,
- si l'événement $A \in F$, alors l'événement complémentaire de A, $(\Omega - A) \in F$,
- la réunion d'une famille dénombrable d'éléments de F appartient aussi à F.

Le couple (Ω, F) constitue un espace probabilisable ou mesurable. La notion de mesure signifie que l'on peut affecter une probabilité aux événements de F. Soit Π une probabilité sur (Ω, F) i.e. une fonction de F à valeur dans [0, 1] telle que : $\Pi(\varnothing) = 0$, $\Pi(\Omega) = 1$, $\Pi(A \cup B) = \Pi(A) + \Pi(B)$ pour A, $B \in \Omega$ et $A \cap B = \varnothing$. Le triplet (Ω, F, Π) forme un espace probabilisé.

$\mathcal{F}$ désigne une filtration, c'est-à-dire une famille croissante de sous-tribus F_t de F telle que : $F_t \subset F$ et $F_t \subset F_s$, avec $t < s$. F_t symbolise l'information disponible à la date t, tous les événements passés étant gardés en mémoire.

Un processus peut être associé à une filtration $\mathcal{F}$. On dit alors que le processus est adapté à la filtration, c'est-à-dire que $X(t)$ est F_t mesurable pour tout t, toute l'information relative à l'histoire du processus jusqu'à l'instant t étant contenue dans F_t.

Soit un espace probabilisé (Ω, F, Π) muni d'une filtration $\mathcal{F}$. Un processus stochastique X, adapté à la filtration $\mathcal{F}$ et intégrable [c.à d. tel que $E[X(t)] < \infty$], est une martingale si :

$$E[X(s)|F_t] = X(t), \quad \forall s \geqslant t$$

où $E[.|.]$ désigne l'opérateur espérance conditionnel.

Si X est, par exemple, le cours d'une action, alors la meilleure prévision en t du cours de l'action en s (avec $s > t$) est le cours constaté en t.

En finance, le cours d'un titre est souvent modélisé par un processus d'Itô tel que :

$$X(t) = X(0) + \int_0^t \mu(s) \cdot \mathrm{d}s + \int_0^t \sigma(s) \cdot \mathrm{d}Z(s) \quad \text{ou} \quad \mathrm{d}X(t) = \mu(t) \cdot \mathrm{d}t + \sigma(t) \cdot \mathrm{d}Z(t)$$

où $Z(t)$ est un brownien standard, avec : $Z(0) = 0$; Z est un processus à accroissements indépendants et stationnaires ; $Z(t) - Z(s)$ suit une loi normale $N(0, \sqrt{t-s})$ avec $t > s$.

$\mu(t)$ représente la tendance ou dérive du processus et $s(t)$ son coefficient de diffusion.

Un processus d'Itô n'est une martingale que si sa dérive est nulle.

[2] Soit $R(t)$ la valeur, à la date t, d'un portefeuille d'arbitrage autofinancé, composé, par exemple, de $n(t)$ *calls*, de valeur $C(t)$, et de $q(t)$ actions, de valeur $S(t)$, telle que :

$$R(t) = n(t) \cdot C(t) + q(t) \cdot S(t)$$

Grâce au lemme d'Itô, la variation du portefeuille au cours d'un instant dt s'écrit :

$$\mathrm{d}R = n \cdot \mathrm{d}C + q \cdot \mathrm{d}S + C \cdot \mathrm{d}n + S \cdot \mathrm{d}q + \mathrm{d}S \cdot \mathrm{d}q + \mathrm{d}C \cdot \mathrm{d}n$$

Le portefeuille étant autofinancé (aucun retrait, ni apport de fonds) : $\mathrm{d}R = n \cdot \mathrm{d}C + q \cdot \mathrm{d}S$.

En effet, si l'on pose : $A = C \cdot \mathrm{d}n + S \cdot \mathrm{d}q + \mathrm{d}S \cdot \mathrm{d}q + \mathrm{d}C \cdot \mathrm{d}n$, il est facile de vérifier que $A = 0$.

Il est équivalent d'écrire :

$$A = (C + \mathrm{d}C) \cdot \mathrm{d}n + (S + \mathrm{d}S) \cdot \mathrm{d}q = C(t + \mathrm{d}t) \cdot [n(t + \mathrm{d}t) - n(t)] + S(t + \mathrm{d}t) \cdot [q(t + \mathrm{d}t) - q(t)]$$

Le portefeuille étant autofinancé, les ressources disponibles en $t + \mathrm{d}t$ sont totalement réemployées. Par conséquent :

$$q(t) \cdot S(t + \mathrm{d}t) + n(t) \cdot C(t + \mathrm{d}t) = q(t + \mathrm{d}t) \cdot S(t + \mathrm{d}t) + n(t + \mathrm{d}t) \cdot C(t + \mathrm{d}t),$$

d'où : $A = 0$.

[3] Soit $R(t) = n(t) \cdot C(t) + q(t) \cdot S(t)$, un portefeuille d'arbitrage, avec $\mathrm{d}R = n \cdot \mathrm{d}C + q \cdot \mathrm{d}S$. D'après le lemme d'Itô, il vient :

$$\mathrm{d}C = C_S \mathrm{d}S + C_t \mathrm{d}t + \frac{1}{2} C_{SS} (\mathrm{d}S)^2 \quad \text{avec} \quad (\mathrm{d}S)^2 = S^2 \sigma^2 \mathrm{d}t$$

En choisissant, par exemple, $n = -1$ et $q = C_S$, et en l'absence d'opportunité d'arbitrage (AOA), le portefeuille est sans risque. Il rapporte donc le taux sans risque. D'où :

$$\frac{\mathrm{d}R}{R} = r \cdot \mathrm{d}t$$

En remplaçant R, $\mathrm{d}R$ et $\mathrm{d}C$ par leurs expressions respectives, on obtient l'EDP de Black et Scholes telle que :

$$\frac{1}{2}S^2\sigma^2 C_{SS} + rSC_S - rC + C_t = 0 \quad \text{ou} \quad \frac{1}{2}S^2\sigma^2 C_{SS} + rSC_S - rC - C_\tau = 0$$

[4] En posant :

$$C(S,\tau) = \mathrm{e}^{-r\tau} Y(S',\tau'),$$

avec :

$$S' = \frac{2}{\sigma^2}\left(r - \frac{1}{2}\sigma^2\right)\left[\mathrm{Log}\frac{S}{K} + \left(r - \frac{1}{2}\sigma^2\right)\tau\right]$$

et

$$\tau' = \frac{2}{\sigma^2}\left(r - \frac{1}{2}\sigma^2\right)^2 \tau,$$

l'EDP de Black et Scholes prend la forme de l'EDP de la chaleur ; il vient en effet : $Y_{\tau'} = Y_{S'S'}$ avec les conditions à l'échéance suivantes :

$$Y(S',0) = K\left\{\exp\left[S'\left(\frac{\sigma^2}{2}\right) \div \left(r - \frac{1}{2}\sigma^2\right)\right] - 1\right\}$$

si $S' > 0$ et $Y(S',0) = 0$ si $S' \leqslant 0$.

La solution de l'EDP de la chaleur est donnée notamment par Godounov (1973), sous la forme d'une intégrale de Poisson. Le calcul complet de cette intégrale, simple mais fastidieux, est fournit par Devolder (1993).

[5] En posant, par exemple, $u = \frac{1}{d} = \mathrm{e}^{\sigma\sqrt{\Delta t}}$, la valeur de l'option, obtenue en réduisant progressivement l'intervalle de temps Δt, admet comme limite la valeur donnée par la formule de BS.

[6] Soit p' la probabilité de hausse du cours du titre dans un univers neutre à l'égard du risque. Dans cet univers, le rendement espéré du titre au cours d'un instant Δt est égal au taux sans risque $(\widehat{r} - 1)$. Il vient, par conséquent :

$$E\left(\frac{\Delta S}{S}\right) = \frac{uS - S}{S} \times p' + \frac{\mathrm{d}S - S}{S} \times (1 - p') = \widehat{r} - 1.$$

On vérifie, après simplification, que $p' = \dfrac{\widehat{r} - d}{u - d} = p$.

[7] D'après le théorème de Girsanov, il existe une probabilité P, équivalente à la probabilité historique Π, pour laquelle le processus $\widehat{Z}(t) = Z(t) + \lambda t$ est un mouvement brownien standard. λ désigne le prix de marché du risque d'un titre représenté ici par une constante, telle que : $\lambda = \dfrac{\mu - r}{\sigma}$.

On en déduit que $\mathrm{d}Z = \mathrm{d}\widehat{Z} - \dfrac{\mu - r}{\sigma}\mathrm{d}t$ et, en remplaçant dans l'équation $\mathrm{d}S = S \cdot \mu \cdot \mathrm{d}t + S \cdot \sigma \cdot \mathrm{d}Z$, $\mathrm{d}Z$ par sa valeur, on obtient :

$$\frac{\mathrm{d}S}{S} = r \cdot \mathrm{d}t + \sigma \cdot \mathrm{d}\widehat{Z}.$$

La dérive de l'équation précédente étant égale au taux sans risque, on vérifie que la probabilité P est bien la probabilité risque-neutre. La densité de P par rapport à Π est définie sur (Ω, F_T) par la densité ou dérivée de RADON-NIKODYM, telle que :

$$\frac{\mathrm{d}P}{\mathrm{d}\Pi} = \mathrm{e}^{-\int_0^T \lambda \mathrm{d}Z - \frac{1}{2}\int_0^T \lambda^2 \mathrm{d}t}.$$

On vérifie également que, sous la probabilité risque-neutre, le processus des prix actualisés est une martingale. Désignons, par exemple, par $\overline{S}$ la valeur actuelle à la date 0 du prix $S(t)$ d'une action, telle que $\overline{S} = S(t) \cdot \mathrm{e}^{-rt}$, avec $t > 0$; il vient, grâce au lemme d'Itô :

$$\mathrm{d}\overline{S} = \mathrm{e}^{-rt}\mathrm{d}S - rS\mathrm{e}^{-rt}\mathrm{d}t.$$

En remplaçant $\mathrm{d}S$ par son expression $\mathrm{d}S = S \cdot r \cdot \mathrm{d}t + S \cdot \sigma \cdot \mathrm{d}\widehat{Z}$, il vient :

$$\mathrm{d}\overline{S} = \overline{S} \cdot \sigma \cdot \mathrm{d}\widehat{Z}.$$

La dérive du processus, représenté ici par un processus d'Itô, étant nulle, on vérifie que le processus du prix actualisé de l'action est une martingale sous la probabilité risque-neutre.

[8] $\dfrac{\mathrm{d}S}{S} = r \cdot \mathrm{d}t + \sigma \cdot \mathrm{d}\widehat{Z}$; on pose $X = \operatorname{Log} S$. Selon le lemme d'Itô, il vient :

$$\mathrm{d}X = \frac{\mathrm{d}S}{S} - \frac{1}{2}\left(\frac{\mathrm{d}S}{S}\right)^2 = \left(r - \frac{1}{2}\sigma^2\right)\mathrm{d}t + \sigma\mathrm{d}\widehat{Z}.$$

En intégrant de t à T, on obtient :

$$\operatorname{Log}\frac{S(T)}{S(t)} = \left(r - \frac{1}{2}\sigma^2\right)(T - t) + \sigma(\widehat{Z}(T) - \widehat{Z}(t))$$

ou

$$S(T) = S(t)\exp\left[\left(r - \frac{1}{2}\sigma^2\right)(T - t) + \sigma(\widehat{Z}(T) - \widehat{Z}(t))\right].$$

[9] Avec r constant, il vient, d'après (2) :

$$C(t) = \mathrm{e}^{-r\tau} E_p\left\{(S(T) - K)^+ | F_t\right\}, \quad \text{avec} \quad \tau = T - t,$$

$$C(t) = \mathrm{e}^{-r\tau} \int_{S(T)>K} [S(T) - K] \cdot [\text{densité}\, S(T)]\, \mathrm{d}S(T)$$

avec : $S(T) = S(t)\exp\left[\left(r - \frac{1}{2}\sigma^2\right)\tau + \varepsilon\sigma\sqrt{\tau}\right] = S(t)\mathrm{e}^v$, où : $\varepsilon \to N(0,1)$,

et $\qquad S(t) > K \Leftrightarrow \varepsilon > -\mathrm{d}_2 \quad \text{avec} \quad \mathrm{d}_2 = \dfrac{\mathrm{Log}\dfrac{S(t)}{K} + \left(r - \dfrac{1}{2}\sigma^2\right)\tau}{\sigma\sqrt{\tau}}$.

$$C(t) = S(t) \underbrace{\int_{\varepsilon>-\mathrm{d}_2} \mathrm{e}^{(v-r\tau)} \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \mathrm{e}^{-\frac{\varepsilon^2}{2}} \mathrm{d}\varepsilon}_{B} - \mathrm{e}^{-r\tau} K \underbrace{\int_{\varepsilon>-\mathrm{d}_2} \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \mathrm{e}^{\frac{-\varepsilon^2}{2}} \mathrm{d}\varepsilon}_{A},$$

avec $A = N(\mathrm{d}_2)$.
Par ailleurs, en posant $\varepsilon' = \varepsilon - \sigma\sqrt{\tau}$, on vérifie facilement que $B = N(\mathrm{d}_1)$

[10] Soit $F(t,T) = S(t) \cdot \mathrm{e}^{r\tau}$, avec $\tau = T - t$.
Grâce au lemme d'Itô, il vient : $\mathrm{d}F = \mathrm{e}^{r\tau}\mathrm{d}S - rS\mathrm{e}^{r\tau}\mathrm{d}t$.
Comme $\mathrm{d}S = S \cdot \mu \cdot \mathrm{d}t + S \cdot \sigma \cdot \mathrm{d}Z$, on a :

$$\frac{\mathrm{d}F}{F} = (\mu - r) \cdot \mathrm{d}t + \sigma \cdot \mathrm{d}z.$$

[11] Soit l'opération suivante réalisée entre t et T (avec $\tau = T - t$).

et t	achat de l'actif au comptant	$-S$
	emprunt	$+S$
	vente de l'actif à terme au prix de livraison F pour l'échéance T	0
	Total	0

en T	remboursement du principal	$-S$
	paiement des intérêts	$-S\,(\mathrm{e}^{r\tau} - 1)$
	encaissement de la vente à terme	$+F$
	Total	$F - S\mathrm{e}^{r\tau}$

En l'absence d'opportunité d'arbitrage, on doit vérifier : $F = S\mathrm{e}^{r\tau}$.

Lorsque le taux r varie de manière stochastique au cours du temps, un raisonnement analogue permet de vérifier que $F = \dfrac{S(t)}{B(t,T)}$, où $B(t,T)$ représente le prix, en t, d'une obligation zéro-coupon qui rapporte 1 franc en T.

[12] On considère les deux opérations suivantes :

1) achat, en $t+\Delta t$, d'un contrat *forward* ancien, créé à la date t, pour un prix de livraison F et l'échéance T ;

2) vente, en $t+\Delta t$, d'un contrat *forward* nouveau, pour un prix de livraison uF (ou $\mathrm{d}F$) et l'échéance T.

Flux en $t+\Delta t$	Flux en T
$-V(t+\Delta t)$	$-F$
0	uF
$-V(t+\Delta t)$	$F(u-1)$

Les flux étant certains, l'investissement est sans risque : la somme des flux actualisés au taux sans risque est donc nulle :

$$-V(t+\Delta t) + F(u-1)\cdot \mathrm{e}^{-r(T-t-\Delta t)} = 0.$$

Soit, en posant $\tau = T - t$:

$$-V(t+\Delta t) = F(u-1)\cdot \mathrm{e}^{-r(\tau-\Delta t)} = F(u-1)\cdot B(t+\Delta t, T).$$

[13] Cette probabilité est définie, en temps discret, dès 1985 par Cox et Rubinstein, sans toutefois être qualifiée de *forward*-neutre. Ce vocable est apparu ultérieurement dans l'approche en temps continu.

[14] Comme le fait remarquer Merton (1977), les rendements instantanés respectifs de deux obligations zéro-coupon peuvent être corrélés, avec :

$$\frac{\mathrm{d}B(t,T_1)}{B(t,T_1)} \times \frac{\mathrm{d}B(t,T_2)}{B(t,T_2)} = \rho_{12}\cdot\delta(\tau_1)\cdot\delta(\tau_2)\cdot \mathrm{d}t.$$

En revanche, si l'on considère les rendements de deux obligations à des dates différentes, il n'existe pas de corrélation sérielle entre ces deux rendements et on vérifie que :

$$\frac{\mathrm{d}B(t_1,T)}{B(t_1,T_1)} \times \frac{\mathrm{d}B(t_2,T_2)}{B(t_2,T_2)} = 0.$$

[15] La probabilité *forward*-neutre Q_T est définie sur (Ω, F_T) par la densité de Radon-Nikodym, telle que :

$$\frac{\mathrm{d}Q_T}{\mathrm{d}P} = \mathrm{e}^{-\int_0^T \delta(\tau)\mathrm{d}\hat{Z}' - \frac{1}{2}\int_0^T \delta^2(\tau)\mathrm{d}t} \;;\quad \text{on pose } f = \frac{\mathrm{d}Q_T}{\mathrm{d}P},$$

f étant une variable aléatoire F_T-mesurable ; il est équivalent d'écrire :

$$Q_T(A) = E_p(f \times 1_A).$$

Rappelons que, sous P,

$$\frac{\mathrm{d}B(t,T)}{B(t,T)} = r \cdot \mathrm{d}t - \delta(\tau) \cdot \mathrm{d}\widehat{Z'} \tag{7}$$

Soit $X = \operatorname{Log} B(t,T)$; grâce au lemme d'Itô, on a :

$$\mathrm{d}X = \frac{\mathrm{d}B(t,T)}{B(t,T)} - \frac{1}{2}\left[\frac{\mathrm{d}B(t,T)}{B(t,T)}\right]^2.$$

En remplaçant $\frac{\mathrm{d}B}{B}$ par son expression donnée par (7) et après intégration de 0 à T, on obtient :

$$B(T,T) = B(0,T)\mathrm{e}^{\int_0^T r(s)\mathrm{d}s - \int_0^T \delta(\tau)\mathrm{d}\hat{Z}' - \frac{1}{2}\int_0^T \delta^2(\tau)\mathrm{d}s} = 1,$$

d'où

$$f = \frac{\mathrm{d}Q_T}{\mathrm{d}P} = \frac{-\mathrm{e}^{\int_0^T r(s)\mathrm{d}s}}{B(0,T)}.$$

Il est possible d'exprimer l'espérance conditionnelle d'une variable X sous Q_T par rapport à l'espérance conditionnelle sous P. On a :

$$E_{Q_T}(X|F_t) = \frac{E_p(Xf|F_t)}{E_p(f|F_t)}.$$

Sachant que $B(t,T) = E_p\left[\mathrm{e}^{-\int_t^T r(s)\mathrm{d}s}|F_t\right]$, en remplaçant dans la relation ci-dessus X par $(S(T)-K)^+$, on retrouve la relation (11) donnant le prix d'une option sous forme d'une espérance sous Q_T.

[16] D'après (11) :

$$C(t) = B(t,T)E_{Q_T}\left[(S(T)-K)^+|F_t\right];$$

avec :

$$S(T) = F(t,T)\cdot \mathrm{e}^u = \frac{S(t)}{B(t,T)}\mathrm{e}^u,$$

où u suit la loi normale $N\left(-\frac{1}{2}\tau\widehat{\sigma}^2, \widehat{\sigma}\sqrt{\tau}\right)$.

$C(t)$ est équivalent à une option européenne, de durée τ, portant sur un sous-jacent valant $S(t)$ et dont la volatilité est égale à $\widehat{\sigma}$. Le prix d'exercice étant égal à $KB(t,T)$ et le taux sans risque égal à 0, par analogie avec la formule de BLACK et SCHOLES, on obtient, de manière immédiate, la formule (12).

[17] Dans l'univers risque-neutre, la dynamique du prix de l'obligation zéro-coupon $B(t,T)$ est définie par l'EDS suivante :

$$\frac{\mathrm{d}B(t,T)}{B(t,T)} = r(t) \cdot \mathrm{d}t - \delta \cdot (T-t) \cdot \mathrm{d}\widehat{Z'}$$

En posant $X = \operatorname{Log} B(t,T)$, il vient, grâce au lemme d'Itô :

$$\mathrm{d}X = \frac{\mathrm{d}B(t,T)}{B(t,T)} - \frac{1}{2}\left[\frac{\mathrm{d}B(t,T)}{B(t,T)}\right]^2 = \left[r(t) - \frac{1}{2}\delta^2(T-t)^2\right]\mathrm{d}t - \delta \times (T-t)\mathrm{d}\widehat{Z'}.$$

En intégrant de s à t (avec $s < t$), on obtient :

$$\operatorname{Log} B(t,T) = \operatorname{Log} B(s,T) + \int_s^t r(u)\mathrm{d}u - \int_s^t \delta \times (T-u)\mathrm{d}\widehat{Z'} - \frac{1}{2}\int_s^t \delta^2(T-u)^2\mathrm{d}u.$$

Puis, en dérivant par rapport à T, il vient :

$$\frac{\partial \operatorname{Log} B(t,T)}{\partial T} = \frac{\partial \operatorname{Log} B(s,T)}{\partial T} - \int_s^t \delta \mathrm{d}\widehat{Z'} - \int_s^t \delta^2(T-u)\mathrm{d}u,$$

$$-f(t,T) = -f(s,T) - \delta\left[\widehat{Z'}(t) - \widehat{Z'}(s)\right] - \delta^2(t-s)\left[T - \frac{(t+s)}{2}\right];$$

pour $T = t$:

$$f(t,t) = r(t) = f(s,t) + \frac{\delta^2(t-s)^2}{2} + \delta \times \left[\widehat{Z'}(t) - \widehat{Z'}(s)\right].$$

[18] La relation (12) peut également être obtenue en posant :

$$y(F,x) = h(F,\tau) \quad \text{avec : } \quad x = \widehat{\sigma}^2\tau = \int_0^\tau V(u)^2\mathrm{d}u;$$

Il vient : $h_\tau = y_x \cdot V(t)^2$ et $h_{FF} = y_{FF}$. L'EDP (18) s'écrit :

$$\frac{1}{2}F^2 y_{FF} - y_x = 0.$$

Y peut alors s'interpréter comme le prix d'un call européen portant sur un sous-jacent de valeur F et de volatilité égale à 1, dont le prix d'exercice serait égal à K, la durée de vie égale à $\widehat{\sigma}^2\tau$ et ce, en présence de taux d'intérêt nuls.

[19] $F(t,t^*,T) = \dfrac{B(t,T)}{B(t,t^*)}$.

A l'aide du lemme d'Itô, on obtient :

$$\frac{\mathrm{d}F(t,t^*,T)}{F(t,t^*,T)} = \frac{\mathrm{d}B(t,T)}{B(t,T)} - \frac{\mathrm{d}B(t,t^*)}{B(t,t^*)} + \left[\frac{\mathrm{d}B(t,t^*)}{B(t,t^*)}\right]^2 - \frac{\mathrm{d}B(t,T)}{B(t,T)}\frac{\mathrm{d}B(t,t^*)}{B(t,t^*)}.$$

Sous la probabilité risque-neutre, on a :

$$\frac{\mathrm{d}B(t,T)}{B(t,T)} = r(t)\cdot \mathrm{d}t - \delta\cdot(T-t)\cdot \mathrm{d}\widehat{Z'} \quad \text{et} \quad \frac{\mathrm{d}B(t,t^*)}{B(t,t^*)} = r(t)\cdot \mathrm{d}t - \delta\cdot(t^*-t)\cdot \mathrm{d}\widehat{Z'}$$

d'où :

$$\frac{\mathrm{d}F(t,t^*,T)}{F(t,t^*,T)} = \delta^2\left[(t^*-t)^2 - (T-t)(t^*-t)\right]\mathrm{d}t + \delta\times(t^*-T)\mathrm{d}\widehat{Z'};$$

on pose

$$\mathrm{d}Z_{t^*} = \mathrm{d}\widehat{Z'} + \delta\times(t^*-t)\mathrm{d}t \quad \text{soit} \quad \mathrm{d}\widehat{Z'} = \mathrm{d}Z_{t^*} - \delta\times(t^*-t)\mathrm{d}t;$$

en remplaçant $\mathrm{d}\widehat{Z'}$ par son expression, on vérifie que :

$$\frac{\mathrm{d}F(t,t^*,T)}{F(t,t^*,T)} = \delta\times(t^*-T)\mathrm{d}Z_{t^*}.$$

[20] On pose $Y = \operatorname{Log} F(t,t*,T)$; d'après le lemme d'Itô, il vient :

$$\mathrm{d}Y = \frac{\mathrm{d}F(t,t^*,T)}{F(t,t^*,T)} - \frac{1}{2}\left[\frac{\mathrm{d}F(t,t^*,T)}{F(t,t^*,T)}\right]^2;$$

sachant que $\dfrac{\mathrm{d}F(t,t^*,T)}{F(t,t^*,T)} = \delta\times(t^*-T)\mathrm{d}Z_{t^*}$, il vient, en intégrant de t à t^* :

$$\operatorname{Log}\frac{F(t^*,t^*,T)}{F(t,t^*,T)} = -\frac{1}{2}\delta^2(t^*-T)^2(t^*-t) + \delta\times(t^*-T)\left(Z_{t^*}(t^*) - Z_{t^*}(t)\right).$$

Comme $F(t^*,t^*,T) = B(t^*,T)$ et que $F(t,t^*,T) = \dfrac{B(t,T)}{B(t,t^*)}$, il vient :

$$B(t^*,T) = \frac{B(t,T)}{B(t,t^*)}\exp\left[-\frac{1}{2}\delta^2(T-t^*)^2(t^*-t) - \delta\times(T-t^*)\left(Z_{t^*}(t^*) - Z_{t^*}(t)\right)\right].$$

[21] On montre facilement que l'on a, dans ce modèle, un processus markovien pour le taux spot. En effet, d'après (13) :

$$r(t) = f(s,t) + \frac{\delta^2(t-s)^2}{2} + \delta\left[\widehat{Z'}(t) - \widehat{Z'}(s)\right].$$

Soit :

$$dr = \left[f_t(s,t) + \delta^2(t-s)\right] dt + \delta d\widehat{Z'}(t),$$

où $f_t(s,t)$ désigne la dérivée de $f(s,t)$ par rapport à t.

Dans ce cas, le prix d'une obligation zéro-coupon possède une forme explicite (cf. QUITTARD-PINON, 1995). On vérifie également que $-k$ est le coefficient de corrélation entre le rendement non anticipé de l'action et les variations du taux sans risque.

[22] En suivant la même démarche que dans le cas linéaire, on peut montrer que $r(t)$ est un processus d'ORNSTEIN-UHLENBECK, tel que :

$$dr = \left\{f_t(s,t) + af(s,t) + \frac{\delta^2}{2a}\left[1 - e^{-2a(t-s)}\right] - ar\right\} dt + \delta d\widehat{Z'}.$$

[23] Le théorème de Feynman-Kac est énoncé ici dans un cadre unidimensionnel puis utilisé pour résoudre l'EDP de BLACK et SCHOLES.

Soit un processus d'Itô unidimensionnel défini par l'EDS suivante :

$$dX(t) = \mu(X,t) \cdot dt + \sigma(X,t) \cdot dZ(t).$$

Soit $f(X,t)$ une fonction de $X \in \mathbb{R}$ et de $t \in \mathcal{T} = [0,T]$, possédant des dérivées partielles continues f_t, f_X et f_{XX} (f est de classe $C^{2,1}$). Le processus $Y = \{Y(t) = f(X,t)\}$ est un processus unidimensionnel défini par :

$$dY(t) = f_t \cdot dt + f_x \cdot dX(t) + \frac{1}{2} f_{XX} \cdot [dX(t)]^2$$

que l'on peut écrire sous la forme :

$$dY(t) = \alpha(X,t) \cdot dt + \beta(X,t) \cdot dZ(t),$$

avec :

$$\alpha(X,t) = f_t + \mu(X,t) \cdot f_X + \frac{1}{2}\sigma(X,t)^2 \cdot f_{XX} \quad \text{et} \quad \beta(X,t) = \sigma(X,t) \cdot f_X.$$

$\alpha(X,t)$ est le générateur différentiel sur X, appliqué à la fonction f, ou Dynkin, noté $\mathcal{D}[f(X,t)]$.

On considère quatre fonctions f, g, h et r avec :

$$\begin{aligned}
&f : \mathbb{R} \times \mathcal{T} \to \mathbb{R} \text{ de classe } C^{2,1} \\
&g : \mathbb{R} \to \mathbb{R} \\
&h : \mathbb{R} \times \mathcal{T} \to \mathbb{R} \\
&r : \mathbb{R} \times \mathcal{T} \to \mathbb{R}
\end{aligned}$$

La solution de l'EDP, définie par : $\mathcal{D}[f(X,t)] - r(X,t)\cdot f(X,t) + h(X,t) = 0$ où $f(X,T) = g[X(T)]$, est donnée par la solution de FEYNMAN-KAC telle que :

$$f(X,t) = E\left[\int_t^T \Phi(t,s)\cdot h(X,s)\cdot \mathrm{d}s + \Phi(t,T)\cdot g[X(T)]|X(t)\right]$$

avec

$$\Phi(t,s) = \exp\left(-\int_t^s r(X,u)\cdot \mathrm{d}u\right)$$

Le théorème de FEYNMAN-KAC permet d'écrire directement, sous forme d'espérance sous P, la solution de l'équation aux dérivées partielles de BLACK et SCHOLES qui régit la valeur d'une option.

Pour un *call*, il suffit de poser :

$$X = S,\ \mu(X,t) = rS,\ Z(t) = \widehat{Z}(t),\ \sigma(X,t) = \sigma S,\ f(X,t) = C(S,t),$$
$$g[X(T)] = C(S,T),\ r(X,t) = r \ \text{ et } \ h = 0.$$

Alors l'EDP à résoudre devient celle de BS dans le cas d'un *call* telle que :

$$\frac{1}{2}\sigma^2 S^2 C_{SS} + rSC_S + C_t - rC = 0, \quad \text{avec} \ \ C(S,T) = [S(T) - K]^+.$$

La solution de l'EDP peut alors s'écrire sous la forme suivante :

$$C(t) = E_P\left\{\mathrm{e}^{-\int_t^T r(u)\cdot \mathrm{d}u}\left[(S(T) - K)\right]^+|F_t\right\} = \mathrm{e}^{-r\tau}E_P\left[(S(T) - K)^+|F_t\right],$$

où r est une constante et où $S(T)$ est solution de l'EDS :

$$\mathrm{d}S = S\cdot r\cdot \mathrm{d}t + S\cdot \sigma\cdot \mathrm{d}\widehat{Z}.$$