

CHRISTIAN GOURIÉROUX

GAËLLE LE FOL

Volatilités et mesures du risque

Journal de la société statistique de Paris, tome 138, n° 4 (1997), p. 7-32

http://www.numdam.org/item?id=JSFS_1997__138_4_7_0

© Société de statistique de Paris, 1997, tous droits réservés.

L'accès aux archives de la revue « Journal de la société statistique de Paris » (<http://publications-sfds.math.cnrs.fr/index.php/J-SFdS>) implique l'accord avec les conditions générales d'utilisation (<http://www.numdam.org/conditions>). Toute utilisation commerciale ou impression systématique est constitutive d'une infraction pénale. Toute copie ou impression de ce fichier doit contenir la présente mention de copyright.

NUMDAM

Article numérisé dans le cadre du programme
Numérisation de documents anciens mathématiques

<http://www.numdam.org/>

VOLATILITÉS ET MESURES DU RISQUE

Christian GOURIÉROUX
CREST et CEPREMAP

Gaëlle LE FOL
CREST et CEME-Université Paris I

Résumé

Nous discutons la pertinence de mesurer le risque par les volatilités. Nous appuyant sur les études récentes sur données de cotation et sur la spécificité des produits dérivés, nous proposons des mesures complémentaires de façon à traiter les effets volumes et temps, et à tenir compte des asymétries.

Mots-clefs : risque, volatilité, activité, produits dérivés.

Abstract

We discuss the relevance of the volatility as a risk measure. By considering recent studies on tick by tick data and specific features of derivatives, we introduce alternative measures to take into account the time and volume effects, or the distributional asymmetry.

Keywords : risk measures, volatility, activity, derivative assets.

Classification J.E.L. : D81, D84.

1. Introduction

L'approche financière standard évalue le risque d'un investissement financier par l'intermédiaire de sa volatilité, c'est-à-dire de la variabilité de sa rentabilité future conditionnellement à l'information disponible. Il est apparu que cette mesure du risque était très variable dans le temps et en fonction de l'environnement. Ceci a conduit au développement très rapide des modèles ARCH (Autorégressifs conditionnellement hétéroscédastiques) introduits par ENGLE (1982) et BOLLERSLEV (1986) [voir ENGLE (1995), GOURIÉROUX (1997) pour des présentations générales de ces modèles]. Nous discutons dans le paragraphe 2 les apports et les limites de ces formulations. En fait, il semble que pour de nombreux problèmes l'observation des deux premiers moments des prix fournisse une description insuffisante des distributions et des marchés. Nous illustrons ces points à partir des analyses récentes effectuées sur les données de cotations (paragraphe 3) et des questions spécifiques aux produits dérivés (paragraphe 4). Finalement dans un dernier paragraphe, nous discutons des extensions de la mesure de risque que constitue la volatilité ; nous introduisons des mesures décomposant divers effets transaction, volume et prix, ainsi que des mesures fonctionnelles.

2. Apports et limites des modèles ARCH

L'introduction des modèles ARCH, leur comparaison avec d'autres formulations existantes, les résultats des estimations ont permis de repenser certaines notions, de conforter certaines pratiques et de s'opposer à d'autres, et ont contribué à dégager de nouvelles directions de recherche en théorie financière. En insistant sur le traitement symétrique des rendements anticipés et des variabilités des rendements (les volatilités), sur le fait que ces derniers pouvaient dépendre de l'évolution passée des prix, ils ont conforté les approches moyenne-variance après les avoir rendues plus dynamiques, et par exemple conduit à l'utilisation de matrices de volatilité-covolatilité pour la gestion des risques [voir la base Riskmetrics diffusée par JP Morgan et la valeur à risque (VaR) recommandée par le comité de Bâle]. Par la possibilité de calculer des intervalles de prévision pour des dynamiques non linéaires, ils ont donné une base scientifique aux approches chartistes, et une nouvelle jeunesse aux comportements associés. L'analogie entre ces formulations en temps discret et les modèles en temps continu, établie par NELSON (1990b), a conduit à développer les modèles à volatilité stochastique, et à remettre de plus en plus en question l'hypothèse de marchés complets, dont l'une des conséquences principales est la possibilité de valoriser sans erreurs les produits dérivés.

Cependant l'inflation récente de variantes du modèle de base et des terminologies : GARCH, IGARCH, EGARCH, TARCH, QTARCH, SWARCH, ACD-GARCH révèle que cette approche semble avoir atteint des limites, ne pas pouvoir répondre de façon adéquate à certaines questions, ou ne pas permettre de reproduire certains faits stylisés.

Les raisons en sont profondes et diverses.

i) L'hypothèse selon laquelle le risque peut être bien résumé par un indicateur du type volatilité semble trop restrictive. Cet indicateur reste global et ses variations peuvent être dues à de nombreux effets structurels, qu'il faudrait commencer à distinguer.

ii) La dynamique de type quadratique est trop spécifique et traduit mal divers effets de seuils ou de réactions asymétriques [CAMPBELL-HENTSCHEL (1992)]. Ainsi le phénomène de persistance de volatilité, c'est-à-dire de racine unitaire dans l'équation correspondante, mis en évidence dès les premières applications des modèles ARCH [NELSON (1990a)], est vraisemblablement conséquence de telles erreurs de spécification dynamique [ANDERSON-BOLLERSLEV (1994), LAMOUREUX-LASTRAPES (1990)].

iii) Le modèle ARCH est présenté comme nécessitant uniquement des spécifications de moments conditionnels d'ordre un et deux, mais pas de l'ensemble de la loi. Il se prête alors très mal à l'étude des produits dérivés, dont les lois sont asymétriques et multimodales.

iv) La formulation ne considère que les seules évolutions de prix. Or en marché incomplet, celles-ci peuvent ne pas être autonomes. Elles doivent être étudiées en même temps que les volumes échangés par exemple, d'où la forte significativité des effets volumes dans certaines estimations récentes [KARPOFF (1987), LAMOUREUX-LASTRAPES (1991), GALLANT-ROSSI-TAUCHEN (1992), CAMPBELL-GROSSMAN-WAND(1993)].

3. Données de cotations

Des données de cotations, comportant de l'information sur tous les contrats passés [heure, type de contrats, identifiants des contractants, prix, volume] et sur l'état du marché [ordres en attente], sont largement disponibles depuis que les principaux marchés sont gérés par l'intermédiaire de systèmes électroniques. L'analyse de ces données intra-journalières a mis en évidence qu'une volatilité calculée sur la journée est un agrégat, mêlant des aspects assez différents, certains liés à la fréquence des transactions. Elle a aussi fourni des informations importantes sur des non linéarités sous-jacentes auparavant assez négligées, telles des non stationnarités déterministes (dites saisonnalités intra-journalières), des asymétries ... Finalement l'étude des procédures automatiques d'appariements conduit à lier l'évolution des volatilités à celle des courbes d'offre et de demande au voisinage de l'équilibre. Nous allons successivement discuter ces divers points.

3.1 Dates de transaction, volumes et prix

La description précise des données de cotations conduit à distinguer divers processus sous-jacents, repérant les dates auxquelles se produisent les transactions, les volumes de celles-ci et les modifications de prix qui leur correspondent.

Formellement, nous pouvons introduire une date 0 origine du temps et considérer un temps calendaire continu. Nous définissons :

le processus $N(t)$, $t \geq 0$ comptant le nombre de transactions avant la date t (les instants de saut fournissent les dates de transaction) ;

le processus $\vartheta_1, \vartheta_2, \dots, \vartheta_j, \dots$ donnant les volumes échangés lors de ces transactions ;

le processus $\delta_1, \delta_2, \dots, \delta_j, \dots$ donnant les modifications de prix entre les $(j-1)^{\text{ème}}$ et $j^{\text{ème}}$ transactions.

Le prix à la date t est alors :

$$p_t = p_0 + \sum_{j=1}^{N(t)} \delta_j; \quad (3.1)$$

le volume global échangé entre 0 et t est :

$$V_t = \sum_{j=1}^{N(t)} \vartheta_j. \quad (3.2)$$

Supposons pour la discussion que le début de journée soit en 0 et la fin de journée en T . Les données journalières habituellement considérées sont $p_T - p_0$ et V_T . Ces agrégats dépendent des trois "facteurs" sous-jacents $[N(t), (\vartheta_j), (\delta_j)]$, et cette remarque conduit à plus de prudence dans les interprétations .

Ainsi la volatilité journalière $[V_0(p_T)]^{\frac{1}{2}}$ cumule des effets liés à l'indétermination sur les dates de cotations et sur les modifications de prix entre deux transactions successives [voir e.g. FOSTER-VISWANATHAN (1995)] ; le processus $(N(t), t \geq 0)$ repérant les dates est commun aux variables prix et volumes, d'où des liaisons fortes entre les deux séries. D'autres liaisons entre prix et volumes peuvent aussi résulter de corrélations instantanées entre les caractéristiques (δ_j, ϑ_j) d'un même contrat.

3.2 Temps calendaire et temps déformé

La formulation précédente a été introduite très tôt dans la théorie financière, bien que des bases de données adéquates ne soient pas encore disponibles [voir e.g. PRESS (1967), WESTERFIELD (1977)]. Elle a très vite conduit à se poser la question d'un temps adéquat [MANDELBROT-TAYLOR (1967), CLARK (1973)] et à étudier le processus d'arrivée des transactions $N(t)$ [HASBROUCK-HO (1987), MCINISH-WOOD (1991), GEORGE-LONGSTAFF (1993), ENGLE-RUSSEL (1995a, 1995b), GHYSELS-JASIAK (1996), GHYSELS-GOURIÉROUX-JASIAK (1996-1997)]. Faut-il travailler dans le temps calendaire usuel ou dans un temps déformé correspondant au nombre de cotations ? Cette question est fondamentale pour les définitions des volatilités, ces dernières étant relatives à

des périodes de temps prédéfinies (voir annexe). Faut-il s'intéresser à la volatilité des prix d'une cotation à la suivante, *i.e.* $V(\delta_j)$? ou à celle des prix de 5 mn en 5 mn, c'est-à-dire $V[p_{t+5} - p_t]$? Les deux approches apparaissent différentes, la déformation du temps ($N(t)$) étant elle-même fluctuante.

3.3 Non stationnarités

Des modèles ARCH ont été très rapidement estimés sur données intra-journalières (en temps calendaire ou déformé) et ont conduit à des estimations assez décevantes. En fait ces modèles ne prennent pas en compte d'éventuelles non stationnarités déterministes. Or il existe de fortes périodicités intra-journalières [ANDERSON-BOLLERSLEV (1994)], comme il en existe des hebdomadaires. Celles-ci concernent les trois types de composantes N , δ , ϑ , et les divers types de moments d'ordres 1, 2, 3, ... Elles résultent de comportements réguliers des intervenants, des marchés (ouverture, fermeture) ou des procédures automatiques de gestion [procédure d'appariement à l'ouverture différente de celle utilisée en cours de journée]. Afin d'illustrer cet aspect nous donnons ci-dessous diverses figures concernant le titre Alcatel pour les journées du 3 janvier au 19 janvier 1995 (hors ouverture). La figure 3.1 donne la fréquence de transaction. La figure 3.2 comporte sur le même graphique cet aspect périodique pour les moyennes des séries de variation positive et négative de prix, ainsi qu'une mesure de volatilité instantanée, chacune de ces séries étant calculée en temps calendaire et lissée.

3.4 Asymétrie

La figure 3.2 montre que les saisonnalités intra-journalières des séries de modifications positives $\delta_j^+ = \text{Max}(0, \delta_j)$, et négatives $\delta_j^- = \text{Max}(0, -\delta_j)$ de prix ne sont pas complètement identiques, mais présentent un décalage. Ceci suggère que la distribution des rendements pourrait présenter certaines asymétries. La figure 3.3 fournit la composante "saisonnrière" du coefficient d'asymétrie, montrant que celle-ci peut être très forte, mais n'est pas uniforme selon les moments de la journée.

Si la distribution des rendements peut être considérée comme symétrique entre 10 h et 13 h 30, ce n'est plus le cas après 13 h 30, le coefficient d'asymétrie atteignant jusqu'à 0,57 un peu avant 14 h 30. Cette asymétrie traduit vraisemblablement l'arrivée de nouveaux intervenants avant l'ouverture de la Bourse de New York.

VOLATILITÉS ET MESURE DU RISQUE

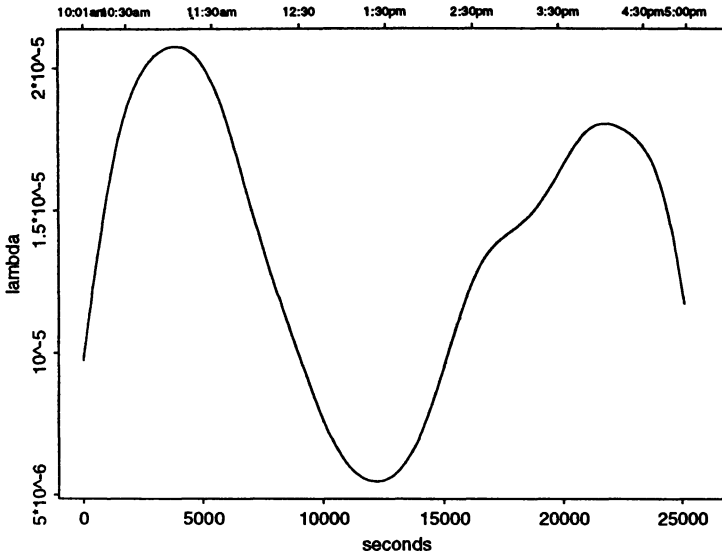


Fig. 3.1 : Fréquence de transaction $\hat{\lambda}(t)$, Alcatel

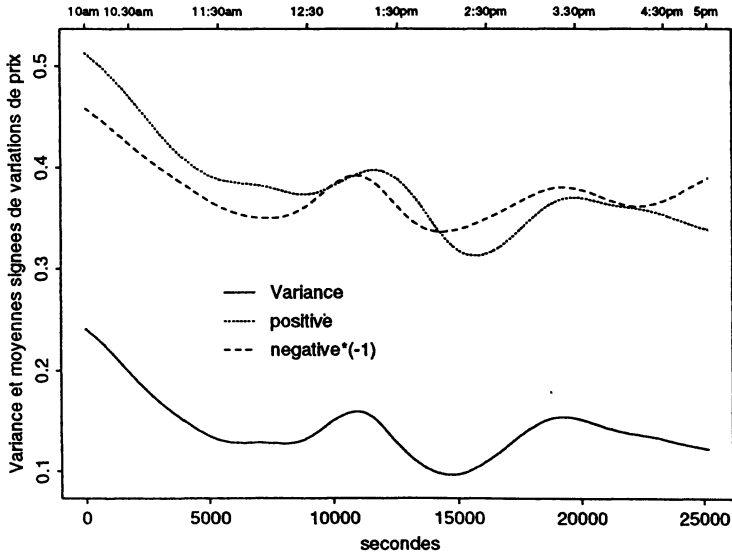


Fig. 3.2 : Moyennes et variance au cours de la journée, sur 14 jours, Alcatel

VOLATILITÉS ET MESURE DU RISQUE

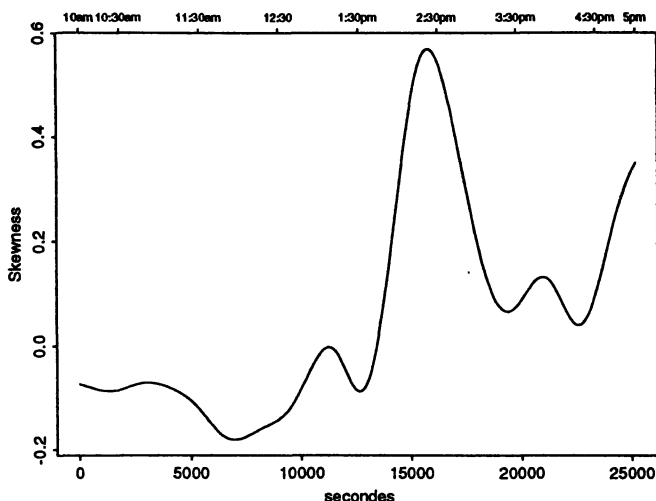


Fig. 3.3 : Coefficient d'asymétrie, Alcatel

3.5 Volatilité et forme des fonctions d'offre et demande

Les procédures automatiques d'appariement sont faciles à comprendre à partir de l'exemple de carnet d'ordres à prix limite. Le principe en est le suivant¹ : durant une période de temps, on collecte les ordres d'achat et de vente à prix limite ; puis à une date τ , on procède à l'appariement. Pour cela on construit à partir de l'ensemble des ordres passés des fonctions d'offre et de demande, on détermine le prix d'équilibre p^* correspondant et on apparie les ordres d'achat et de vente dont les prix sont compatibles avec ce prix p^* . Ce même prix p^* sert pour tous les contrats appariés.

Après cet appariement, il subsiste des ordres non satisfaits, du fait de prix limites incompatibles [le carnet d'ordre]. Cette démarche est décrite dans le schéma ci-dessous où a et b désignent les prix bid et ask :

1. La procédure d'appariement décrite ici, correspond au fixing.

VOLATILITÉS ET MESURE DU RISQUE

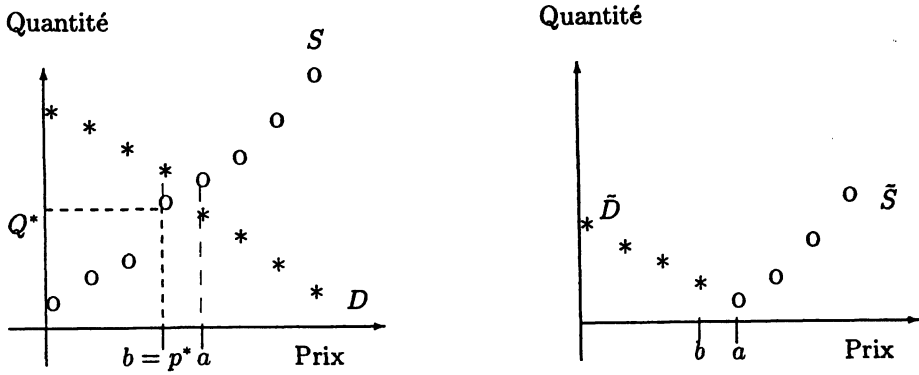


Fig. 3.4 : i) Courbes d'offre et demande, ii) ordres non satisfaits après demande

Plaçons-nous alors juste après cet appariement, et considérons un investisseur souhaitant acheter (resp. vendre) une quantité importante ϑ immédiatement. Il doit pour cela passer un ordre à tout prix. Les appariements sont fait instantanément, et souvent plusieurs contrats sont nécessaires pour satisfaire cet ordre, à des prix divers correspondant aux contreparties. Le prix unitaire est combinaison de ces prix limites. Ces prix unitaires d'achat et de vente sont fonctions du volume et fournissent des courbes bid et ask, inverses un peu particulières des demandes et offres résiduelles.

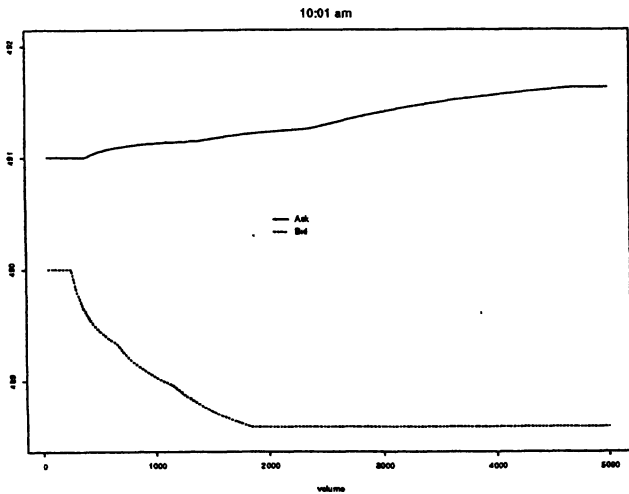


Fig. 3.5 : Courbes bid et ask à 10 h 01, Alcatel, le 14 mai 1996

VOLATILITÉS ET MESURE DU RISQUE

La modification de prix résultant d'un ordre de volume ϑ peut alors se lire directement sur ces courbes. Nous en déduisons des liens entre les formes des courbes bid et ask et les évolutions futures des prix et volumes. Plus les courbes sont écartées, plus le prix évoluera [la volatilité dépend des écarts de pente entre offre et demande au voisinage de l'équilibre]; les courbes peuvent ne pas être symétriques, d'où des volatilités différentes à la hausse et à la baisse et des lois asymétriques; ces courbes ne sont pas constantes, d'où des volatilités fonctions du volume échangé. Comment se présentent en pratique ces courbes? Peut-on espérer qu'elles soient affines, symétriques l'une de l'autre, stables dans le temps? La réponse figure en 3.6 et 3.7, où nous donnons l'évolution de ces courbes bid et ask pour le titre Alcatel dans la journée du 14 mai 1996 [voir GOURIÉROUX-LE FOL-MEYER (1996)].

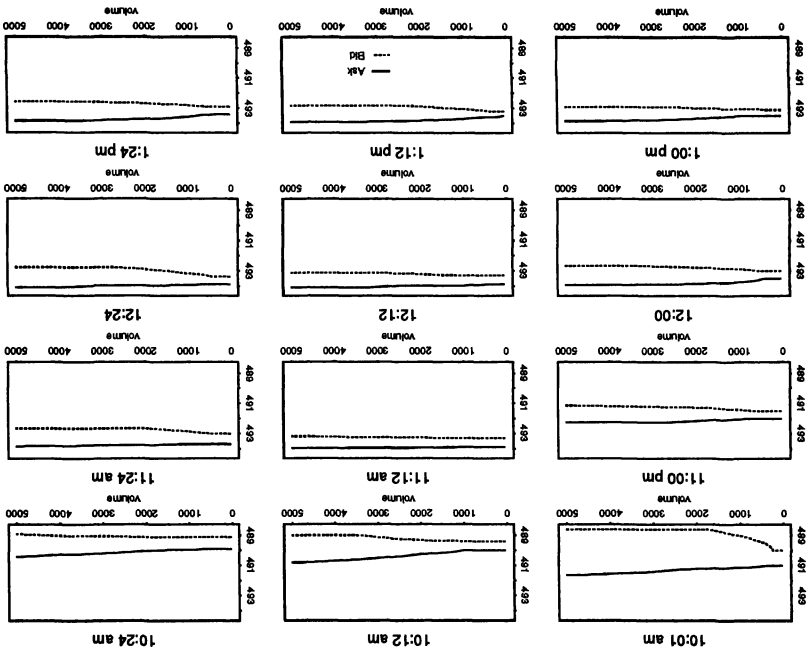


Fig. 3.6 : Courbes bid et ask vers 10 h, 11 h, 12 h et 13 h Alcatel.

VOLATILITÉS ET MESURE DU RISQUE

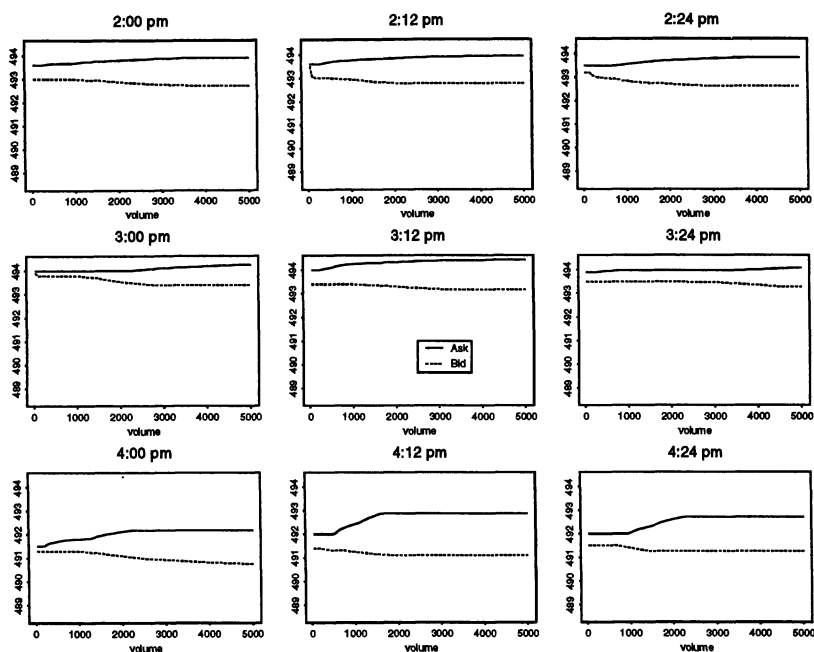


Fig. 3.7 : Courbes bid et ask
vers 14 h, 15 h, et 16 h Alcatel.

4. Produits dérivés

D'autres difficultés ont été mises en évidence lorsque l'optique moyenne-variance (ou les modèles ARCH qui lui sont liés) a été appliquée à l'analyse de produits dérivés, éventuellement en liaison avec les actifs sous-jacents. Ainsi la première version de Riskmetrics diffusée par JP Morgan conseillait de mesurer le risque sur un produit dérivé par la volatilité, et de la déduire de celle de l'actif sous-jacent par un développement linéaire d'une formule de valorisation. Cette approche s'est révélée biaisée et susceptible d'engendrer elle-même de nouveaux risques. Nous allons dans ce paragraphe essayer de comprendre pourquoi le moment d'ordre deux des rendements est peu adapté pour les produits complexes, et voir pourquoi des phénomènes de persistance peuvent être conséquences du mode de construction de ces produits. On notera que les arguments s'appliquent aussi au prix du sous-jacent si on pense comme Merton qu'une action est une option sur la valeur de l'entreprise.

4.1 Le contexte

Nous nous plaçons dans le cadre extrême proposé par BLACK et SHOLES [1973]. Cependant les arguments développés ne sont pas conséquences de ce cadre et notamment de l'hypothèse de marché complet. Dans ce modèle standard, il existe un actif sans risque de taux d'intérêt fixe r , et un actif risqué échangeable en continu sans coût de transaction, dont le logarithme du prix correspond à une marche aléatoire avec coefficient de translation :

$$dS_t = \mu S_t dt + \sigma S_t dW_t, \quad (4.1)$$

où (W_t) désigne un mouvement brownien standard. La condition d'absence d'opportunité d'arbitrage permet de déterminer sans ambiguïté les prix de produits dérivés, dont le sous-jacent est l'actif S . Le prix à la date t d'une option d'achat européenne, de date d'exercice T , de prix d'exercice K est donné par :

$$C_t(S; T, K) = S_t \Phi(x_t) - K \exp[-r(T-t)] \Phi(x_t - \sigma\sqrt{T-t}), \quad (4.2)$$

$$\text{avec } : x_t = \frac{\log(S_t / (K \exp[-r(T-t)]))}{\sigma\sqrt{T-t}} + \frac{1}{2} \sigma\sqrt{T-t}. \quad (4.3)$$

4.2 Propriétés stochastiques du prix du produit dérivé

Que dire de la dynamique du logarithme de ce prix : $\log C_t(S; T, K)$?

Il est déduit du prix du sous-jacent par une transformation non linéaire complexe, ce qui entraîne que la loi conditionnelle de $\log C_t$ sachant l'information disponible à la date 0, disons S_0 , est non gaussienne avec des asymétries. Ce résultat n'est guère surprenant si l'on se rappelle que ce prix d'option est celui d'un portefeuille composé de l'actif sans risque et du sous-jacent dont la composition est continuellement remise à jour. L'incertitude sur le prix du dérivé provient de celle du sous-jacent directement, mais aussi de façon indirecte par l'intermédiaire de l'allocation variable en actif risqué. Le produit dérivé, assimilé à un portefeuille de composition non fixe dans le temps, présente des risques différents de ceux d'un portefeuille de composition fixe. En particulier la volatilité du prix du produit dérivé mêle deux aspects liés à la volatilité du prix du sous-jacent et au risque pris dans les décisions d'allocations.

Par ailleurs si $\log S_t$ est une marche aléatoire avec translation, il n'en est pas de même pour $\log C_t$. De façon équivalente les rentabilités des produits dérivés vont présenter des corrélations, d'où des phénomènes de persistance plus fréquents pour de tels produits.

4.3 Illustration

De façon à illustrer ces aspects, nous présentons ci-dessous des résultats de simulations.

Pour bien les comprendre, il faut garder à l'esprit le cas limite où nous considérons le prix de l'option à sa date d'exercice.

i) Cas limite

Le prix de l'option est alors égal à :

$$C_T(S, T; K) = \exp(-rT)(S_T - K)^+.$$

La loi de ce prix d'option, conditionnelle à l'information disponible à la date initiale, est une loi log-normale tronquée en K . Elle comporte une partie discrète chargeant 0 avec la probabilité : $P[S_t < K | S_t]$, et une partie continue correspondant à la partie de la densité de S_T , tronquée en K et translatée de K vers 0 [voir 4.1].

Sa forme est donc plus asymétrique en général que celle de la loi S_T . Par ailleurs elle peut présenter deux modes lorsque le prix d'exercice est inférieur au mode de la loi de S . Ces effets vont se retrouver sur la loi de $\log C_t(S, T; K)$ et un nombre double de modes peut apparaître au niveau des distributions de rendements.

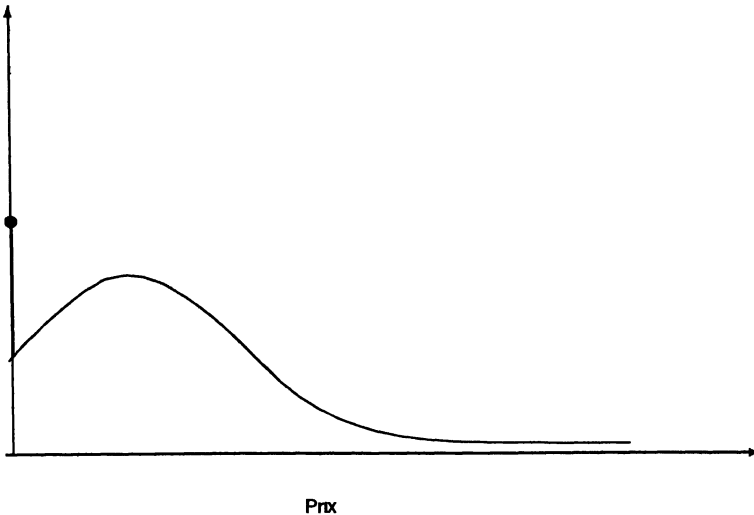


Fig. 4.1 : Loi de $C_T(S, T; K)$

ii) Simulations des distributions de rendements

Nous présentons dans la figure 4.2 des simulations de la loi du rendement journalier sur 21 jours d'une option d'achat européenne. La loi du sous-jacent correspond à $\mu = 0,01$ et $\sigma = 0,125$, avec une valeur initiale $S_0 = 1$. Le taux d'intérêt est $r = 0$, et les options sont à trois mois avec diverses valeurs pour le prix d'exercice, entourant la valeur attendue du prix du sous-jacent à trois mois. Elles sont calculées avec 2 000 simulations. L'asymétrie des lois apparaît marquée, avec des coefficients d'asymétrie négatifs de l'ordre de $-0,5$, dont l'importance croît, puis décroît lorsque le prix d'exercice augmente.

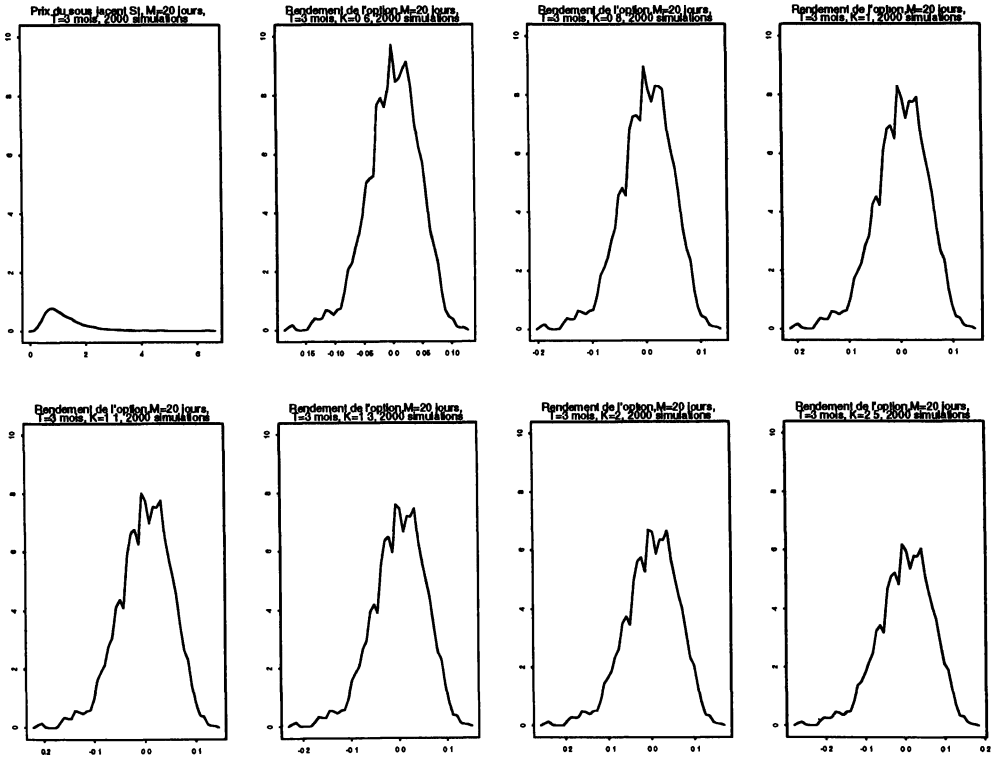


Fig. 4.2 : Loi empirique des rendements de l'option pour différents prix d'exercice, T=3 mois et M=20 jours, 2 000 simulations

VOLATILITÉS ET MESURE DU RISQUE

Coefficient d'asymétrie	K=0,6	K=0,8	K=1	K=1,1	K=1,3	K=2	K=2.5
sk	-0,467	-0,487	-0,496	-0,499	-0,501	-0,497	-0,487

Tableau 4.1 : Coefficient d'asymétrie pour différentes valeurs du prix d'exercice, T=3 mois et M=20 jours, 2 000 simulations

Les distributions de rendements sont plus délicates à représenter lorsqu'elles concernent des dates proches de la maturité (ici M proche de T). En effet le prix du dérivé à la date d'exercice charge la valeur zéro et il en est de même du prix en M avec un poids significatif. Un rendement calculé par transformation logarithmique ou par division par un prix passé peut donc prendre la valeur infinie. Il est préférable dans ce cas de raisonner sur les modifications de prix elles-même. Nous donnons dans la figure 4.3 les distributions de prix entre les dates 1 et $M = 86$ ($T = 90$ jours).

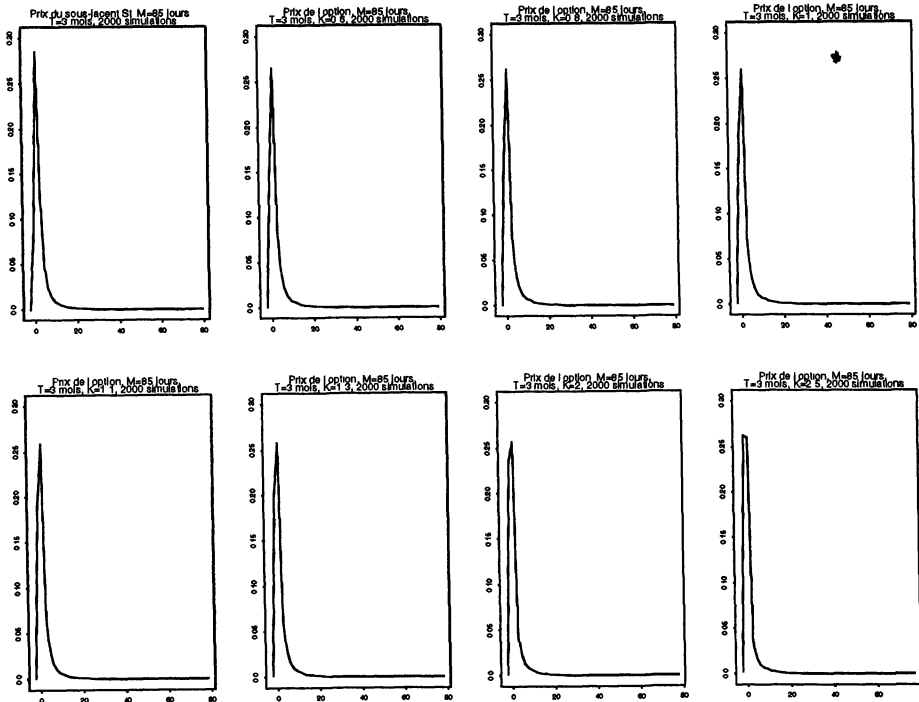


Fig. 4.3 : Loi empirique des prix de l'option pour différents prix d'exercice, T=3 mois et M=86 jours, 2 000 simulations

iii) Produits dérivés et hétéroscédasticité conditionnelle

De façon à analyser les problèmes d'hétéroscédasticité conditionnelle pour les produits dérivés, nous avons simulé les évolutions de prix d'un sous-jacent selon le modèle de Black-Scholes, puis déduit les prix des options d'achat européenne de maturité 90 jours et de divers prix d'exercice K . Des séries de rendements à dix jours y_t^D ont alors été calculées et la présence d'effets ARCH a été analysée en considérant les autocorrélations d'ordre un calculées sur les carrés $(y_t^D - \bar{y}^D)^2$. Le tableau 4.2 fournit les valeurs de ces autocorrélations pour divers niveaux du prix d'exercice K . La non linéarité des flux du produit dérivé induit sur le rendement de ce dernier une hétéroscédasticité conditionnelle, absente par construction pour l'actif du sous-jacent.

Autocorrélation	K=0,6	K=0,8	K=1	K=1,1	K=1,2	K=1,3	K=2	K=2,5
acf	0,61	0,85	0,52	0,74	0,71	0,64	0,85	0,64

Tableau 4.2 : Autocorrélations d'ordre un de $(y_t^D - \bar{y}^D)^2$ pour différents prix d'exercice.

5. Mesures de risque

Des extensions de la mesure classique de risque, que constitue la volatilité, peuvent être introduites pour tenir compte des divers risques sous-jacents liés aux prix, au temps et au volume, ainsi que de l'asymétrie des distributions de rentabilité.

5.1 Risques multiples

Un investisseur passant un ordre à tout prix est certain du prix auquel sera traité son ordre. Il connaît en revanche mal comment son ordre sera démembré, à quelles dates et pour quels volumes. Cet exemple montre que la variabilité future des prix donne une information insuffisante sur le risque, et qu'il est préférable d'introduire des mesures simultanées relatives aux prix, aux occurrences de transaction et aux volumes.

Des mesures instantanées de ces divers risques sont déduites de la formulation du paragraphe 2. Nous reprenons cette formulation en considérant simultanément deux actifs. Les divers processus sont :

$$\begin{aligned} \text{actif 1 :} \quad & N_1(t), p_{1,t} = p_{1,0} + \sum_{j=1}^{N_1(t)} \delta_{1,j}, V_{1,t} = \sum_{j=1}^{N_1(t)} \vartheta_{1,j}, \\ \text{actif 2 :} \quad & N_2(t), p_{2,t} = p_{2,0} + \sum_{j=1}^{N_2(t)} \delta_{2,j}, V_{2,t} = \sum_{j=1}^{N_2(t)} \vartheta_{2,j}. \end{aligned}$$

Les volatilités et covolatilités instantanées sont définies de la façon usuelle par :

$$\sigma_{1,t}^2 \approx \frac{1}{dt} V_{\dagger}(p_{1,t+dt} - p_{1,t}), \quad \sigma_{2,t}^2 \approx \frac{1}{dt} V_{\dagger}(p_{2,t+dt} - p_{2,t}),$$

$$\sigma_{12,t}^2 \approx \frac{1}{dt} \text{Cov}_{\dagger}(p_{1,t+dt} - p_{1,t}, p_{2,t+dt} - p_{2,t}),$$

où V_{\dagger} , Cov_{\dagger} , désignent des variance et covariance conditionnelles. Il est possible d'introduire, de façon analogue, des mesures d'activité et coactivité pour le temps (via $N_j(t)$) et les volumes (via $V_j(t)$).

Des activités-coactivité cotation sont :

$$\lambda_{1,t} \approx \frac{1}{dt} V_{\dagger}[N_1(t+dt) - N_1(t)], \quad \lambda_{2,t} \approx \frac{1}{dt} V_{\dagger}[N_2(t+dt) - N_2(t)],$$

$$\lambda_{12,t} \approx \frac{1}{dt} \text{Cov}_{\dagger}[N_1(t+dt) - N_1(t), N_2(t+dt) - N_2(t)],$$

et des activités-coactivité volume sont :

$$a_{1,t} \approx \frac{1}{dt} V_{\dagger}[V_{1,t+dt} - V_{1,t}], \quad a_{2,t} \approx \frac{1}{dt} V_{\dagger}[V_{2,t+dt} - V_{2,t}],$$

$$a_{12,t} \approx \frac{1}{dt} \text{Cov}_{\dagger}[V_{1,t+dt} - V_{1,t}, V_{2,t+dt} - V_{2,t}].$$

Les matrices :

$$\Sigma_t = \begin{pmatrix} \sigma_{1,t}^2 & \sigma_{12,t} \\ \sigma_{12,t} & \sigma_{2,t}^2 \end{pmatrix}, \quad \Lambda_t = \begin{pmatrix} \lambda_{1,t} & \lambda_{12,t} \\ \lambda_{12,t} & \lambda_{2,t} \end{pmatrix}, \quad A_t = \begin{pmatrix} a_{1,t} & a_{12,t} \\ a_{12,t} & a_{2,t} \end{pmatrix}$$

sont toutes symétriques positives. Surtout elles sont très liées les unes aux autres. A titre d'illustration, supposons que les modifications de prix ($\delta_{1,j}, \delta_{2,j}$) [resp. les volumes ($\vartheta_{1,j}, \vartheta_{2,j}$)] soient indépendantes, de même loi, de moyenne (μ_1, μ_2) , de variance $\Omega_t = \begin{pmatrix} \omega_{11} & \omega_{12} \\ \omega_{12} & \omega_{22} \end{pmatrix}$. Alors la matrice de volatilité-covolatilité peut être décomposée de façon à distinguer les effets fréquence de cotation des effets mouvements de prix entre deux cotations successives. Plus précisément, nous avons [GOURIÉROUX-JASIAK-LE FOL (1996)] :

$$\begin{cases} \sigma_{j,t}^2 &= \lambda_{j,t}[\mu_{j,t}^2 + \omega_{jj,t}], \\ \sigma_{i,j,t} &= \lambda_{ij,t}[\mu_{i,t}\mu_{j,t} + \omega_{ij,t}], \end{cases}$$

et des décompositions similaires pour les activités-coactivité volume. Nous donnons dans les figures 5.1 et 5.3 les activités-coactivité cotation et volume correspondant aux cours Alcatel et Saint Gobain du 3 au 19 Janvier 1996, et dans la figure 5.2 la corrélation cotation correspondante en intra-journalier.

VOLATILITÉS ET MESURE DU RISQUE

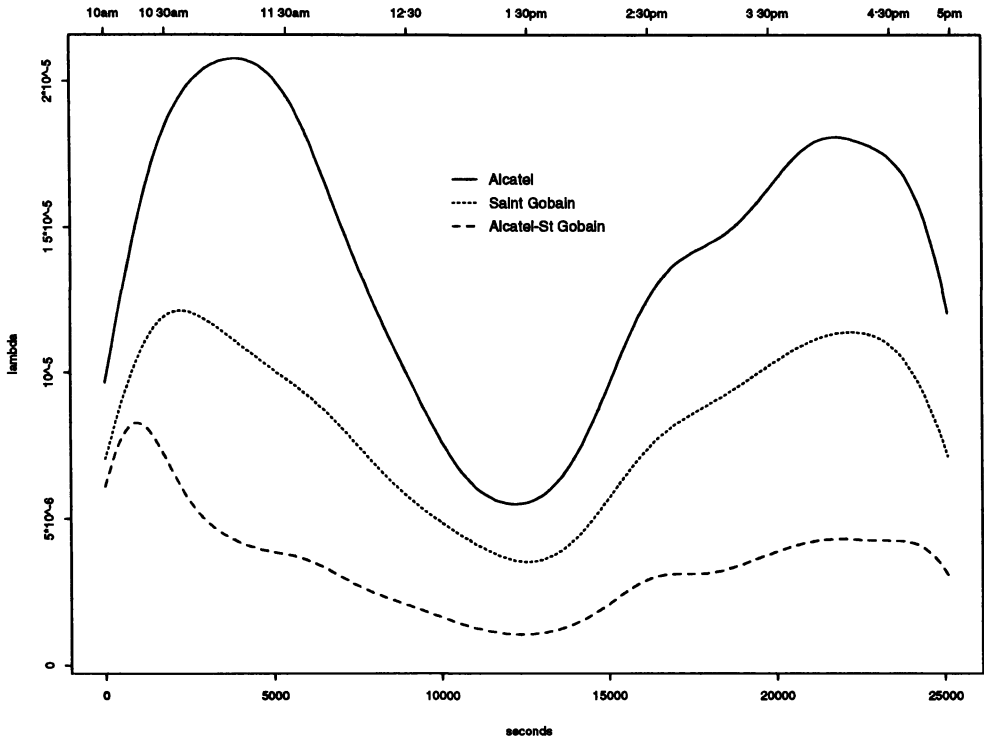


Fig. 5.1 : Activités-coactivité cotation, Alcatel et Saint Gobain

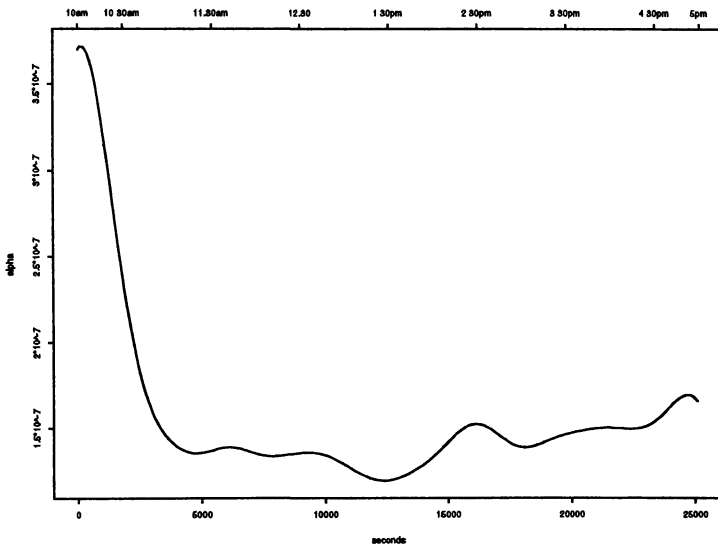


Fig. 5.2 : Corrélation cotation entre Alcatel et Saint Gobain

VOLATILITÉS ET MESURE DU RISQUE

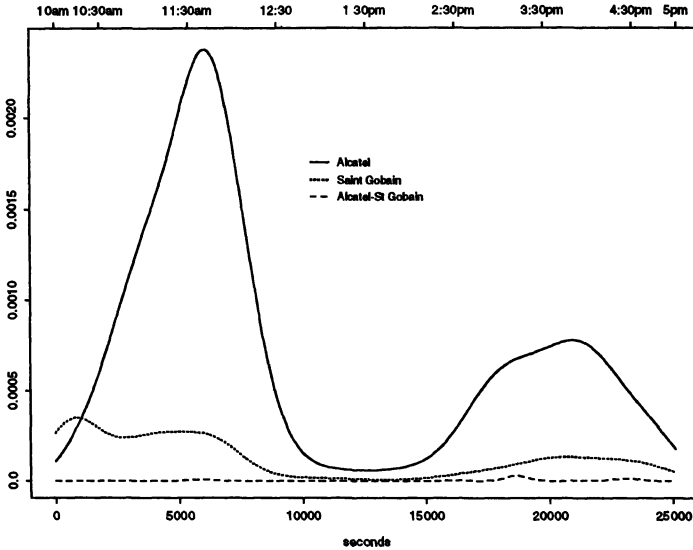


Fig. 5.3 : Activités-coactivité volume entre Alcatel et Saint Gobain

5.2 Mesures fonctionnelles

L'asymétrie des distributions est mal repérée par la mesure de volatilité. Cet inconvénient peut être résolu en considérant des mesures fonctionnelles compatibles avec la dominance stochastique d'ordre deux. Des comparaisons de risques fondées sur des mesures fonctionnelles sont plus informatives, mais ne conduisent pas à une relation d'ordre totale. Un actif peut apparaître plus risqué qu'un autre pour un investisseur très averse au risque et moins risqué pour un investisseur ayant une aversion moindre. Nous limitant pour simplifier à des fonctions d'utilité à aversion absolue pour le risque constante, nous pourrions mesurer le risque associé à un aléa Y par la fonction R :

$$R(A) = E(\exp -AY), \quad A \geq 0,$$

ou par la fonction r : $r(A) = -\frac{1}{A} \log E(\exp -AY), \quad A \geq 0,$

qui fournit la valeur équivalent certain associée, en fonction du coefficient d'aversion.

Cette dernière mesure présente l'avantage d'être adaptée à l'analyse de la normalité de la loi de Y . En effet, l'aléa est gaussien si et seulement si la fonction de risque est affine.

De plus nous savons que pour A proche de zéro :

$$r(A) \equiv EY - \frac{A}{2} VY + \frac{A^2}{6} E(Y - EY)^3.$$

L'approche moyenne-variance correspond à une analyse locale de cette mesure fonctionnelle pour les faibles aversions, la moyenne étant associée à la valeur en zéro et la variance à l'opposé de la pente. Localement le sens de concavité dépend du sens de l'asymétrie.

La fonction r considérée globalement donne cependant beaucoup plus d'information que les seuls trois premiers moments.

i) Comportement de la mesure pour le modèle de cotations.

Considérons un prix : $p_t = p_0 + \sum_{j=1}^{N(t)} \delta_j$, supposons les processus $(N(t), t \geq 0)$

et $(\delta_j, j = 1, \dots)$ indépendants, et les variables δ_j indépendantes de même loi de transformée de Laplace : $\Psi(A) = E(\exp -A\delta)$.

Un calcul simple donne :

$$\begin{aligned} R_p(A) &= E_0(\exp -Ap_t) \\ &= E_0 \left(\exp -A \sum_{j=1}^{N(t)} \delta_j \right) \\ &= E_0 \left(\prod_{j=1}^{N(t)} \exp -A\delta_j \right) \\ &= E_0 E \left(\prod_{j=1}^{N(t)} \exp -A\delta_j \mid N(t) \right) \\ &= E_0 \left(\prod_{j=1}^{N(t)} \Psi(A) \right) \\ &= E_0 \exp(N(t) \log \Psi(A)) \\ &= E_0 \exp - \left(\frac{-\log \Psi(A)}{E\delta} N(t) E(\delta) \right) \\ &= R_{NE\delta} \left(- \frac{\log \Psi(A)}{E\delta} \right) \end{aligned}$$

VOLATILITÉS ET MESURE DU RISQUE

La mesure fonctionnelle du risque associée à la modification de prix entre 0 et t agrège les effets dus à la méconnaissance des dates de cotation et des niveaux de modification de prix entre deux cotations successives. Lorsque ce dernier aléa est annulé en remplaçant les δ_j par leur espérance, on retrouve une mesure fonctionnelle associée à la seule occurrence : $N_1 E\delta$, mais évaluée à un autre niveau d'aversion vis-à-vis du risque : $A^* = -\frac{\log \Psi(A)}{E\delta}$. La mesure fonctionnelle fondée sur les utilités CARA se prête donc bien à l'agrégation des risques et on s'attend à ce que : $A^* < A$, pour compenser l'élimination fictive du risque δ_j . Cette inégalité est immédiate d'après l'inégalité de convexité :

$$E(\exp -A\delta) \geq \exp(-AE\delta)$$

$$\Leftrightarrow \log \Psi(A) \geq -AE\delta$$

$$\Leftrightarrow A^* \leq A.$$

ii) Calcul de la mesure fonctionnelle pour des rendements d'options

Nous allons voir comment se comporte cette mesure fonctionnelle pour les rendements d'options. Nous nous plaçons dans le cadre du paragraphe 3 et déterminons les mesures de risque correspondant aux mêmes simulations. Les graphiques ci-dessous permettent de voir la non normalité des lois, les fonctions n'étant pas affines.

De plus deux options de prix d'exercice différents sont comparables, l'un des risques fonctionnels étant uniformément sous l'autre. Ce résultat correspond à l'idée intuitive que lorsque le prix d'exercice augmente l'option sert à réassurer un risque plus extrême.

VOLATILITÉS ET MESURE DU RISQUE

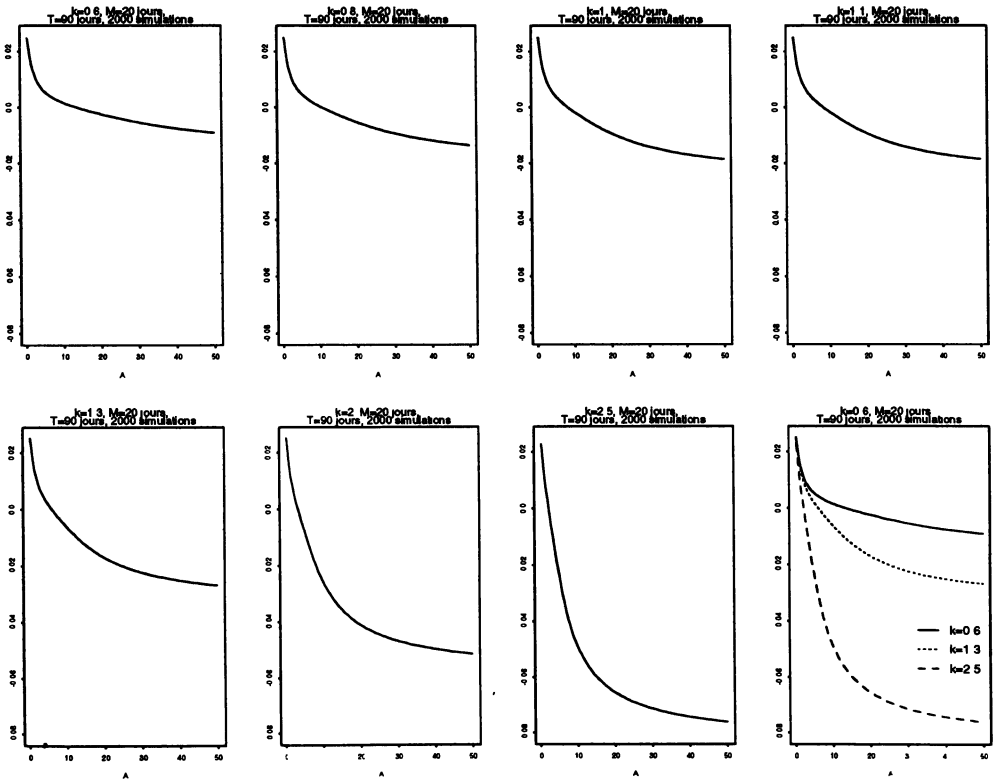


Fig. 5.4 : Représentation de l'équivalent certain en fonction de A pour différents prix d'exercices, T = 3 mois et M = 20 jours, 2000 simulations.

Lorsque les études concernent des dates plus proches de la date d'exercice, les distributions des rendements chargent des valeurs très grandes ou très petites et donc les mesures fonctionnelles sont proches de la non existence. Nous donnons ci-dessous ces mesures calculées sur la variation de prix.

VOLATILITÉS ET MESURE DU RISQUE

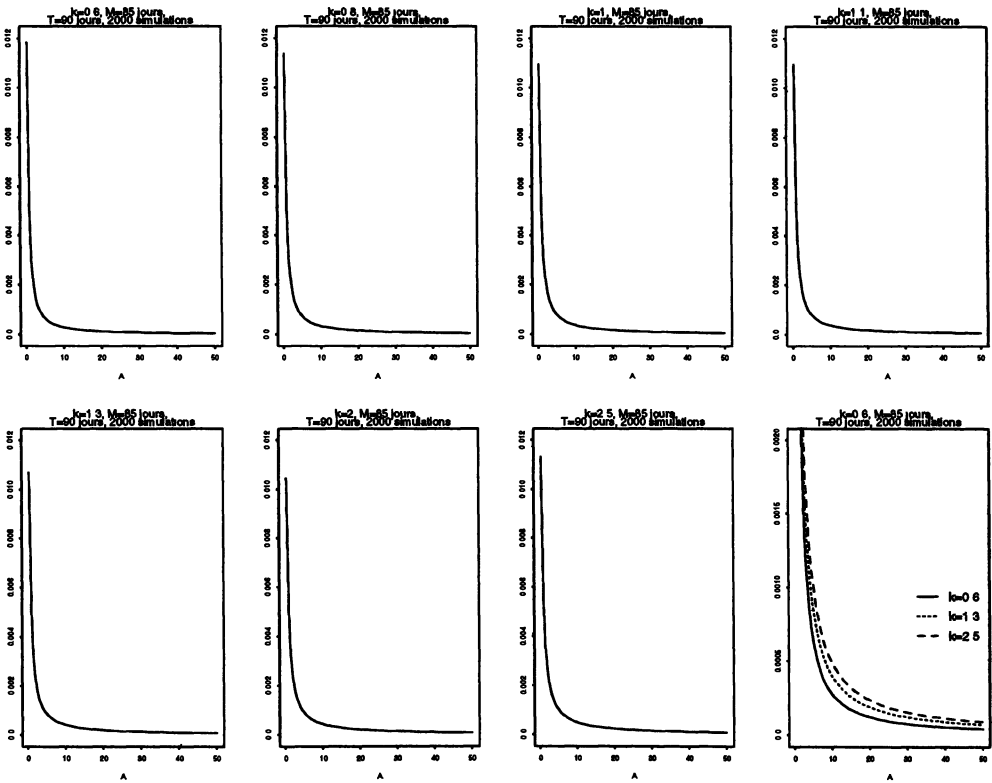


Fig. 5.5 : Représentation de l'équivalent certain de la variation de prix en fonction de A pour différents prix d'exercices, T = 3 mois et M = 85 jours, 2000 simulations

Annexe : Définition d'une volatilité

Une volatilité est une mesure de variabilité conditionnelle de prix ou de rentabilité. Il existe de nombreuses mesures de volatilité, qui se distinguent les unes des autres par :

- la date t à laquelle on évalue la volatilité,
- l'information I_t utilisée pour le calcul et disponible à cette date,
- l'horizon H de la prévision,
- la variable y_{t+H} à prévoir, qui peut être un prix : $y_{t+H} = p_{t+H}$, un rendement : $y_{t+H} = \frac{p_{t+H} - p_t}{p_t}$, ou son approximation calculée par différenciation d'un logarithme de prix : $y_{t+H} = \log p_{t+H} - \log p_t$.

La volatilité correspondante est $V(y_{t+H}|I_t)$. Elle est relative à la période $[t, t + H]$, et dépend généralement des évolutions passées de prix. Afin de comparer les volatilités à horizons différents, on peut "annualiser" la formule de volatilité. Cette annualisation est effectuée pour les volatilités calculées sur différences de logarithme de prix par la formule :

$$\frac{1}{H} V(y_{t+H}|I_t) = \frac{1}{H} V(\log p_{t+H} - \log p_t|I_t),$$

qui est la formule correcte si le logarithme du prix satisfait une marche aléatoire avec translation. La volatilité instantanée est une volatilité annualisée calculée avec un horizon tendant vers zéro : $\lim_{H \rightarrow 0} \frac{1}{H} V(\log p_{t+H} - \log p_t|I_t)$.

La notion de volatilité peut être étendue au cas de plusieurs actifs $j = 1, \dots, J$. On introduit alors un vecteur de prix ou de rendements : $y_{t+H} = (y_{j,t+H})$, et on considère la matrice de variance-covariance ou matrice de volatilité-covolatilité : $V(y_{t+H}|I_t)$, de terme général : $\text{cov}(y_{i,t+H}, y_{j,t+H}|I_t)$.

Si y est un vecteur de prix, si on considère un portefeuille de composition : $\alpha_t = (\alpha_{1,t}, \dots, \alpha_{J,t})'$ à la date t , conservée inchangée entre t et $t + H$, la volatilité de la valeur du portefeuille est :

$$V[\alpha_t' p_{t+H}|I_t] = \alpha_t' V(p_{t+H}|I_t) \alpha_t.$$

Sa racine carrée a pour unité monétaire [FF, \$, ...] celle dans laquelle est effectuée le calcul. Elle est appelée valeur à risque [VaR] après multiplication par un facteur correctif donné, généralement 2.

La détermination de la valeur à risque par ce type de calcul n'est plus valable lorsque la composition du portefeuille est remise à jour durant la période $(t, t + H)$ en fonction des informations nouvelles.

Références

- ADMATI, A. et PFLEIDERER, P. (1988) "A Theory of Intraday Patterns : Volume and Price Variability", *The Review of Financial Studies*, 1, pp. 1-30.
- ANDERSON T. et BOLLERSLEV T. (1994) *Intraday Seasonality and Volatility Persistence in Foreign Exchange and Equity Markets*, DP Northwestern University, Kellogg School of Management.
- BIAIS B., HILLION P. et SPATT C. (1996) *An Empirical Analysis of Walrassian Tatonnement in the Paris Bourse*, DP, Université de Toulouse.
- BLACK F. et SCHOLES M. (1973) "The Pricing of Options and Corporate Liabilities", *Journal of Political Economy*, 81, pp. 637-684.
- BOLLERSLEV T. (1986) "Generalized Autoregressive Conditional Heteroskedasticity", *Journal of Econometrics*, 37, pp. 307-327.
- CAMPBELL J. et HENTSCHL L. (1992) "No News is Good News : An Asymmetric Model of Changing Volatility in Stock Returns", *Journal of Financial Economics*, 31, pp. 281-318.
- CAMPBELL J., GROSSMAN J. et WANG J. (1993) "Trading Volume and Serial Correlation in Stock Returns", *Quarterly Journal of Economics*, 108, pp. 905-939.
- CHOU R. (1988) "Volatility Persistence and Stock Valuations : Some Empirical Evidence Using GARCH", *Journal of Applied Econometrics*, pp 279-294.
- CLARK P. (1973) "A Subordinated Stochastic Process Model with Finite Variance for Speculative Prices", *Econometrica*, 41, pp. 135-155.
- DIMSON E. (1979) "Risk Measurement When Shares are Subject to Infrequent Trading", *Journal of Financial Economics*, 6, pp. 197-226.
- ENGLE R. F. (1982) "Autoregressive Conditional Heteroskedasticity with Estimates of the Variance of United Kingdom Inflation", *Econometrica*, 50, pp. 987-1007.
- ENGLE R. F. and RUSSEL J. R. (1995a) *Autoregressive Conditional Duration ; A New Model for Irregularly Spaced Times Series Data*, à paraître dans *Econometrica*.
- ENGLE R. F. et RUSSEL J. R. (1995b) *Forecasting the Frequency of Changes in Quoted Foreign Exchange Prices with the Autoregressive Conditional Duration Model*, University of California, San Diego.
- ENGLE R., ITO T. et LIN W. (1990) "Meteor Showers or Heat Waves ? Heteroskedasticity Intra-daily Volatility in the Foreign Exchange Market", *Econometrica*, 58, pp. 525-542.
- FOSTER D. et VISWANATHAN S. (1995) "Can Speculative Trade Explain the Volume-Volatility Relation ?", *Journal of Business and Economic Statistics*, 13, pp. 379-396.
- FRENCH K. et ROLL R. (1986) "Stock Return Variances : The Arrival of Information and Reaction of Traders", *Journal of Financial Economics*, 17, pp. 5-26.
- GALLANT A. R., ROSSI P. E. et TAUCHEN G. (1992) "Stock Prices and Volume", *Review of Financial Studies*, 5, pp. 199-242.
- GEORGE T. et LONGSTAFF F. (1993) "Bid-Ask Spreads and Trading Activity in the S&P 100 Index Options Market", *Journal of Financial and Quantitative Analysis*, 28, pp. 381-397.

VOLATILITÉS ET MESURE DU RISQUE

- GHYSELS E., GOURIÉROUX C. et JASIAK J. (1996) "Kernel Autocorrelogram for Time Deformed Processes", à paraître, *Journal of Statistical Planning and Inference*.
- GHYSELS E., GOURIÉROUX C. et JASIAK J. (1997) "Market Time and Asset Price Movements : Theory and Estimation", D. Hand et S. Jarka (ed.) : *Statistics in Finance*, Ed Arnold, London, 15, pp. 307-322.
- GHYSELS E. et JASIAK J. (1996) "GARCH for Irregularly Spaced Financial Data : The ACD-GARCH Model", à paraître dans *Studies in non-Linear Dynamics and Econometrics*.
- GOURIÉROUX C. (1997) *ARCH Models and Financial Applications*, Springer Verlag.
- GOURIÉROUX C., JASIAK J. et LE FOL G. (1996) *Intraday Market Activity*, CREST DP 9633.
- GOURIÉROUX C., LE FOL G. et MEYER B. (1996) *Etude du Carnet d'Ordres*, CREST DP 9653, à paraître dans *Banque et Marchés*.
- GOURIÉROUX C., SCAILLET O. et SZAFARZ A. (1997) *Econométrie de la Finance : analyses historiques*, Economica, 300p.
- HARRIS L. (1987) "Transaction Data Tests of the Mixture of Distribution Hypothesis", *Journal of Financial and Quantitative Analysis*, 22, pp. 127-141.
- HASBROUCK J. et HO T. (1987) "Order Arrival, Quote Behavior and the Return Generating Process", *Journal of Finance*, 42, pp. 1035-1048.
- KARPOFF J. (1987) "The Relationship Between Price Changes and Trading Volume : A Survey", *Journal of Financial and Quantitative Analysis*, 22, pp. 109-126.
- LAMOUREUX C. et LASTRAPES W. (1990) "Persistence in Variance, Structural Changes and the GARCH Models", *Journal of Business and Economic Statistics*, 1, pp. 225-234.
- LAMOUREUX C. et LASTRAPES W. (1991) "Heteroskedasticity in Stock Return Data : Volume Versus GARCH Effects", *The Journal of Finance*, 45, pp. 221-229.
- LAMOUREUX C. et LASTRAPES W. (1994) "Endogenous Trading Volume and Momentum in Stock Volatility", *Journal of Business and Economic Statistics*, 12, pp. 253-260.
- MC INISH T. et WOOD R. (1991) "Hourly Returns, Volume, Trade Size and Number of Trades", *Journal of Financial Research*, 14, pp. 303-315.
- MC INISH T. et WOOD R. (1991) "Autocorrelation of Daily Index Returns : Intraday-to-Intraday Versus Close-to-Close Intervals", *Journal of Banking and Finance*, 15, pp. 193-206.
- MANDELBROT B. et TAYLOR H. (1967) "On the Distribution of Stock Prices Differences", *Operations Research*, 15, pp. 1057-1062.
- NELSON D. (1990a) "Stationarity and Persistence in the GARCH(1,1) Model", *Econometric Theory*, 6, pp. 318-334.
- NELSON D. (1990b) "ARCH Models as Diffusion Approximations", *Journal of Econometrics*, 45, pp. 7-38.
- OWEN J. et ROBINOVITCH R. (1983) "On the Class of Elliptical Distributions and Their Applications to the Theory of Portfolio Choice", *Journal of Finance*, 38, pp. 745-752.

VOLATILITÉS ET MESURE DU RISQUE

- PRESS J. (1967) "A Compound Events Model for Security Prices", *Journal of Business*, 40, pp. 317-335.
- RICHARDSON M. et SMITH T. (1993) "A Direct Test of the Mixture of Distributions Hypothesis : Measuring the Daily Flow of Information", *Journal of Financial and Quantitative Analysis*, 29, pp. 101-116.
- SBF-BOURSE DE PARIS (1996) *BDM Bourse de Paris, Base de Données*, version 1.1, (Janvier 1996).
- WESTERFIELD R. (1977) "The Distribution of Common Stock Price Changes : An Application of Transaction Time and Subordinated Stochastic Models", *Journal of Financial and Quantitative Analysis*, 12, pp. 743-765.