

VALÉRIE MIGNON

La dynamique des marchés boursiers est-elle chaotique ?

Journal de la société statistique de Paris, tome 138, n° 2 (1997),
p. 63-81

http://www.numdam.org/item?id=JSFS_1997__138_2_63_0

© Société de statistique de Paris, 1997, tous droits réservés.

L'accès aux archives de la revue « Journal de la société statistique de Paris » (<http://publications-sfds.math.cnrs.fr/index.php/J-SFdS>) implique l'accord avec les conditions générales d'utilisation (<http://www.numdam.org/conditions>). Toute utilisation commerciale ou impression systématique est constitutive d'une infraction pénale. Toute copie ou impression de ce fichier doit contenir la présente mention de copyright.

NUMDAM

Article numérisé dans le cadre du programme
Numérisation de documents anciens mathématiques
<http://www.numdam.org/>

LA DYNAMIQUE DES MARCHÉS BOURSIERS EST-ELLE CHAOTIQUE ?

Valérie MIGNON

Université Paris X - Nanterre
U.F.R. SEGMI - MODEM

Résumé

L'objet de cet article est de déterminer si les séries de rentabilités boursières sont générées par un processus déterministe chaotique. L'intérêt croissant suscité par la dynamique chaotique en économie tient à la capacité des modèles chaotiques à produire des trajectoires apparemment aléatoires qui ont ainsi les propriétés usuellement trouvées sur les séries temporelles observées. L'approche chaotique paraît particulièrement prometteuse en finance où la longueur de l'historique des séries financières rend possible l'application des outils de détection du chaos. Notre objet est ici de proposer, après une brève présentation théorique, une application empirique des instruments d'analyse du chaos sur les séries de rentabilités des indices boursiers des pays du G 7. Malgré l'intérêt de l'hypothèse de chaos déterministe, nos résultats suggèrent qu'une approche stochastique est mieux à même de rendre compte des fluctuations observées.

Mots clés : *Chaos, non-linéarité, dimension de corrélation, exposant de LYAPUNOV, rentabilités boursières.*

Abstract

The purpose of this paper is to analyze whether stock returns are generated by a deterministic chaotic process. Chaotic dynamics know a growing interest in economics. In fact, chaotic systems are able to produce orbits which look random and which have properties traditionally found on time series. The chaotic approach seems to be particularly interesting in finance where the important number of observations allows the application of tools used to detect chaos. In a first time, we present some theoretical characteristics of chaotic dynamics. Then, we apply tools in order to detect the presence, if any, of chaotic dynamics in various stock returns time series. Despite the interest of the deterministic chaotic hypothesis, our results suggest that a stochastic approach must be used in order to model stock returns.

Keywords : *Chaos, non-linearity, correlation dimension, LYAPUNOV exponent, stock returns.*

Codification au *Journal of Economic Literature* : C 22.

1. Introduction

Les travaux récents¹ sur les marchés financiers tendent clairement à montrer que le processus sous-jacent aux séries de rentabilités boursières est non linéaire. Cependant, les causes de ces non-linéarités restent quant à elles fortement ambiguës : la non-linéarité détectée est-elle de type déterministe ou stochastique ? Cette interrogation est particulièrement intéressante d'un point de vue économique dans la mesure où elle renvoie directement au débat concernant l'explication endogène *versus* exogène des fluctuations. Le débat n'est certes pas nouveau mais connaît actuellement un regain d'intérêt du fait des nombreux développements afférents à la dynamique chaotique. La fascination exercée par cette dernière en économie a trait, entre autres, au fait que les systèmes chaotiques déterministes sont à même de produire des trajectoires apparemment très complexes qui ressemblent ainsi fortement à des trajectoires aléatoires. Par conséquent, les tests économétriques usuels basés sur la fonction d'autocorrélation ou de densité spectrale du processus sous-jacent aux séries, ne permettent pas d'effectuer la distinction entre un processus stochastique et un processus déterministe². Cette difficulté a rendu nécessaire le développement d'outils spécifiques à même de distinguer un processus stochastique d'un processus qui n'en a que l'apparence. Nous présenterons à cet égard les exposants de LYAPUNOV qui permettent de quantifier la propriété fondamentale de sensibilité aux conditions initiales des systèmes chaotiques et la dimension de corrélation dont l'objet est d'identifier la nature – stochastique ou déterministe – du processus.

En finance, plus spécifiquement, l'aspect apparemment fortement erratique des séries boursières rend l'approche chaotique tout particulièrement prometteuse. D'un point de vue théorique, elle paraît en outre difficilement compatible avec l'hypothèse d'efficience qui est clairement fondée sur une approche stochastique des marchés financiers. En effet, les écarts observés du cours par rapport à sa valeur d'équilibre (valeur fondamentale) ne résulteraient plus – comme le stipule la théorie traditionnelle – de chocs aléatoires, d'informations non anticipées (*news*), mais seraient engendrés par le système lui-même, de façon endogène. D'un point de vue plus empirique, l'utilisation de données financières, où l'on dispose d'historiques relativement longs eu égard aux séries macro-économiques, rend possible l'application des outils de détection du chaos qui nécessitent un nombre très élevé d'observations.

Notre objet est donc ici de déterminer si les séries de rentabilités boursières sont générées par un processus chaotique. Dans un premier temps, nous préciserons la définition du chaos ainsi que deux outils permettant de le

1. Cf. notamment HSIEH [1989], HSIEH [1991], ALEXANDRE [1994], MIGNON [1996].

2. Ainsi, SAKAI et TOKUMARU [1980] montrent que le processus chaotique de "tent map" génère le même comportement en termes d'autocorrélations qu'un processus autorégressif d'ordre un. BERGÉ, POMEAU et VIDAL [1988] notent en outre que le spectre de certains processus déterministes chaotiques a les mêmes propriétés que celui d'un processus aléatoire.

détecter : exposants de LYAPUNOV et dimension de corrélation. Le dernier paragraphe proposera une application empirique sur les rentabilités des indices boursiers des pays du G7.

2. Le chaos : définition et outils de détection

Ce paragraphe a pour objet de donner une définition du chaos ainsi que de présenter les outils élaborés pour détecter un comportement chaotique à partir de l'observation d'une série temporelle.

2.1. Définition du chaos

Un système chaotique est un système déterministe non linéaire possédant un attracteur sensible aux conditions initiales. L'attracteur d'un système est défini comme le sous-ensemble de points vers lequel convergent toutes les trajectoires de ce système. Les attracteurs les plus connus sont le point fixe, le cycle limite et le tore. Ces attracteurs sont décrits périodiquement par les trajectoires représentatives du système étudié. Le comportement de ces systèmes est prévisible : connaissant l'état initial, il est possible de prédire les états futurs. Même si cette connaissance comporte une marge d'erreur, celle-ci reste du même ordre de grandeur pour toute détermination future. En d'autres termes, deux trajectoires initialement voisines le resteront toujours au cours du temps. Cette propriété a pour conséquence que de tels attracteurs ne peuvent correspondre aux attracteurs de systèmes chaotiques.

La propriété fondamentale des systèmes chaotiques est en effet la **sensibilité aux conditions initiales** selon laquelle deux trajectoires initialement très proches vont diverger, à un taux exponentiel, au cours du temps³. Pour rendre compte de ce phénomène, RUELLE et TAKENS [1971] ont introduit le concept d'*attracteur étrange* en tant qu'élément clé dans la compréhension des systèmes dynamiques chaotiques. Le terme *étrange* étant quelque peu ambigu⁴, nous parlerons d'attracteur *chaotique* pour décrire un attracteur qui affiche de la sensibilité aux conditions initiales. Un système chaotique est ainsi caractérisé par une stabilité globale (convergence des trajectoires vers l'attracteur) et une instabilité locale (divergence des trajectoires sur l'attracteur). Par conséquent, un système qui possède un attracteur chaotique, c'est-à-dire un attracteur qui affiche de la sensibilité aux conditions initiales, est un système chaotique :

3. Une conséquence de la sensibilité aux conditions initiales est donc l'imprévisibilité à long terme.

4. Il existe en effet des attracteurs étranges (fractals) non chaotiques et des attracteurs chaotiques non fractals (Cf. GREBOGI *et al.* [1984] et ECKMANN et RUELLE [1985]).

Définition :

Une application f est dite **chaotique** sur un ensemble invariant A^5 , appelé **attracteur**, si :

- f est transitive sur A , c'est-à-dire si l'orbite $\{x, f(x), \dots, f^t(x)\}$ est dense⁶ dans A . En d'autres termes, l'attracteur n'est pas décomposable.
- Les points périodiques, s'il en existe, sont denses sur A .
- f exhibe de la sensibilité aux conditions initiales sur A .

A côté de ces définitions formelles du chaos, divers outils ont été développés afin de permettre d'identifier empiriquement les caractéristiques des systèmes chaotiques.

2.2. Les outils de détection du chaos

La découverte empirique du chaos nécessite l'utilisation d'outils spécifiques tels que la dimension fractale et les exposants de Lyapunov. En effet, les méthodes traditionnelles basées sur le calcul d'autocorrélations ou l'analyse spectrale ne sont pas adaptées à l'étude des caractéristiques des systèmes chaotiques. En particulier, ces techniques ne permettent pas de distinguer un processus aléatoire d'un processus déterministe. Après avoir énoncé le théorème de TAKENS [1981], nous présenterons deux outils de détection du chaos : les exposants de LYAPUNOV et la dimension de corrélation.

2.2.1 Reconstruction de la dynamique dans l'espace des phases

La justification de l'utilisation des outils de détection du chaos réside dans le théorème de TAKENS [1981] – *embedding theorem* –. Supposons que l'on observe une série temporelle x_t , $t = 1 \dots T$, générée par un processus inconnu. Comment comprendre la dynamique du système sous-jacent en analysant un seul signal? Ceci est possible car, d'une part, en pratique, on se restreint à l'étude de la dynamique sur l'attracteur et, d'autre part, on peut générer différents signaux à partir de la série initiale x_t . Ainsi, afin de déterminer les propriétés du processus sous-jacent à cette série, on va chercher à reconstruire son attracteur à partir de la série temporelle observée. Pour cela, on forme $(T - m + 1)$ vecteurs à m dimensions, $\{x_t^m\}_{t=1, \dots, T-m+1}$, appelés

5. A est un ensemble invariant si $f^t(A) = A \forall t$.

6. Un ensemble $X \subset Y$ est dense dans Y si pour tout $y \in Y$ et $\epsilon > 0$, il existe $x \in X$ tel que $d(y, x) < \epsilon$. Dit autrement, X est dense si $\cup U X$ est non vide pour tout voisinage ouvert U de y .

m-historiques, dont les composantes sont les valeurs consécutives de la série observée⁷ décalées d'un retard τ fixé⁸ :

$$x_t^m = (x_t, x_{t+\tau}, x_{t+2\tau}, \dots, x_{t+(m-1)\tau}) \quad (1)$$

avec $t = 1, \dots, T - m + 1$.

m est la dimension de plongement (*embedding dimension*) : c'est la dimension de l'espace des phases dans lequel l'attracteur est reconstruit. En d'autres termes, la dimension de plongement est le nombre d'axes nécessaire pour représenter l'attracteur.

TAKENS [1981] établit que si $m \geq 2n + 1$, où n est la dimension inconnue du vrai système, le comportement des *m*-historiques imitera celui du système dynamique sous-jacent inconnu. En d'autres termes, l'attracteur ainsi reconstruit aura les mêmes propriétés topologiques que le système initial.

Grâce au théorème de TAKENS [1981], il est alors possible de déterminer si l'attracteur du vrai système sous-jacent (inconnu) est chaotique, à partir uniquement de l'observation d'une série temporelle. A cette fin, il convient d'appliquer les divers outils de détection du chaos sur la série observée. Ces différents instruments d'analyse – exposants de LYAPUNOV et dimension de corrélation – sont exposés ci-après.

2.2.2 Exposants de LYAPUNOV

Les exposants de LYAPUNOV constituent un moyen direct de détection du chaos à partir de l'observation d'une série temporelle. Ils permettent de quantifier la sensibilité aux conditions initiales puisqu'ils constituent une mesure de la vitesse moyenne avec laquelle deux trajectoires s'écartent exponentiellement l'une de l'autre sur l'attracteur. Plus particulièrement, lorsqu'ils sont négatifs, ils mesurent le taux moyen de contraction et, lorsqu'ils sont positifs, le taux moyen de dilatation des orbites sur l'attracteur. Par conséquent, la positivité des exposants de LYAPUNOV est révélatrice de l'instabilité locale des trajectoires sur l'attracteur, *i.e.* de la sensibilité aux conditions initiales. Dès lors, pour qu'un système soit chaotique, il faut qu'il y ait au moins un exposant de LYAPUNOV positif. Formellement, soit une application f de dimension 1, $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, telle que $x_{t+1} = f(x_t)$, $t = 1, \dots, T$.

L'exposant de LYAPUNOV λ est défini par :

$$\lambda = \lim_{T \rightarrow \infty} \frac{1}{T} \sum_{t=0}^T \ln \left| \frac{df(x_t)}{dx_t} \right| \quad (2)$$

On notera que l'exposant de LYAPUNOV est défini en termes de limite asymptotique ($T \rightarrow \infty$) de manière à ne prendre en compte que le comportement de long terme du système, c'est-à-dire le comportement sur l'attracteur.

7. La construction des *m*-historiques est appelée *opération de reconstruction*.

8. Ce retard est souvent choisi comme le premier retard tel qu'il n'y ait plus de dépendance temporelle dans la série.

2.2.3 La dimension de corrélation

La dimension est une notion importante dans l'étude des systèmes dynamiques non linéaires. En particulier, elle permet, en théorie, de distinguer un processus stochastique d'un processus déterministe au sens où la dimension d'un processus stochastique est élevée alors que celle d'un processus déterministe est faible. L'intérêt d'étudier la dimension de l'attracteur d'un système provient également du fait qu'elle indique :

- la quantité d'information nécessaire pour spécifier la position d'un point sur l'attracteur,
- la limite inférieure du nombre de variables nécessaires pour décrire le comportement du système dynamique à l'intérieur de l'attracteur⁹,
- la densité relative des points sur l'attracteur, c'est-à-dire la façon dont sont répartis les points sur l'attracteur.

La dimension nous permet donc d'obtenir une information topologique concernant le système sous-jacent : elle quantifie la complexité de l'attracteur. Elle fournit en quelque sorte une quantification de la stabilité globale du système dynamique, contrairement aux exposants de LYAPUNOV dont la positivité était caractéristique d'une instabilité locale sur l'attracteur. Nous nous intéressons ici à une forme particulière de dimension, la dimension de corrélation, introduite par GRASSBERGER et PROCACCIA [1983]. Sa détermination nécessite le calcul préalable de l'intégrale de corrélation, notée $C_m(\varepsilon)$. Cette dernière est calculée sur les m -historiques x_i^m , m étant la dimension de plongement :

$$C_m(\varepsilon) = \lim_{N_m \rightarrow \infty} \frac{l}{N_m^2} \sum_{i,j=1}^{N_m} H\left(\varepsilon - |x_i^m - x_j^m|\right) \quad (3)$$

où H est la fonction de HEAVISIDE :

$$H\left(\varepsilon - |x_i^m - x_j^m|\right) = \begin{cases} 1 & \text{si } \varepsilon - |x_i^m - x_j^m| > 0 \\ 0 & \text{sinon.} \end{cases} \quad (4)$$

et N_m est le nombre de m -historiques qui peuvent être créés à partir d'un échantillon de N observations : $Nm = N - (m - 1)$.

Pour des petites valeurs de ε , GRASSBERGER et PROCACCIA [1983] montrent que $C_m(\varepsilon)$ évolue comme ε^{D_m} , soit :

$$D_m = \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \frac{\ln C_m(\varepsilon)}{\ln \varepsilon} \quad (5)$$

9. Contrairement à une idée couramment admise (Cf. notamment PETERS [1991, 1994]), la dimension ne fournit pas le nombre de variables indépendantes entrant dans le système, mais le nombre de dimensions que remplit l'attracteur. Ces deux nombres sont par ailleurs indépendants l'un de l'autre, le nombre de variables endogènes pouvant être nettement supérieur à la dimension de l'attracteur (Cf. ECKMANN [1992]).

Si la valeur de D_m se stabilise à une certaine valeur D_C lorsque la dimension de plongement m augmente, alors D_C est la dimension de corrélation de l'attracteur :

$$D_C = \lim_{m \rightarrow \infty} D_m \quad (6)$$

La dimension de corrélation peut dès lors être utilisée pour distinguer un processus déterministe d'un processus stochastique :

- Pour un processus stochastique, D_m croît de façon monotone avec la dimension de plongement : $\lim_{m \rightarrow \infty} D_m = D_C = \infty$. On dit que la saturation n'est jamais atteinte au sens où D_m ne se stabilise pas lorsque m augmente.
- Pour un processus déterministe, D_m se stabilise à un certain niveau D_C lorsque la dimension de plongement augmente. En d'autres termes, D_m devient indépendante de m pour $m \geq 2n + 1$, où n est la dimension du système sous-jacent. Ceci est le signe que l'attracteur considéré est l'attracteur d'un processus déterministe.

2.2.4. Limites statistiques des outils et solutions apportées

Les exposants de LYAPUNOV et la dimension de corrélation ne constituent pas des tests au sens statistique du terme : leur distribution asymptotique est en effet inconnue. Ainsi, comment savoir si le plus grand exposant de LYAPUNOV est *significativement* positif ? Comment déterminer si la dimension de corrélation estimée est *significativement* inférieure à celle d'un processus purement aléatoire ?

Afin de répondre à ces interrogations, deux tests de validation des résultats fournis par les exposants de LYAPUNOV et la dimension de corrélation ont été proposés : le test résiduel de BROCK [1986] et le test du mélange aléatoire de SCHEINKMAN et LEBARON [1989].

L'idée sous-jacente au test résiduel de BROCK [1986] réside dans le fait que les propriétés d'un système déterministe restent inchangées sous une transformation linéaire. BROCK montre ainsi que si une série temporelle a une explication déterministe et que l'on estime un modèle autorégressif sur cette série, alors les résidus de ce modèle doivent avoir le même plus grand exposant de LYAPUNOV et la même dimension de corrélation que la série originelle. Si les résultats concernant les deux séries sont différents, le processus générant les données est plutôt de nature stochastique que déterministe.

Le test du "mélange aléatoire" de SCHEINKMAN et LEBARON [1989] consiste à mélanger de façon aléatoire les valeurs de la série étudiée. Si la structure sous-jacente à la série est déterministe chaotique, le mélange aura pour conséquence une destruction de la structure interne du système et par conséquent un accroissement de la dimension estimée. A l'inverse, si le processus sous-jacent est stochastique, le mélange n'aura qu'un très faible impact et la dimension estimée sur la série mélangée sera identique à la dimension estimée sur la vraie

série. Le paragraphe suivant propose une application empirique sur diverses séries boursières.

3. Application aux séries de rentabilités boursières

Les résultats concernant la recherche de comportement chaotique en économie sont relativement épars. Les premières études dues à BROCK [1986], BARNETT et CHEN [1988], BROCK et SAYERS [1988] ou SCHEINKMAN et LEBARON [1989], concluaient en faveur de chaos déterministe dans les séries macro-économiques et financières. Cependant la faiblesse du nombre d'observations utilisé dans ces travaux a donné lieu à de nombreuses critiques et remises en cause¹⁰ (Cf. RAMSEY et YUAN [1989] et RAMSEY, SAYERS et ROTHMAN [1990]). L'étude menée par GIRERD-POTIN et TARAMASCO [1994] sur les rentabilités hebdomadaires de l'indice SBF 250 a conduit les auteurs à ne pas retenir l'hypothèse de chaos déterministe, du fait de la *faible* positivité des exposants de LYAPUNOV. A l'inverse, les travaux d'ALEXANDRE [1994] portant sur les rentabilités de cinq actions de l'indice CAC 40 mettent en avant la présence de chaos déterministe dans ces séries. Ces divergences de résultats peuvent être causées par l'utilisation d'un nombre insuffisant d'observations. Nous proposons ici une étude empirique sur des séries comportant un nombre d'observations important, supérieur à 6 600 données.

Ce paragraphe a ainsi pour objet d'appliquer les différents outils de détection du chaos sur les séries quotidiennes des rentabilités boursières des indices boursiers des pays du G 7 : SP 500 (Etats-Unis), FT 500 (Grande-Bretagne), SBF 250 (France), TOPIX (Japon), TSE 300 (Canada), FAZ (Allemagne) et BCI (Italie). Nous définissons les rentabilités comme les variations logarithmiques des cours. Cette transformation a pour objet de stationnariser les séries étudiées¹¹. Les statistiques descriptives des séries de rentabilités figurent en annexe (tableau 6). Le principal résultat concerne la non-normalité des séries étudiées. En particulier, la négativité des coefficients de *skewness* indique que la distribution des séries est étalée vers la gauche. Cette asymétrie peut être le signe de non-linéarités dans les processus sous-jacents étudiés, dans la mesure où les modèles linéaires ne peuvent rendre compte des phénomènes d'asymétrie. Afin de vérifier cette hypothèse, nous avons appliqué le test d'indépendance de BROCK, DECHERT et SCHEINKMAN [1987], noté BDS¹².

10. Il faut en effet souligner que les outils de détection du chaos ont initialement été développés en sciences physiques, domaine où l'on dispose d'un très grand nombre de données.

11. L'application des tests de DICKEY-FULLER et PHILLIPS-PERRON (résultats non reportés ici) fait en effet ressortir la présence d'une racine unitaire dans toutes les séries en logarithmes. L'application des outils de détection du chaos nécessitant de travailler sur des séries stationnaires, nous avons stationnarisé les séries au moyen d'une différence première.

12. Nous ne reprenons pas ici la présentation du test BDS. Pour plus de détails, on pourra notamment se reporter à ALEXANDRE [1994] ou MIGNON [1996]. Dans une contrainte de place, les résultats du test n'ont pas été reportés mais sont disponibles auprès de l'auteur.

Rappelons que ce test peut détecter la présence d'une structure de dépendance aussi bien linéaire que non linéaire. Par conséquent, pour utiliser le test BDS en tant que test de non-linéarité, il est indispensable de l'appliquer sur des séries filtrées de toute forme de dépendance linéaire. A cette fin, nous avons modélisé nos séries de rentabilités boursières au moyen de processus ARMA dans le but d'éliminer toute corrélation sérielle. Le test BDS a alors été appliqué sur les séries résiduelles issues des modélisations ARMA. Les résultats obtenus nous ont conduit à rejeter l'hypothèse nulle de série indépendamment et identiquement distribuée. Le test ayant été mis en œuvre sur des séries stationnaires filtrées de toute autocorrélation (linéaire), nous pouvons conclure en termes de non-linéarité du processus sous-jacent aux séries de rentabilités. Le test BDS ne nous permet cependant pas d'identifier le type de la non-linéarité : est-ce une non-linéarité issue d'un processus déterministe chaotique ou, au contraire, une non-linéarité induite par un processus stochastique ? L'objet des développements suivants est d'apporter une réponse à cette interrogation en "testant" le caractère déterministe du modèle sous-jacent au moyen des outils de détection du chaos.

3.1. Application des outils de détection du chaos

Afin de détecter l'éventuelle présence d'un comportement chaotique dans les séries de rentabilités boursières, nous avons appliqué les outils de détection du chaos présentés précédemment : les exposants de LYAPUNOV et la dimension de corrélation.

3.1.1. Estimation du plus grand exposant de LYAPUNOV

Il existe divers algorithmes permettant d'estimer le plus grand exposant de LYAPUNOV à partir de l'observation d'une série temporelle : ECKMANN *et al.* [1986], SANO et SAWADA [1985], WOLF, SWIFT, SWINNEY et VASTANO [1985]. Nous avons ici choisi d'appliquer l'algorithme élaboré par WOLF *et al.* [1985] dont une représentation schématique est reproduite sur la figure 1 :

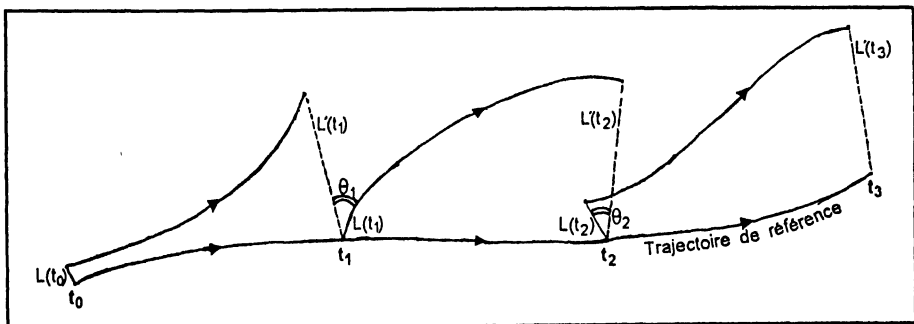


FIGURE 1.

Représentation schématique de l'algorithme de Wolf *et al.* [1985].

On choisit tout d'abord un point initial (à la date t_0) sur une orbite quelconque de l'attracteur. On localise ensuite le plus proche voisin de ce point initial et on note la distance entre ces deux points $L(t_0)$. A une date t_1 ultérieure, la distance initiale $L(t_0)$ entre ces deux points aura évolué en une distance $L'(t_1)$. On cherche alors une nouvelle trajectoire (remplaçant la précédente) qui doit satisfaire les deux critères suivants :

- sa distance $L(t_1)$ par rapport à la trajectoire de référence doit être faible,
- la séparation angulaire Θ_1 entre $L(t_1)$ et $L'(t_1)$ doit être petite.

On répète cette procédure jusqu'à ce que la trajectoire de référence ait "traversé" l'ensemble des données. On estime alors le plus grand exposant de LYAPUNOV λ_1 par :

$$\lambda_1 = \frac{1}{t_M - t_0} \sum_{k=1}^M \log_2 \frac{L'(t_k)}{L(t_{k-1})} \quad (7)$$

où M est le nombre total de remplacements de trajectoires.

L'algorithme de WOLF *et al.* [1985] est donc basé sur la mesure du taux de divergence entre deux trajectoires. En pratique, on se fixe une distance maximale à ne pas dépasser. Dès que cette distance est franchie, la trajectoire précédemment suivie est remplacée par une nouvelle trajectoire et ainsi de suite... Avec un nombre de données suffisamment important et si l'attracteur du système est chaotique, le calcul doit converger vers une valeur stable de λ_1 .

L'algorithme de WOLF *et al.* ne nous permet pas de déterminer le spectre complet des exposants de LYAPUNOV, mais uniquement le plus grand exposant de LYAPUNOV. Comme le note MATHIEU [1996], vouloir calculer plus d'un exposant de LYAPUNOV reviendrait à chercher plusieurs trajectoires (et non une seule) et à suivre toutes ces trajectoires simultanément. On comprend dès lors qu'une telle procédure induirait une complexification algorithmique trop importante.

L'application empirique de cette technique nécessite le choix de divers paramètres :

- la dimension de plongement, qui correspond en fait à la dimension attendue de l'attracteur,
- le temps durant lequel on va suivre une trajectoire avant que celle-ci ne soit remplacée par une nouvelle trajectoire,
- la distance maximale entre le point figurant sur la trajectoire de référence et le point de la trajectoire que l'on va suivre durant le temps fixé précédemment,
- la distance minimale entre ces deux points.

Si, en théorie, l'algorithme n'est pas sensible au choix de ces divers paramètres, il n'en va pas de même en pratique. Il est alors nécessaire d'effectuer plusieurs

LA DYNAMIQUE DES MARCHÉS BOURSIERS EST-ELLE CHAOTIQUE

essais et de retenir les valeurs qui conduisent aux résultats les plus stables. WOLF *et al.* ont cependant élaboré, au moyen de simulations, un certain nombre de “règles” permettant de nous guider dans le choix des distances maximale et minimale acceptables :

- la distance maximale entre deux points ne doit pas excéder 10 % de l'étendue de la série,
- la distance minimale entre deux points est généralement choisie comme étant 10 % de la distance maximale.

Concernant le choix du temps durant lequel on va suivre une trajectoire avant de la remplacer par une nouvelle trajectoire, il convient d'effectuer plusieurs essais afin de trouver des valeurs relativement stables pour l'exposant de LYAPUNOV. Nous reportons ici les résultats pour des temps correspondant à 10 jours (environ deux semaines) et 40 jours (environ deux mois). Nous avons, par ailleurs, fait varier la dimension de plongement de 3 à 10. Les résultats obtenus sur les séries de rentabilités boursières figurent dans le tableau ci-après :

Tableau 1

Calcul du plus grand exposant de LYAPUNOV sur les séries de rentabilités

Série	Temps	m=3	m=4	m=5	m=10
SP 500	10	0,0174	0,0241	0,0242	0,0105
	40	0,0047	0,0065	0,0072	0,0022
FT 500	10	0,0397	0,0503	0,0514	0,0109
	40	0,0109	0,0141	0,0135	0,0034
SBF 250	10	0,1147	0,0995	0,0552	0,0085
	40	0,0249	0,0261	0,0135	*
TOPIX	10	0,0149	0,0162	0,0209	0,0102
	40	0,0040	0,0056	0,0067	0,0038
TSE 300	10	0,0408	0,0375	0,0449	0,0118
	40	0,0095	0,0117	0,0105	0,0026
FAZ	10	0,0311	0,0344	0,0350	0,0100
	40	0,0097	0,0086	0,0097	0,0026
BCI	10	0,0387	0,0499	0,0542	0,0138
	40	0,0108	0,0135	0,0141	0,0039

* : pas de convergence

La première remarque que l'on peut effectuer au regard du tableau 1 est que tous les exposants de LYAPUNOV sont positifs, suggérant donc la présence d'un attracteur chaotique pour toutes les séries de rentabilités boursières considérées. La positivité du plus grand exposant de LYAPUNOV est ainsi le signe de la faible prédictabilité des diverses séries considérées. En outre, plus la valeur de l'exposant de LYAPUNOV est importante et moins le système est prévisible. Selon cette acceptation, les séries les «moins prévisibles» seraient les rentabilités des indices FT 500, SBF 250 et BCI. Les résultats concernant la série des rentabilités de l'indice boursier français doivent cependant être teintés d'une grande prudence dans la mesure où cette série ne comporte que 1396 observations. Les valeurs de l'exposant de LYAPUNOV obtenues sur cette série sont par conséquent certainement surestimées.

On peut également remarquer que la valeur de l'exposant de LYAPUNOV est relativement stable surtout pour les valeurs 3, 4 et 5 de la dimension de plongement. De plus, pour toutes les séries, la valeur de l'exposant de LYAPUNOV décroît lorsque le temps durant lequel on va suivre une trajectoire avant de la remplacer augmente, ce qui est conforme à la théorie (Cf. WOLF *et al.* [1985]).

Si ces résultats vont dans le sens d'un processus sous-jacent aux rentabilités boursières de type déterministe, on ne peut manquer de s'interroger sur la validité d'une telle conclusion. Certes, le plus grand exposant de LYAPUNOV est toujours positif, mais cette positivité ne doit-elle pas être relativisée au vu de la faiblesse du coefficient ? En d'autres termes, la faible valeur obtenue pour les divers exposants de LYAPUNOV (entre 0,01 et 0,06 selon les séries) nous incite à nous interroger sur la significativité réelle de ces estimateurs : sont-ils significativement différents de zéro ? Nous ne pouvons pas répondre à cette question dans la mesure où le calcul des exposants de LYAPUNOV n'est pas un test statistique à proprement parler. Nous appliquerons par la suite des tests de validation afin d'étudier la fiabilité des résultats obtenus ici. Nous nous proposons à présent de déterminer la valeur de la dimension de corrélation afin de vérifier le caractère déterministe du processus sous-jacent aux séries de rentabilités boursières apparemment mis en avant par l'application des exposants de LYAPUNOV.

3.1.2 Estimation de la dimension de corrélation

Les résultats auxquels nous aboutissons sur les séries de rentabilités sont reportés dans le tableau ci-après. Le choix des paramètres ϵ et m s'est fait selon le même schéma que pour le test BDS en suivant les règles suggérées par BROCK *et al.* [1992]. Nous avons ainsi fait varier la dimension de plongement de 2 à 15 et la valeur de ϵ entre $0,5\sigma$ et 2σ , σ étant l'écart type de la série étudiée.

Tableau 2

**Estimation de la dimension de corrélation
sur les séries de rentabilités**

<i>m</i>	$\epsilon/\sigma = 0,5$				$\epsilon/\sigma = 1$				$\epsilon/\sigma = 2$			
	2	5	10	15	2	5	10	15	2	5	10	15
SP 500	0,52	1,25	2,31	3,21	0,29	0,69	1,22	1,66	0,09	0,21	0,38	0,51
FT 500	0,58	1,34	2,47	3,49	0,32	0,72	1,28	1,76	0,10	0,22	0,37	0,50
SBF 250	0,71	1,74	3,58		0,44	1,07	2,0		0,15	0,36	0,69	
TOPIX	0,44	0,96	1,62	2,14	0,23	0,48	0,80	1,06	0,07	0,16	0,27	0,35
TSE 300	0,52	1,19	2,21	3,11	0,28	0,62	1,11	1,52	0,09	0,20	0,35	0,47
FAZ	0,55	1,28	2,36	3,42	0,30	0,68	1,22	1,67	0,09	0,21	0,36	0,49
BCI	0,55	1,28	2,33	3,21	0,31	0,70	1,24	1,70	0,11	0,23	0,41	0,57

Ces résultats nous montrent que, dans tous les cas, la dimension de corrélation croît avec la dimension de plongement. On notera toutefois que la dimension de corrélation croît moins vite que la dimension de plongement, témoignant ainsi de la présence d'une structure dans les diverses séries. Par exemple, pour la série des rentabilités de l'indice TOPIX, la dimension de corrélation est estimée à 2,14 lorsque l'on plonge la série dans un espace de dimension 15 (pour $\epsilon/\sigma = 0,5$).

Le fait que l'on ne puisse pas détecter de stabilisation de la dimension de corrélation nous paraît plutôt être indicatif du fait que le processus sous-jacent aux séries de rentabilités est de nature stochastique. Néanmoins, rien ne prouve que la dimension du système ne se stabilise pas à une valeur très élevée de la dimension de plongement. Nous rencontrons alors ici une limitation due à notre nombre de données qui, s'il est important, n'en reste pas moins "ridicule" par rapport au nombre d'observations utilisé par les physiciens... En d'autres termes, rien ne prouve que nous ne soyons pas en face d'un processus déterministe à grande dimension, que l'on n'arrive pas à détecter en raison de l'insuffisance du nombre de points utilisés dans l'étape de reconstruction.

Globalement, les conclusions nous paraissent quelque peu contradictoires selon l'outil utilisé. En effet, alors que le calcul des exposants de LYAPUNOV nous incitait à conclure en termes de comportement chaotique des séries, l'application de la dimension de corrélation suggère fortement que le processus sous-jacent aux séries de rentabilités est de nature stochastique. Afin de pallier le manque d'inférence statistique et de trancher entre les deux interprétations, nous nous proposons à présent d'effectuer deux tests de validation : le test résiduel et le test du mélange aléatoire.

3.2 Tests de validation :
test résiduel et test du mélange aléatoire

Le test résiduel de BROCK [1986] a été appliqué sur les séries résiduelles issues de modélisations ARMA préalablement effectuées.

Rappelons que si le processus sous-jacent aux séries de rentabilités est chaotique, nous devons obtenir les mêmes résultats que sur les séries initiales des rentabilités boursières. Concernant le “test du mélange aléatoire”, si le processus recherché est chaotique, la dimension estimée sur la série mélangée doit être plus élevée et l’exposant de LYAPUNOV doit être plus faible, voire négatif.

3.2.1 Exposants de LYAPUNOV

Le tableau ci-après fournit les résultats des tests de validation sur les exposants de LYAPUNOV pour diverses valeurs de la dimension de plongement m .

Tableau 3

Tests de validation :
estimation du plus grand exposant de LIAPUNOV

Série	Temps	Test résiduel				Test du mélange aléatoire			
		$m = 3$	$m = 4$	$m = 5$	$m = 10$	$m = 3$	$m = 4$	$m = 5$	$m = 10$
SP 500	10	0,0148	0,0164	0,0192	0,0099	0,0206	0,0273	0,0364	0,0079
	40	0,0042	0,0047	0,0055	0,0029	0,0033	0,0056	0,0078	0,0021
FT 500	10	0,0339	0,0463	0,0428	0,0096	0,0463	0,0575	0,0680	0,0127
	40	0,0114	0,0133	0,0118	0,0032	0,0126	0,0146	0,0161	0,0040
SBF 250	10	0,0995	0,0911	0,0483	0,0085	0,0999	0,0952	0,0612	0,0101
	40	0,0268	0,0213	0,0126	0,0001	0,0297	0,0232	0,0156	0,0044
TOPIX	10	0,0197	0,0216	0,0241	0,0116	0,0209	0,0289	0,0349	0,0105
	40	0,0064	0,0057	0,0055	0,0034	0,0049	0,0071	0,0085	0,0039
TSE 300	10	0,0362	0,0397	0,0448	0,0086	0,0427	0,0565	0,0605	0,0120
	40	0,0127	0,0115	0,0117	0,0040	0,0128	0,0148	0,0156	0,0031
FAZ	10	0,0257	0,0352	0,0372	0,0085	0,0340	0,0472	0,0549	0,0098
	40	0,0096	0,0111	0,0097	0,0025	0,0088	0,0103	0,0125	0,0030
BCI	10	0,0364	0,0431	0,0503	0,0111	0,0497	0,0603	0,0634	0,0121
	40	0,0146	0,0135	0,0120	0,0032	0,0139	0,0156	0,0174	0,0038

Il ressort du test résiduel que tous les exposants de LYAPUNOV sont positifs, ce qui semblerait confirmer la présence de chaos déterministe. En outre, si l’on compare le tableau 3 au tableau 1, on constate que les valeurs estimées sur les séries résiduelles et sur les séries originelles sont tout à fait similaires. Par conséquent, et si l’on fait abstraction de la faible valeur des exposants,

LA DYNAMIQUE DES MARCHÉS BOURSIERS EST-ELLE CHAOTIQUE

les résultats sont pour l'instant en faveur d'un processus générateur des rentabilités de nature chaotique. Cette conclusion est cependant mise à mal par les résultats issus de l'application du test du mélange aléatoire. Les exposants de LYAPUNOV estimés sur les séries mélangées restent positifs et du même ordre de grandeur que ceux obtenus sur les séries de rentabilités. Or, si le processus était déterministe, le mélange aurait dû détruire la structure de la série et conduire à des exposants de LYAPUNOV plus faibles, voire négatifs. Nous sommes donc ici amenés à rejeter clairement l'hypothèse de chaos déterministe et à conclure en termes de stochasticité du processus sous-jacent aux séries de rentabilités boursières. Il reste à vérifier cette interprétation au moyen de l'application des tests de validation sur la dimension de corrélation.

3.2.2. Dimension de corrélation

Les résultats du test résiduel et du test du mélange aléatoire sur la dimension de corrélation sont reportés dans les tableaux 4 et 5.

Tableau 4

Test résiduel : estimation de la dimension de corrélation

<i>m</i>	$\varepsilon/\sigma = 0,5$				$\varepsilon/\sigma = 1$				$\varepsilon/\sigma = 2$			
	2	5	10	15	2	5	10	15	2	5	10	15
SP 500	0,52	1,25	2,28	3,23	0,29	0,68	1,21	1,65	0,09	0,21	0,37	0,50
FT 500	0,58	1,36	2,51	3,48	0,33	0,74	1,31	1,80	0,10	0,22	0,37	0,50
SBF 250	0,72	1,75	3,43		0,44	1,08	2,04		0,15	0,36	0,70	
TOPIX	0,45	0,97	1,64	2,16	0,23	0,49	0,81	1,08	0,08	0,16	0,27	0,36
TSE 300	0,53	1,22	2,29	3,22	0,28	0,64	1,13	1,56	0,09	0,20	0,35	0,47
FAZ	0,55	1,28	2,38	3,47	0,30	0,69	1,23	1,69	0,09	0,21	0,36	0,50
BCI	0,55	1,28	2,32	3,21	0,31	0,69	1,23	1,68	0,10	0,22	0,40	0,56

Tableau 5

Test du mélange aléatoire : estimation de la dimension de corrélation

<i>m</i>	$\varepsilon/\sigma = 0,5$				$\varepsilon/\sigma = 1$				$\varepsilon/\sigma = 2$			
	2	5	10	15	2	5	10	15	2	5	10	15
SP 500	0,53	1,34	2,65	3,94	0,30	0,76	1,52	2,28	0,10	0,25	0,49	0,74
FT 500	0,60	1,50	2,97	4,38	0,34	0,86	1,72	2,59	0,11	0,28	0,56	0,84
SBF 250	0,71	1,76	3,70		0,44	1,09	2,73		0,15	0,38	0,76	
TOPIX	0,47	1,16	2,32	3,53	0,25	0,62	1,24	1,87	0,08	0,21	0,43	0,64
TSE 300	0,54	1,37	2,72	3,85	0,30	0,76	1,53	2,30	0,10	0,26	0,53	0,80
FAZ	0,56	1,40	2,81	4,25	0,32	0,79	1,56	2,35	0,10	0,25	0,50	0,74
BCI	0,57	1,43	2,81	4,21	0,33	0,81	1,60	2,38	0,11	0,28	0,54	0,81

Les conclusions issues du test résiduel sur la dimension de corrélation sont identiques à celles effectuées lors de l'estimation du plus grand exposant de LYAPUNOV : les valeurs de la dimension estimées sur les séries résiduelles sont quasiment identiques à celles obtenues sur les séries originelles. Néanmoins, la dimension de corrélation continue de croître avec la dimension de plongement. Le test du mélange aléatoire semble indiquer qu'il existe une certaine structure dans les séries dans la mesure où la dimension estimée sur les séries mélangées est supérieure à celle obtenue sur les séries originelles de rentabilités. Un tel résultat est en faveur de la présence de chaos déterministe. Cependant, en raison de la non-saturation de la valeur de la dimension de corrélation lorsque la dimension de plongement croît, nous sommes tentés de conclure au caractère stochastique du processus générant les séries de rentabilités boursières. Notons en outre que la dimension estimée sur les séries mélangées, si elle est effectivement supérieure à celle obtenue sur les séries initiales de rentabilités, n'est en général que *légèrement* supérieure.

4. Conclusion :

Vers une approche stochastique des marchés financiers

Malgré notre important nombre de données, les résultats issus de l'application des outils de détection du chaos sont rarement concordants. Ils peuvent cependant être résumés comme suit :

- Sur les séries originelles de rentabilités, le plus grand exposant de LYAPUNOV est dans tous les cas positif, ce qui est en faveur de l'hypothèse de chaos déterministe. Cette conclusion est cependant à nuancer au vu des résultats obtenus lors de la détermination de la dimension de corrélation. Cette dernière, qui devrait se stabiliser à une certaine valeur, croît en fait avec la dimension de plongement, ce qui est caractéristique d'un processus stochastique. Les conclusions étant contradictoires et ces deux outils ne constituant pas des tests statistiques au sens propre du terme, nous avons appliqué deux tests de validation : le test résiduel et le test du mélange aléatoire.
- Sur les séries résiduelles issues des modélisations ARMA, le plus grand exposant de LYAPUNOV reste positif et la dimension de corrélation est identique à celle estimée sur les séries initiales. Par conséquent, la transformation ARMA opérée sur les séries de rentabilités boursières n'a pas affecté la structure des données. Ceci est en accord avec l'hypothèse de chaos déterministe en notant toutefois que la dimension de corrélation ne parvient toujours pas à saturation.
- La mise en œuvre du test du mélange aléatoire réfute l'hypothèse de chaos déterministe en ce qui concerne le calcul des exposants de LYAPUNOV. Ces derniers sont en effet toujours positifs, témoignant ainsi de la présence d'une structure déterministe chaotique, alors que la structure de la série a précisément été détruite¹³... Enfin, la dimension estimée sur les séries

13. La mise en œuvre du test BDS sur les séries mélangées (résultats non reportés ici) nous conduit en effet à ne plus rejeter l'hypothèse nulle d'indépendance.

LA DYNAMIQUE DES MARCHÉS BOURSIERS EST-ELLE CHAOTIQUE

mélangées croît plus fortement avec la dimension de plongement, mais l'écart entre cette dimension et celle estimée sur les séries initiales de rentabilités reste généralement relativement faible. Ces résultats nous incitent donc à conclure en faveur du caractère stochastique des processus générant les rentabilités.

Globalement, ces divers résultats nous conduisent à rejeter l'hypothèse de chaos déterministe en faveur du caractère stochastique des processus sous-jacents aux séries de rentabilités boursières. L'hypothèse de non-linéarité de tels processus semble quant à elle acceptable. Par conséquent, la modélisation des séries de rentabilités boursières nous paraît être à rechercher au travers d'un processus stochastique non linéaire.

ANNEXE

Tableau 6

Statistiques descriptives sur les séries de rentabilité boursière

Série	Période d'étude	Nombre observ.	Moyenne	Ecart type	Skewness	Kurtosis	J.B.
SP 500	02/01/1968 -12/06/1996	7229	0,000268	0,009183	-0,99159	27,5372	182534,4
FT 500	01/01/1969 -31/01/1996	6921	0,000338	0,010464	-0,244309	13,20031	30073,18
SBF 250	28/12/1990 -12/06/1996	1396	0,000268	0,008325	-0,194543	7,349330	1109,125
TOPIX	06/01/1969 -12/06/1996	6851	0,000368	0,009920	-0,61743	26,70601	160855,8
TSE 300	01/01/1970 -12/06/1996	6638	0,000237	0,007743	-0,61894	16,65228	51974,75
FAZ	01/01/1969 -12/06/1996	6970	0,000197	0,009844	-0,743902	17,91726	65267,68
BCI	01/01/1970 -12/06/1996	6669	0,000225	0,013509	-0,348958	13,16420	28842,87

J.B. est la valeur de la statistique du test de normalité de JARQUE et BÉRA. Sous l'hypothèse nulle de normalité, cette statistique suit une loi de Khi-deux à deux degrés de liberté.

Bibliographie

- ALEXANDRE H. (1994) "Deux mesures de l'exposant de Lyapunov comme signal de chaos à la Bourse de Paris", *Journal de la Société Statistique de Paris*, n°3, pp. 45-71.
- BARNETT W.A. et CHEN P. (1988) "The Aggregation-Theoretic Monetary Aggregates Are Chaotic and Have Strange Attractors : An Econometric Application of Mathematical Chaos", in BARNETT W.A., BERNDT E.R. et WHITE H. (eds), *Dynamic Econometric Modeling*, Cambridge University Press.
- BERGÉ P., POMEAU Y. et VIDAL C. (1988) *L'ordre dans le chaos. Vers une approche déterministe de la turbulence*, Hermann.
- BROCK W.A. (1986) "Distinguishing Random and Deterministic Systems : Abridged Version", *Journal of Economic Theory*, Vol. 40, pp. 168-195.
- BROCK W.A., DECHERT W.D. et SCHEINKMAN J.A. (1987) "A Test for Independence Based on the Correlation Dimension", *Working Paper*, University of Wisconsin.
- BROCK W.A., HSIEH D.A. et LEBARON B. (1992) *Nonlinear Dynamics, Chaos and Instability*, MIT Press, Cambridge, 328 pages, seconde édition.
- BROCK W.A. et SAYERS C.L. (1988) "Is the Business Cycle Characterized by Deterministic Chaos ?", *Journal of Monetary Economics*, Vol. 22, pp. 71-90.
- ECKMANN J.-P. (1992) "Mesures dans un système dynamique chaotique", in DAHAN DALMEDICO, CHABERT et CHEMLA eds, *Chaos et déterminisme*, Le Seuil Sciences.
- ECKMANN J.-P., KAMPHORST S.O., RUELLE D. et CILIBERTO S. (1986) "Liapunov Exponents from Time Series", *Physical Review A*, Vol. 34, n°6, pp. 4971-4979.
- ECKMANN J.-P. et RUELLE D. (1985) "Ergodic Theory of Chaos and Strange Attractors", *Reviews of Modern Physics*, Vol. 57, n°3, pp. 617-656.
- GIRERD-POTIN I. et TARAMASCO O. (1994) "Les rentabilités à la Bourse de Paris sont-elles chaotiques ?", *Revue Economique*, n°2, pp. 215-238.
- GRASSBERGER P. et PROCACCIA I. (1983) "Measuring the Strangeness of Strange Attractors", *Physica 9D*, pp. 189-208.
- GREBOGI C., OTT E., PELIKAN S. et YORKE J.A. (1984) "Strange Attractors that Are Not Chaotic", *Physica 13D*, pp. 261-268.
- HSIEH D.A. (1989) "Testing Nonlinear Dependence in Daily Foreign Exchange Rates", *Journal of Business*, Vol. 62, n°3, pp. 339-368.
- HSIEH D.A. (1991) "Chaos and Nonlinear Dynamics : Application to Financial Markets", *The Journal of Finance*, Vol. XLVI, n°5, pp. 1839-1877.

- MATHIEU L. (1996) *Séries chaotiques et analyse économique*, Thèse, Université Paris X-Nanterre.
- MIGNON V. (1996) "Les implications de la mémoire longue et de la non linéarité sur l'efficiéce du marché des changes", *Journal de la Société Statistique de Paris*, n°1, pp. 51-72.
- PETERS E.E. (1991) *Chaos and Order in the Capital Markets*, John Wiley&Sons Inc.
- PETERS E.E. (1994) *Fractal Market Analysis*, John Wiley&Sons Inc.
- RAMSEY J.B., SAYERS C.L. et ROTHMAN P. (1990) "The Statistical Properties of Dimension Calculations Using Small Data Sets : Some Economic Implications", *International Economic Review*, Vol. 31, n°4, pp. 991-1020.
- RAMSEY J.B. et YUAN H. (1989) "Bias and Error Bars in Dimension Calculations and Their Evaluation in Some Simple Models", *Physics Letters*, A134, pp. 287-297.
- RUELLE D. et TAKENS F. (1971) "On the Nature of Turbulence", *Communications in Mathematical Physics*, 20, pp. 167-192.
- SAKAI H. et TOKUMARU H. (1980) "Autocorrelations of a Certain Chaos", *IEEE Transactions on Acoustics, Speech and Signal Processing*, pp. 588-590.
- SANO M. et SAWADA Y. (1985) "Measurement of the Lyapunov Spectrum from a Chaotic Time Series", *Physical Review Letters*, Vol. 55, n°10, pp. 1082-1085.
- SCHEINKMAN J.A. et LEBARON B. (1989) "Nonlinear Dynamics and Stock Returns", *Journal of Business*, Vol. 62, n°3, pp. 311-337.
- TAKENS F. (1981) "Detecting Strange Attractors in Turbulence", in *Dynamical Systems and Turbulence*, Lecture Notes in Mathematics, Vol. 898, Springer Verlag, pp. 366-381.
- WOLF A., SWIFT J.B., SWINNEY H.L. et VASTANO J.A. (1985) "Determining Lyapunov Exponents from a Time Series", *Physica* 16D, pp. 285-317.