Journal de la société statistique de Paris

Patrick Navatte
François Quittard-Pinon

Options digitales et titres couloirs sur taux d'intérêt

Journal de la société statistique de Paris, tome 138, nº 2 (1997), p. 41-62
<http://www.numdam.org/item?id=JSFS_1997__138_2_41_0>

OPTIONS DIGITALES ET TITRES COULOIRS SUR TAUX D'INTÉRÊT

Patrick NAVATTE
Université de Rennes I
Institut de Gestion de Rennes - CREREG

François QUITTARD-PINON
Université de Lyon I
Institut de Science Financière et d'Assurances – Villeurbanne

Résumé

Nous évaluons des options digitales sur taux d'intérêt, puis des titres obligataires «couloirs» à l'aide d'un modèle d'évolution des taux linéaire gaussien à un seul facteur, ainsi que par l'intermédiaire de l'univers forward-neutre. On obtient alors des formules analytiques calculées d'une manière différente et plus simple que celle utilisée par TURNBULL *(1995). Des simulations sont présentées pour illustrer les formules précédentes, et mettre en relief leur caractère opérationnel.*

Abstract

We value interest rate call digital options and structured bonds, using a one factor linear gaussian model and the well-known forward neutral probability approach. We get closed-form formula for all the contracts studied in a simpler and different way than TURNBULL *(1995). Moreover, some simulations are designed to enhance the properties and tractability of the formulas.*

Mots-clés :

option sur taux d'intérêt, options digitales, probabilité forward-neutre, titres couloirs, obligations corridors.

Introduction

Récemment, la baisse généralisée des taux d'intérêt a amené les investisseurs à expérimenter les «produits structurés» pour tenter de maintenir une rémunération correcte de leurs portefeuilles. La famille des produits structurés qui a rencontré le plus de succès sur le marché international est certainement celle des «titres couloirs» ou des «obligations corridors». Rappelons qu'une telle obligation garantit le remboursement du principal à l'échéance, mais paie des coupons dont la valeur est fonction du nombre de jours où un taux d'intérêt de référence (le taux libor 6 mois par exemple) reste compris entre une borne haute et une borne basse définies à l'avance, ces dernières pouvant par ailleurs évoluer à mesure que le temps passe. Ainsi à titre d'exemple, le royaume de Suède a-t-il émis en 1994 un montant de 200 millions d'obligations d'échéance deux années, le contrat d'émission stipulant que le coupon payé tous les six mois serait égal à Libor + 75 points de base dans la mesure où le taux Libor coté serait chaque jour compris entre certaines limites haute et basse de taux[1].

Les produits structurés de type «titre couloir» offrent à l'investisseur un espoir de rentabilité améliorée notamment pour ceux qui pensent, en contradiction avec la courbe des taux à terme, que le taux de référence restera compris entre deux bornes prédéfinies pendant la durée de vie des différents coupons. Les courbes de taux à terme ne s'étant pas révélées jusqu'à présent de bons prédicteurs des taux futurs au comptant, il existe sans doute des opportunités d'arbitrage à saisir. Cependant, pour vendre ces produits, il faut assurer aux investisseurs que l'émission présentera un degré de liquidité suffisant, car ils peuvent souhaiter arbitrer leurs positions pendant la période de vie du titre. L'absence d'une liquidité suffisante, peut amener des investisseurs à ne pas quitter le confort d'un marché obligataire où se négocient des produits plus standard. Pour le moment, ce type de produit «structuré» continue à enregistrer une forte demande. Il est toutefois à noter que les titres couloirs les plus en vogue actuellement sont ceux dont les coupons sont liés à l'évolution des taux de change.

Cet article est organisé de la manière suivante. La section 1 présente le cadre théorique de l'analyse. Nous y rappelons quelques définitions, puis nous retenons un modéle d'évolution de la structure des taux d'intérêt, avant de présenter l'intérêt de l'univers forward-neutre.

Dans la section 2, nous nous intéressons à l'évaluation d'options digitales et d'options à paiement contingent sur taux d'intérêt, avant de valoriser les titres couloirs ou obligations «corridors». Il est à noter que pour tous les contrats considérés, des formules explicites sont fournies, le calcul étant effectué d'une manière différente et plus intuitive que ce qui fut proposé par TURNBULL (1995). Des simulations permettent d'illustrer à chaque fois les formules obtenues.

---

1. Le contrat d'émission prévoit les limites hautes et basses suivantes aux différentes époques indiquées ci-après :
07/02/94 – 07/08/94 : 3 % à 4 %; 07/08/94 – 07/02/95 : 3 % à 4,75 %; 07/02/95 – 07/08/95 : 3 % à 5.50 %; 07/08/95 – 07/02/96 : 3 % à 6 %.

1. La modélisation de la structure des taux

Dans cette section, nous rappelons quelques définitions, et précisons le modèle de taux que nous allons considérer pour évaluer différents actifs plus ou moins complexes et contingents à l'évolution des taux d'intérêt. La «puissance» de l'univers forward-neutre est également soulignée en matière d'évaluation d'actifs contingents.

1.1 Définitions

Une obligation à coupon-zéro est un titre financier versant sûrement à une échéance future fixée au début de sa vie un seul flux monétaire, normalisé, et par convention égal à un franc. Avec le passage du temps, l'échéance se rapproche, et on appelle maturité la durée de vie résiduelle. Nous notons $P(t,s)$ (avec $s \geq t$) la valeur à la date t d'un coupon-zéro d'échéance s. On définit le rendement à l'échéance, $Y(t,s)$, par :

$$Y(t,s) = -\frac{1}{s-t} \ln \left(P\ (t,s)\right).$$

Pour t fixé et T variable, $Y(t,T)$ décrit la courbe des taux. On parle également de structure par terme des taux d'intérêt ($STTI$). On définit également les taux, $R(t,T)$, au comptant pour l'échéance T, encore appelés taux actuariels, à l'aide de la relation : $P(t,T) = \dfrac{1}{\left(1+R(t,T)\right)^{T-t}}$,

on caractérise en outre le taux proportionnel ρ pour la période $[t,T]$ par

$$\rho\,(t,T) = \frac{1}{T-t}\left[\exp\{(T-t)\,Y(t,T)\} - 1\right]\cdot$$

Le taux à terme implicite, à l'instant t, pour la période $[T_1, T_2]$ noté $\phi\,(t; T_1, T_2)$ est représenté par l'expression suivante :

$$\phi\,(t;T_1,T_2) = \frac{(T_2-t)Y(t,T_2) - (T_1-t)Y(t,T_1)}{T_2-T_1} = \frac{1}{T_2-T_1}\ln\frac{P(t,T_1)}{P(t,T_2)}\,.$$

Notons par ailleurs que $\phi(0;t,T) = \dfrac{TY(0,T) - t\,Y(0,t)}{T-t}$

et que $\phi(0;t,T) = \dfrac{1}{T-t}\ln\dfrac{P(0,t)}{P(0,T)}\,.$

De plus, le taux à terme instantané est défini, lorsque la limite existe, par $f(t,T) = \lim\limits_{T_2 \downarrow T} \phi(t,T,T_2)\cdot$

On obtient alors aisément les résultats importants suivants :

$$f(t,T) = -\frac{\partial \ln P(t,s)}{\partial s}\Big|_{s=T}$$

$$Y(t,T) = \ln\left(1+R(t,T)\right) \text{ ou : } R(t,T) = e^{Y(t,T)} - 1$$

$$Y(t,T) = \frac{1}{T-t}\int_t^T f(t,u)\,\mathrm{d}u$$
$$f(t,T) = Y(t,T) + (T-t)\,\frac{\partial Y(t,T)}{\partial T}$$
$$P(t,T) = \exp\{-\int_t^T f(t,u)\,\mathrm{d}u\}$$

Ainsi, les prix des obligations zéro-coupon, les taux de rendement, ainsi que les taux à terme, peuvent se déduire les uns des autres et permettre l'étude de la $STTI$. Enfin, on définit le taux instantané, ou taux sans risque, noté $r(t)$, par :

$$r(t) \triangleq \lim_{T\to t}\left[-\frac{1}{T-t}\ \ln P(t,T)\right] = \lim_{T\to t} Y(t,T)$$

Cette définition implique que ce taux n'est pas observable car $r(t)$ est une limite de taux. Nous appelons $\delta(t)$ la fonction $\delta(t) \triangleq \exp\{-\int_0^t r(u)\,\mathrm{d}u\}$ que l'on dénomme parfois (abusivement) fonction d'actualisation, et de façon plus générale il vient :

$$\delta(s,t) \triangleq \exp\{-\int_s^t r(u)\,\mathrm{d}u\}$$

1.2 Le modèle de taux

De façon classique, nous considérons que l'incertitude est représentée par l'espace filtré $(\Omega, \{F_t\}, \Pi)$ où Ω est l'espace fondamental usuel, où $\{F_t\}(t \geq 0)$ est la filtration représentant en pratique, l'information disponible en t. Π désigne la mesure de probabilité historique. Parmi les différentes approches existantes relatives à l'étude de la structure des taux, nous retenons le modèle à un aléa avec une structure de volatilité déterministe. Nous supposons donc que la dynamique du prix du coupon-zéro vérifie l'équation différentielle stochastique suivante :

$$\frac{\mathrm{d}P}{P} = \mu(t,T)\mathrm{d}t - \sigma(t,T)\mathrm{d}z$$

où $\mu(t,T)$ est le rendement instantané espéré du coupon-zéro sous Π, où $\sigma(t,T)$ représente la structure de volatilité sous Π, et où z désigne un $\Pi - F_t$ mouvement brownien. En l'absence d'opportunité d'arbitrage, on sait qu'il existe un processus $\lambda(r,t)$, appelé prime de risque, qui est tel que $\mu(t,T) = r(t) + \lambda(r,t)\,\sigma(t,T)$. En utilisant le théorème de GIRSANOV, on peut changer la dérive μ de l'EDS, de telle sorte que l'on puisse écrire :

$$\frac{\mathrm{d}P}{P} = r(t)\mathrm{d}t - \sigma(t,T)\mathrm{d}\widehat{z} \tag{1}$$

où $\widehat{z}(t) = z(t) - \displaystyle\int_0^t \lambda(r,u)\,\mathrm{d}u$ est un brownien sous Q.

Ce théorème permet de changer d'univers : on passe de l'univers historique $(\Omega, \{F_t\}, \Pi)$ à l'univers d'évaluation $(\Omega, \{F_t\}, Q)$, où Q est la nouvelle mesure de probabilité, caractérisée techniquement dans le théorème de GIRSANOV. Plus précisément, la mesure Q est définie par :

$$\frac{\mathrm{d}Q}{\mathrm{d}\Pi} = \exp\{\int_0^T \lambda(r,t)\mathrm{d}\,z - \frac{1}{2}\int_0^T \lambda^2(r,t)\mathrm{d}\,t\}.$$

Elle contient de façon implicite les primes de risque, ce qui fait qu'en espérance, le rendement instantané de toute obligation à coupon zéro est égal au taux de l'actif sans risque $(E_Q\big(\frac{\mathrm{d}P}{P}\big) = r\mathrm{d}t)$. Ceci justifie le nom de probabilité risque-neutre. Un résultat fondamental de la théorie financière assure que dans l'univers risque-neutre, et en l'absence d'opportunité d'arbitrage, (AOA), les processus de gain d'un actif financier (cours plus revenu) actualisés au taux de l'actif sans risque, sont des Q-martingales. C'est l'un des résultats que nous allons systématiquement utiliser. On obtient donc, en particulier la très importante relation :

$$P(t,T) = E_Q\big[\exp - \int_t^T r(u)\,\mathrm{d}u/F_t\big] = E_Q\big[\delta(t,T)/F_t\big]\cdot$$

C'est $P(t,T)$ qui constitue en fait la véritable fonction d'actualisation. En supposant que la structure de volatilité, $\sigma(t,T)$, est déterministe, nous nous situons dans un contexte gaussien de taux d'intérêt. Cette hypothèse gênante en théorie s'avère, toutefois, assez robuste en pratique. $P(0,T)$ étant connu, on obtient après intégration :

$$P(t,T) = P(0,T)\exp\left\{\int_0^T r(u)\mathrm{d}u - \int_0^t \sigma(u,T)\mathrm{d}\widehat{z}(u) - \frac{1}{2}\int_0^t \sigma^2(u,T)\mathrm{d}u\right\} \quad (1)'$$

Compte tenu du fait que $P(t,t) = 1$ et en écrivant $P(t,t) = P(0,t)\exp\{\cdots\}$, il vient :

$$P(t,T) = \frac{P(0,T)}{P(0,t)}\exp\left\{\int_0^t -\big(\sigma(u,T) - \sigma(u,t)\big)\,\mathrm{d}\widehat{z}(u)\right.$$
$$\left. - \frac{1}{2}\int_0^t \big(\sigma^2(u,T) - \sigma^2(u,t)\big)\mathrm{d}u\right\} \quad (2)$$

En faisant intervenir un instant v non nécessairement calé sur l'origine, on obtient également :

$$P(t,T) = \frac{P(v,T)}{P(v,t)}\exp\left\{-\int_v^t (\sigma(u,T) - \sigma(u,t)\mathrm{d}\widehat{z}(u)\right.$$
$$\left. - \frac{1}{2}\int_v^t \big(\sigma^2(u,T) - \sigma^2(u,t)\big)\mathrm{d}u\right\}$$

Il apparaît donc qu'avec un tel modèle deux types d'information seulement sont nécessaires et suffisants pour étudier la structure par échéance des taux d'intérêt : la connaissance exogéne de la courbe des taux à l'instant initial (ou à l'instant courant d'évaluation) et la structure de volatilité. Le rendement à l'échéance s'écrit, après avoir posé $\tau = T - t$:

$$Y(t,T) = \phi(0;t,T) + \frac{1}{\tau}\int_0^t \big(\sigma(u,T) - \sigma(u,t)\big)\, \mathrm{d}\widehat{z}(u) + \frac{1}{2\tau}\int_0^t \big(\sigma^2(u,T) - \sigma^2(u,t)\big)\mathrm{d}u \qquad (3)$$

1.3 L'univers forward-neutre

La probabilité risque-neutre est liée à un changement de numéraire : c'est la probabilité qui rend martingale le cours (avec son éventuel revenu cumulé) exprimé en unité de compte d'un actif qui capitalise un franc au taux r. La probabilité forward-neutre, quant à elle, est liée à un autre changement de numéraire. Précisément, les actifs sont exprimés non plus en francs mais en unités d'obligation coupon-zéro d'échéance donnée. Il y a donc potentiellement autant de probabilités forward-neutres que d'échéances fixées. Considérons le rapport :

$$F(t;w,T) \triangleq \frac{P(t,T)}{P(t,w)} \qquad 0 \le t \le w \le T$$

Remarquons d'abord que s'il existait un marché à terme ayant pour support une obligation zéro-coupon d'échéance $T, F(t;w,T)$ serait très exactement le prix à terme d'équilibre associé à un contrat conduisant à la livraison en w d'un zéro-coupon d'échéance T. Observons ensuite que ce prix à terme est lié au taux à terme par la relation : $\phi(t;w,T) = -\dfrac{1}{T-w}\ \ln F(t;w,T)$. Compte tenu de l'équation (2), il vient après calculs :

$$F(t;w,T) = \frac{P(0,T)}{P(0,w)} \exp\Big\{ -\int_0^t \Big[\sigma(s,T) - \sigma(s,w)\Big] \Big[\mathrm{d}\widehat{z}(s) + \sigma(s,w)\mathrm{d}s\Big] - \frac{1}{2}\int_0^t \Big[\sigma(s,T) - \sigma(s,w)\Big]^2 \mathrm{d}s\Big\}$$

Cette formulation appelle une utilisation directe du théorème de GIRSANOV qui conduit à définir un nouveau brownien $\widehat{z}_w$ qui vérifie la relation suivante : $\mathrm{d}\widehat{z}_w = \mathrm{d}\widehat{z} + \sigma(s,w)\mathrm{d}s$. La mesure de probabilité Q_w associée à ce nouveau brownien s'exprime au travers de sa densité par rapport à Q :

$$\frac{\mathrm{d}Q_w}{\mathrm{d}Q} = \exp\Big\{\int_0^t -\sigma(s,w)\mathrm{d}\widehat{z}(s) - \frac{1}{2}\int_0^t \sigma^2(s,w)\mathrm{d}s\Big\}.$$

Compte tenu de (1)' on peut écrire : $\dfrac{\mathrm{d}Q_w}{\mathrm{d}Q} = \dfrac{P(t,w)}{P(0,w)}\,\delta(0,t)$;

posons $\varsigma_t^w = \dfrac{P(t,w)}{P(0,w)}\,\delta(0,t)$;
ς_t^w est une Q-martingale positive d'espérance unité.

Le prix à terme s 'écrit alors :

$$F(t;w,T) = \frac{P(0,T)}{P(0,w)} \exp\left\{ - \int_0^t \left[\sigma(s,T) - \sigma(s,w)\right] d\widehat{z}_w(s) - \frac{1}{2}\int_0^t \left[\sigma(s,T) - \sigma(s,w)\right]^2 ds \right\}$$

On en déduit que $F(t;w,T)$ est une Q_w martingale. La dynamique de F peut être obtenue en utilisant le lemme d'Itô, il vient :
$\dfrac{dF}{F} = -\left[\sigma(s,T) - \sigma(s,w)\right] d\widehat{z}_w(s)$. La probabilité forward-neutre Q_w sur F_t est définie par sa densité : $\dfrac{dQ_w}{dQ} = \varsigma_t^w$.

Sur F_w cette densité s'écrit : $\dfrac{dQ_w}{dQ} = \dfrac{\delta(0,w)}{P(0,w)}$.

Etant donné un processus de prix $X(t)$, son prix à terme $\dfrac{X(t)}{P(t,w)}$ est F_t mesurable, et compte tenu des propriétés de ς_t^w, le théorème de changement de probabilité dans les espérances conditionnelles prend la forme suivante :

$$E_{Q_w}\left[\frac{X(t)}{P(t,w)} / F_s\right] = \frac{E_Q\left[\dfrac{X(t)}{P(t,w)}\varsigma_t^w / F_s\right]}{E_Q\left[\varsigma_t^w / F_s\right]} \qquad s \le t$$

or
$$\frac{E_Q\left[\dfrac{X(t)}{P(t,w)}\varsigma_t^w / F_s\right]}{E_Q\left[\varsigma_t^w / F_s\right]} = \frac{E\left[X(t)\delta(t)/F_s\right]}{P(s,w)\delta(s)} = \frac{X(s)}{P(s,w)}$$
donc
$$E_{Q_w}\left[\frac{X(t)}{P(t,w)} / F_s\right] = \frac{X(s)}{P(s,w)}$$

On obtient alors un résultat majeur. A l'équilibre les prix à terme sont des Q_w martingales, résultat que l'on peut décliner sous les formes suivantes :

$$X(s) = P(s,w) E_{Q_w}\left[\frac{X(t)}{P(t,w)} / F_s\right]$$

$$X(s) = E_Q\left[\delta(s,w)/F_s\right] E_{Q_w}\left[\frac{X(t)}{P(t,w)} / F_s\right]$$

Nous utiliserons fréquemment cette expression :

$$X(s) = E_Q\left[\delta(s,w)/F_s\right]E_{Q_w}\left[X(w)/F_s\right] = P(s,w)E_{Q_w}\left[X(w)/F_s\right]$$

Dans l'univers t-forward-neutre, la valeur d'un coupon-zéro se réécrit :

$$P(t,T) = \frac{P(0,T)}{P(0,t)}\exp\left\{\int_0^t -\big(\sigma(u,T)-\sigma(u,t)\big)\mathrm{d}\widehat{z}_t(u) - \frac{1}{2}\int_0^t \left[\sigma(u,T)-\sigma(u,t)\right]^2\mathrm{d}u\right\}$$

d'où :

$$Y(t,T) = \phi(0;t,T) + \frac{1}{T-t}\int_0^t \left[\sigma(u,T)-\sigma(u,t)\right]\mathrm{d}\widehat{z}_t(u) + \frac{1}{2(T-t)}\int_0^t \left[\sigma(u,T)-\sigma(u,t)\right]^2\mathrm{d}u \qquad (4)$$

Compte tenu du choix d'une structure de volatilité déterministe, on obtient :

$$E_{Q_t}\left[Y(t,T)\right] = \phi(0;t,T) + \frac{1}{2(T-t)}\int_0^t \left[\sigma(u,T)-\sigma(u,t)\right]^2\mathrm{d}u \qquad (5)$$

$$\mathrm{Var}_{Q_t}\left[Y(t,T)\right] = \frac{1}{(T-t)^2}\int_0^t \left[\sigma(u,T)-\sigma(u,t)\right]^2\mathrm{d}u = \mathrm{Var}_Q\left[Y(t,T)\right] = \mathrm{Var}_\Pi\left[Y(t,T)\right]\cdot \qquad (6)$$

Les variances sont identiques dans les univers, historique, risque-neutre et forward-neutre.

Dans le cas de l'évaluation de produits sur taux flottants, il est fréquent de prendre en considération le décalage entre la date de paiement des coupons et la date de révision du taux. Appelons h ce décalage. On a, par exemple, en t le paiement de la somme : $Y(t-h, t-h+\theta)$ où θ désigne le terme (la maturité) du taux de référence. Il est donc naturel d'introduire le Brownien $\widehat{z}_{t-h}$ défini par $\mathrm{d}\widehat{z}_{t-h} = \mathrm{d}\widehat{z} + \sigma(u,t-h)\mathrm{d}u$. Un simple calcul conduit à la formulation suivante :

$$\begin{aligned}Y(t-h,t-h+\theta) = {} & \phi(0;t-h,t-h+\theta) \\ & + \frac{1}{\theta}\int_0^{t-h}\left[\sigma(u,t-h+\theta)-\sigma(u,t-h)\right]\mathrm{d}\widehat{z}_t(u) \\ & - \frac{1}{\theta}\int_0^{t-h}\left[\sigma(u,t-h+\theta)-\sigma(u,t-h)\right]\left[\sigma(u,t)-\sigma(u,t-h)\right]\mathrm{d}u \qquad (4)' \\ & + \frac{1}{2\theta}\int_0^{t-h}\left[\sigma(u,t-h+\theta)-\sigma(u,t-h)\right]^2\mathrm{d}u\end{aligned}$$

L'intérêt de cette formule est d'exprimer le rendement à l'échéance $Y(t-h, t-h+\theta)$ à l'aide du brownien $\widehat{z}$. Ceci permet d'évaluer facilement et rapidement certains produits financiers à paiement différé. Avec une structure déterministe, il vient alors :

$$
\begin{aligned}
E_{Q_t}\left[Y(t-h,t-h+\theta)\right] &= \phi(0;t-h,t-h+\theta) \\
&+ \frac{\theta}{2}\operatorname{Var}\left[Y(t-h,t-h+\theta\right] \\
&- h\operatorname{Cov}\left[Y(t-h,t-h+\theta),Y(t-h,t)\right]
\end{aligned}
\tag{5'}
$$

$$
\begin{aligned}
\operatorname{var}_{Q_t}\left[Y(t-h,t-h+\theta)\right] &= \operatorname{var}_Q\left[Y(t-h,t-h+\theta)\right] = \\
&\operatorname{var}_\Pi\left[Y(t-h,t-h+\theta)\right]
\end{aligned}
\tag{6'}
$$

Ce résultat est utilisé lors de l'évaluation de très nombreux produits dérivés de taux d'intérêt, [El Karoui et Geman (1991)]. C'est l'un des résultats fondamentaux sur lequel nous nous appuierons pour valoriser différents actifs contingents. Par ailleurs, les intégrales suivantes interviennent très fréquemment comme calculs intermédiaires dans l'évaluation des produits financiers que nous considérons ici :

$$
I^2(t,T,T') = \int_t^T \left[\sigma(u,T') - \sigma(u,T)\right]^2 \mathrm{d}u
$$

$$
J(t,T,T') = \int_t^T \left[\sigma(u,T+\theta) - \sigma(u,T)\right]\left[\sigma(u,T') - \sigma(u,T)\right]\mathrm{d}u
$$

$$
K(t,T,T',T^*) = \int_t^T \left[\sigma(u,T^*) - \sigma(u,T')\right]\left[\sigma(u,T) - \sigma(u,T')\right]\mathrm{d}u
$$

Dans le cas d'une structure de volatilité linéaire, on parvient aux résultats suivants :

$$
I^2(t,T,T') = \sigma^2(T'-T)^2(T-t)
$$

$$
J(t,T,T') = \sigma^2\theta[T'-T][T-t]
$$

$$
K(t,T,T',T^*) = \sigma^2[T^*-T'][T-T'][T-t]
$$

Dans le cas d'une structure de volatilité exponentielle par contre, on obtient les expressions qui suivent :

$$
I^2(t,T,T') = \frac{\sigma^2}{2}\left[\frac{1-\exp\left\{-2a(T-t)\right\}}{a}\right]\left[\frac{1-\exp\left\{-a(T'-T)\right\}}{a}\right]^2
$$

$$
J(t,T,T') = \sigma^2\left[\frac{1-\exp\{-2a(T-t)\}}{2a}\right]\left[\frac{1-\exp\{-a(T'-T)\}}{a}\right]\left[\frac{1-\exp\{-a(\theta)\}}{a}\right]
$$

$$K(t,T,T'T^*) = \left(\frac{\sigma}{a}\right)^2 \left[\exp\{-aT'\} - \exp\{-aT^*\}\right]$$
$$\left[\exp\{-aT'\} - \exp - aT\}\right]\left[\frac{\exp\{2aT\} - \exp\{2at\}}{2a}\right]$$

On peut également définir le taux à terme comme étant égal au rendement à l'échéance d'un coupon-zéro forward noté provisoirement $Y^f(t,T^*,T)$ avec $t \leq T \leq T^*$. Il vient alors :

$$\exp\left\{-(T^* - T)\,Y^f(t,T^*;T)\right\} = P^f(t,T^*;T)$$
$$\text{ou } \exp\{-(T^* - T)Y^f(t,T^*;T)\} = \frac{P(t,T^*)}{P(t,T)}.$$

Soit $Y^f(t,T^*;T) = \dfrac{(T^* - t)Y(t,T^*) - (T - t)Y(t,T)}{T^* - T} = \phi(t;T,T^*)\cdot$

Avec le modèle de taux retenu, on obtient :

$$\phi(t;T_1,T_2) = \phi(0;T_1,T_2)$$

$$+\frac{1}{2(T_2 - T_1)}\int_0^t \left[\sigma(u,T_2) + \sigma(u,T_1) - 2\sigma(u,t)\right]\left[\sigma(u,T_2) - \sigma(u,T_1)\right]\mathrm{d}u$$

$$+\frac{1}{T_2 - T_1}\int_0^t \left[\sigma(u,T_2) + \sigma(u,T_1)\right]\mathrm{d}\widehat{z}_t(u)$$

Dans certains cas spécifiques, il est assez fréquent d'utiliser l'univers Q_{T1} forward-neutre, il vient donc :

$$\phi(t;T_1,T_2) = \phi(0;T_1,T_2) + \frac{1}{2(T_2 - T_1)}\int_0^t \left[\sigma(u,T_2) - \sigma(u,T_1)\right]^2 \mathrm{d}u$$
$$+\frac{1}{T_2 - T_1}\int_0^t \left[\sigma(u,T_2) - \sigma(u,T_1)\right]\mathrm{d}\widehat{z}_{T_1}(u)$$

d'où l'on peut déduire que :

$$E_{Q_{T_1}}\phi(t;T_1,T_2) = \phi(0;T_1,T_2) + \frac{1}{2(T_2 - T_1)}\int_0^t \left[\sigma(u,T_2) - \sigma(u,T_1)\right]^2 \mathrm{d}u$$

$$\mathrm{var}\phi(t;T_1,T_2) = \frac{1}{(T_2 - T_1)^2}\int_0^t \left[\sigma(u,T_2) - \sigma(u,T_1)\right]^2 \mathrm{d}u$$

$$E_{Q_{T_1}}\phi(t;T_1,T_2) = \phi(0;T_1,T_2) + \frac{(T_2 - T_1)}{2}\,\mathrm{var}\phi(t;T_1,T_2)$$

2. Evaluation d'options digitales et de titres à couloir

Munis de ces outils d'analyse très puissants, mais ayant nécessité qu'un certain nombre d'hypothèses soient supposées vérifiées, nous pouvons alors en venir aux applications, et étudier la valorisation des options digitales, des options à paiement contingent, et des titres corridors ou obligations couloirs.

2.1 Les options digitales

Ces options ont pour support un taux variable proportionnel de maturité θ. Elles sont de type européen, et leur flux terminal à l'échéance est égal à une unité monétaire si le taux de référence est supérieur à une borne fixée *a priori*, et à zéro, sinon. Nous analysons successivement le cas où le paiement se fait à l'échéance T de l'option, et le cas où le paiement est différé à la date T_1. Nous notons t l'instant courant que nous considérons comme date d'évaluation $(t \leq T \leq T_1)$ et $CD(t,T,\theta,k)$ la valeur de cette option en t. Les lettres CD indiquent que l'on appelle en fait «call digital» une telle option. Rappelons que l'on a par définition du taux proportionnel ρ :

$$1+\theta\rho(T,T+\theta)=\exp\{\theta Y(T,T+\theta\} \text{ ou}$$

$$\rho(T,T+\theta)=\frac{1}{\theta}\left[\exp\{\theta Y(T,T+\theta)\}-1\right] \tag{7}$$

donc :

$$\rho(T,T+\theta)>k \iff \theta Y(T,T+\theta)>\ln(1+k\theta)$$

A l'échéance T de l'option, on obtient $CD(T,T,\theta,k)=1_{\rho(T,T+\theta)>k}$. Puisque dans l'univers T-forward-neutre les prix T-forward sont des Q_T martingales, il vient :

$$CD(t,T,\theta,k)=P(t,T)E_{Q_T}\{1_{\rho(T,T+\theta)>k}/F_t\}$$

or $E_{Q_T}\{1_{\rho(T,T+\theta)>k}/F_t\}=Q_T\left[\rho(T,T+\theta)>k\right]$ ou :

$$Q_T\left[\theta Y(T,T+\theta)>\ln(1+\theta k)\right]=N\left[\frac{E_{Q_T}\left\{\theta Y(T,T+\theta)\right\}-\ln(1+\theta k)}{\sqrt{\text{var}\{\theta Y(T,T+\theta)\}}}\right]^{2}$$

$$E_{Q_T}\left\{\theta Y(T,T+\theta)\right\}=\theta\phi(t;T,T+\theta)+\frac{1}{2}\int_t^T\left[\sigma(u,T+\theta)-\sigma(u,T)\right]^2\text{d}u$$

$$\text{Var}\left\{\theta Y(T,T+\theta)\right\}=\int_t^T\left[\sigma(u,T+\theta)-\sigma(u,T)\right]^2\text{d}u$$

Nous avons déjà calculé ces valeurs dans les cas linéaire et exponentiel. Remarquons que l'on peut exprimer $\theta\phi(t;T,T+\theta)$ sous la forme :

2. $N(x)$ est la valeur en x de la fonction de répartition de la loi normale standard $N(0,1)$.

$$\theta\phi(t;T,T+\theta) = \ln \frac{P(t,T)}{P(t,T+\theta)}, \text{ donc :}$$

$$CD(t,T,\theta,k) = P(t,T)N\left[\frac{\ln\left[\frac{P(t,T)}{P(t,T+\theta)(1+\theta k)}\right] + \frac{1}{2}I^2(t,T,T+\theta)}{I(t,T,T+\theta)}\right] \quad (8)$$

Le tableau 1 présente le résultat de simulations concernant différentes options d'achat digitales de taux d'exercice différents. Comme on pouvait s'y attendre, le prix de l'option s'avère être une fonction décroissante du niveau de ce taux. En outre, il apparaît que dès que le facteur de réduction de la volatilité exponentielle est proche de zéro, les deux prix d'options calculés (avec volatilité linéaire ou exponentielle) sont pratiquement les mêmes. En fait, il n'est possible d'obtenir des différences significatives de prix que pour de fortes valeurs du paramètre «a».

Tableau 1

Valeur d'une option d'achat digitale sur taux d'intérêt

$\sigma = 4\%$

Taux d'exercice k	Volatilité linéaire	Volatilité exponentielle a=0,4	Volatilité exponentielle a=2
4 %	0,810847	0,834245	0,916764
5 %	0,657281	0,672990	0,743099
6 %	0,468496	0,465786	0,453060
7 %	0,285672	0,266440	0,184683
8 %	0,145967	0,122556	0,046580

r (Taux d'intérêt discontinu annuel)=6 %, $T = \theta$ =90jours.
$P(t,T) = 0,985538, \quad P(t,T+\theta) = 0,971286$

Dans le cas d'un paiement du flux terminal associé à l'option différé en T_1, on obtient :

$$C\widehat{D}(t,T,T_1,\theta,k) = E_Q[1_{\rho(T,T+\theta)>k}\delta(t,T_1)/F_t]$$

$$C\widehat{D}(t,T,T_1,\theta,k) = P(t,T_1)E_{QT1}[1_{\rho(T,T+\theta)>k}/F_t]$$

d'où :

$$C\widehat{D}(t,T,T_1,\theta,k) =$$

$$P(t,T_1)N\left[\frac{\ln\left[\frac{P(t,T)}{P(t,T+\theta)(1+\theta k)}\right] - J(t,T,T_1) + \frac{1}{2}I^2(t,T,T+\theta)}{I(t,T,T+\theta)}\right] \quad (9)$$

Notons que, si $T = T_1$, on retrouve la formule de valorisation d'une option digitale non retardée. En effet, en ce cas $J(t, T, T_1) = 0$. Remarquons également que le calcul peut être conduit uniquement en termes du cours de l'obligation zéro-coupon. En effet :

$$\rho(T, T+\theta) > k \iff P(T, T+\theta) < K \quad \left[\text{avec } K = \frac{1}{1+\theta k}\right]$$

Le calcul du prix de l'option d'achat à paiement non retardé s'écrit donc :

$$CD(t, T, \theta, k) = Q_T\left[P(T, T+\theta) < K\right]$$

Le calcul peut se poursuivre en utilisant l'expression du prix de l'obligation à coupon-zéro dans l'univers T-forward neutre, et bien entendu on retrouve la formule (8).

A l'aide d'options digitales, il est possible de construire des contrats de type européen dont le solde à l'échéance T soit égal à une unité monétaire (et autrement zéro) si le taux proportionnel de référence est compris entre deux bornes m et M fixées *a priori* ($m < M$). Il est clair que l'on peut exprimer ce solde sous la forme : $1_{\rho<M} - 1_{\rho<m}$ ou $1_{\rho>m} - 1_{\rho>M}$, c'est-à-dire comme la différence de deux options digitales. Nous considérons que le paiement du solde est effectué en T_1 ($T_1 \geq T$) et nous appelons double-digitales ces options dont nous notons dd la valeur. On obtient donc :

$$dd(t, T, T_1, \theta, m, M) = \widehat{CD}(t, T, T_1, \theta, m) - \widehat{CD}(t, T, T_1, \theta, M) \qquad (10)$$

Dans le tableau 2, nous donnons quelques exemples de prix d'options double-digitales calculés avec les mêmes données que précédemment. On peut observer que la valeur de ces contrats augmente à taux décroissant à mesure que le corridor s'élargit. Par ailleurs, l'augmentation de la volatilité des taux réduit dans tous les cas la valeur des options double-digitales.

Tableau 2

Prix d'options double-digitales avec paiement retardé

$\sigma = 4\%$

m-M	Volatilité linéaire	Volatilité exponentielle a=0,4	Volatilité exponentielle a=2
5,5 %-6,5 %	0,434652	0,456852	0,547943
5 %-7 %	0,742756	0,76799	0,854774
4,5 % -7,5 %	0,897454	0,912262	0,950651
4 %-8 %	0,952395	0,957696	0,967263

Tableau 2 (suite)

$\sigma = 6\%$

m-M	Volatilité linéaire	Volatilité exponentielle a=0,4	Volatilité exponentielle a=2
5,5 %-6,5 %	0,301057	0,317791	0,389507
5 %-7 %	0,558222	0,584185	0,686437
4,5 % -7,5 %	0,745844	0,771350	0,858926
4 %-8 %	0,862731	0,881533	0,935222

T = 15jours, $\theta = 90$ jours, T_1 =195 jours, $P(t,T) = 0,997575$, $P(t,T+\theta) = 0,983149, P(t,T_1) = 0,968931$

Une extension de ces formules peut être maintenant proposée, avant d'en venir à l'évaluation des titres couloirs à proprement parler.

2.2 Les options à paiement contingent

Les options à paiement contingent constituent une extension immédiate du cas des options digitales. Leur solde à l'échéance T, est égal à $P(T,T_1)$ si le taux de référence est strictement supérieur à une borne k, sinon zéro. $P(T,T_1)$ représente la valeur d'une obligation sans coupon d'échéance T_1 qui est contingente au niveau des taux d'intérêt, d'où la dénomination du contrat. Nous notons $CP(t,T,T_1,\theta,k)$ leur prix en t :

$$CP(T,T,T_1,\theta,k) = P(T,T_1)1_{\rho(T,T+\theta)>k}$$

ou encore, compte tenu de la remarque précédente :

$$CP(T,T,T_1,\theta,k) = P(T,T_1)1_{P(T,T+\theta)<K}$$

Leur valeur en t est donc du type suivant :

$$\begin{aligned} CP(t,T,T_1,\theta,k) &= E_Q\left[P(T,T_1)1_{P(T,T+\theta)<K}\delta(t,T)/F_t\right] \\ &= P(t,T)E_{Q_T}\left[P(T,T_1)1_{P(T,T+\theta)<K}/F_t\right] \end{aligned}$$

ce qui s'écrit après calculs :

$$CP(t,T,T_1,\theta,k) = P(t,T_1)N\left[\frac{\ln\left[\dfrac{KP(t,T)}{P(t,T+\theta)}\right]+\frac{1}{2}I^2(t,T,T+\theta)}{I(t,T,T+\theta)} - I(t,T,T_1)\right] \quad (11)$$

Le tableau 3 présente quelques résultats de simulation concernant ces contrats. La valeur des options à paiement contingent est bien sûr différente de celles des options digitales, mais la décroissance de prix constatée en fonction du prix d'exercice est de même nature.

Tableau 3

Valeur d'options à paiement contingent

$\sigma = 4\%$

Taux d'exercice k	Volatilité linéaire	Volatilité exponentielle a=0,4	Volatilité exponentielle a=2
4 %	0,985654	0,989260	0,996167
5 %	0,850527	0,864529	0,915427
6 %	0,435183	0,431638	0,415756
7 %	0,085813	0,073835	0,035384
8 %	0,005104	0,003252	0,000339

r (Taux d'intérêt discontinu annuel)=6 %
$T = \theta$ =15jours, $\theta = 90$ jours, $T_1 = 195$ jours.
$P(t,T) = 0,997575,\ P(t,T+\theta) = 0,983149, P(t,T_1) = 0,968931$

Si $T_1 = T$, on retrouve la valeur d'une option digitale simple et donc le libellé de la formule (8) (en effet $I(t,T,T) = 0$). En outre, on obtient l'égalité suivante :

$$\frac{J(t,T,T_1)}{I(t,T,T+\theta)} = I(t,T,T_1)$$

il en résulte que $CP(t,T_1,\theta,k) = C\widehat{D}(t,T_1,\theta,k)$. Ce résultat n'est pas étonnant car le paiement retardé en T_1 de l'option d'achat digitale correspond très exactement à celui de l'option correspondante à rémunération contingente en T. On peut également considérer des options doubles. Notons dCP leur valeur. Elles ont un solde à l'échéance défini comme suit :

$$dCP(T,T,T_1,\theta,m,M) = P(T,T_1)1_{m \leq \rho(T,T+\theta) \leq M}$$

donc :

$$dCP(t,T,T_1,\theta,m,M) = CP(T,T_1,\theta,m) - CP(T,T_1,\theta,M) = dd(t,T,T_1,\theta,m,M) \tag{12}$$

Dans son article TURNBULL (1995) n'utilise pas l'univers forward-neutre, et a recours aux options à paiement contingent pour valoriser les titres couloirs. Notre approche va être différente. De plus, elle va se révèler plus simple et plus «intuitive». Par ailleurs, elle va autoriser le paramétrage de la structure de volatilité, et permettre d'obtenir des formules utilisables à la fois dans les cas linéaire et exponentiel.

2.3 Les titres couloirs

Une obligation couloir est un titre qui verse un coupon dont la valeur dépend à la fois d'un taux variable de référence et du nombre de jours où ce taux est resté à l'intérieur d'une bande ou couloir fixé à l'avance. De façon plus précise, nous considérons un titre d'échéance T_N dont le versement du coupon le plus récent s'est effectué en T_0, et dont les versements suivants se feront en $T_{j+1}(j = 0, \cdots, N-1)$. Ces paiements sont calculés sur la base d'un taux proportionnel de référence relevé en T_j et du nombre de jours, $H(T_j, T_{j+1})$ durant lesquels le taux est resté dans le couloir pendant la période $[T_j, T_{j+1}]$. Nous considérons que les versements aux dates T_{j+1} sont égaux à :

$$V_{T_{j+1}} = \left[\frac{\rho(T_j, T_j + \theta_j) + \Delta_j}{N_D}\right] H(T_j, T_{j+1}) \qquad j = 0, \cdots, N-1 \tag{13}$$

Δ_j représente un «spread» de taux rajouté au taux proportionnel ρ de façon à rendre le contrat attrayant. N_D désigne le nombre de jours dans l'année, et $T_j + i$ indique le $i^{\text{ème}}$ jour après la date T_j. Nous cherchons à évaluer ce titre en $t(T_0 \leq t < T_1)$, et nous distinguons la période $[T_0, T_1]$ des périodes suivantes $[T_j, T_{j+1}]$, $(j = 1, \cdots, N-1)$. En effet durant la première période de coupon, le taux de référence est connu en t, ce qui ne sera plus le cas pour les périodes ultérieures. Nous notons $m(T_0 + i)$ et $M(T_0 + i)$ le couple définissant l'intervalle filtre, et n_0 le nombre de jours existant entre t et T_1. On obtient donc à la fin de la première période comme valeur du coupon, l'expression qui suit[3] :

$$V(t, T_1; T_0, \theta_0) = E_Q\left[\frac{[\rho(T_0, T_0 + \theta_0) + \Delta_0]}{N_D}\right.$$
$$\left.\left[H(T_0, t) + \sum_{i=1}^{n_0} 1_{m(T_0+i) \leq \rho(T_0+i, T_0+i+\theta_0) \leq M(T_0+i)}\right] \delta(t, T_1)\right]$$

La valeur d'équilibre en t est donc :

$$V(t, T_1; T_0, \theta_0) = P(t, T_1) E_{Q_{T+1}}\left[\frac{[\rho(T_0, T_0 + \theta_0) + \Delta_0]}{N_D}\right.$$
$$\left.\left[H(T_0, t) + \sum_{i=1}^{n_0} 1_{m(T_0+i) \leq \rho(T_0+i, T_0+i+\theta_0) \leq M(T_0+i)}\right]\right]$$

On peut noter que le terme générique dans la somme correspond exactement au solde à l'échéance d'options double-digitales avec paiement différé en T_1. Les

3. L.Assoun, C.Chaussade et D.Khougazian (1994) ont évalué, dans le cas d'une structure de volatilité linéaire, des titres de ce type.

autres éléments intervenant dans l'espérance sont déterministes, il en résulte que :

$$V(t, T_1; T_0, T_0 + \theta_0) = \frac{[\rho(T_0, T_0 + \theta_0) + \Delta_0]}{N_D}$$

$$\left[H(T_0, t)P(t, T_1) + \sum_{i=1}^{n_0} dd(t, T_0 + i, \theta_0, m(T_0 + i), M(T_0 + i)\right] \quad (14)$$

L'évaluation pour les périodes suivantes est plus difficile du fait de l'ignorance dans laquelle on se trouve en t de ce que seront les taux futurs en général, et les taux de référence en particulier. Le paiement versé en T_{j+1} par ce titre est égal à :

$$V(T_{j+1}, T_{j+1}; T_j, T_j + \theta_j) = \frac{\left[\rho(T_j, T_j + \theta_j) + \Delta_j\right]}{N_D} H(T_j, T_{j+1})$$

Posons : $T_j' = T_j + \theta_j; T_{ji} = T_j + i; T_{ji}' = T_{ji} + \theta_j; n_j$ désignant le nombre de jours existant entre T_j et T_{j+1}, on obtient alors :

$$H(T_j, T_{j+1}) = \sum_{i=1}^{n_j} 1_{m(Tji) \leq \rho(Tji, Tji') \leq M(Tji)}$$

La valeur d'équilibre en t, correspondant à ce flux que nous appellerons couloir élémentaire sur $[T_j, T_{j+1}]$, est égale à :

$$V(t, T_{j+1}; T_j, T_j + \theta_j) = E_Q\left[\frac{[\rho(T_j, T_j + \theta_j) + \Delta_j]}{N_D} H(T_j, T_{j+1})\delta(t, T_{j+1}) / F_t\right]$$

$$V(t, T_{j+1}; T_j, T_j + \theta_j) = \frac{P(t, T_{j+1})}{N_D} E^t_{Q_{T_{j+1}}}\left[[\rho(T_j, T_j + \theta_j) + \Delta_j]H(T_j, T_{j+1})\right] \quad (15)$$

Un calcul plus complexe est nécessaire pour l'estimation de l'espérance qui suit :

$$E^t_{Q_{T_{j+1}}}\left[\rho(T_j, T_j + \theta_j)H(T_j, T_{j+1})\right]$$

Il conduit à évaluer d'abord des expressions du type :

$$E^t_{Q_{T_{j+1}}}\left[\rho(T_j, T_j + \theta_j)1_{\rho(T_{ji}, T_{ji}') > m(T_{ji})}\right]$$

qui s'écrivent après développement :

$$\frac{1}{\theta_j}\left\{E^t_{Q_{T_{j+1}}}\left[\exp\{\theta_j Y(T_j, T_j')1_{\exp\{\theta_j Y(T_{ji}, T_{ji}')\} > 1 + \theta_j m(T_{ji})}\right] - \right.$$

$$\left. E^t_{Q_{T_{j+1}}}\left[1_{\exp\{\theta_j Y(T_{ji}, T_{ji}')\} > 1 + \theta_j m(T_{ji})}\right]\right.$$

La première espérance peut alors se noter après calculs :

$$E^t_{Q_{T_{j+1}}}\left[\exp\theta_j Y(T_j,T_j')1_{\exp\{\theta_j Y(T_{ji},T_{ji}')\}>1+\theta_j m(T_{ji})}\right] =$$

$$\frac{P(t,T_j)}{P(t,T_j')}\exp\left\{K(t,T_j,T_j',T_{j+1})+\frac{1}{2}I^2(t,T_j,T_j')\right\}N\left[x(t,T_j;i,\theta_j,m(T_{ji})\right]$$

avec :

$$x\big(t,T_j;i,\theta_j,m(T_{ji})\big) = I(t,T_j,T_j')$$

$$+\frac{\ln\left\{\dfrac{P(t,T_{ji})}{P(t,T_{ji}')(1+\theta_j m(T_{ji}))}\right\}+\frac{1}{2}I^2(t,T_{ji},T_{ji}')-J(t,T_{ji},T_{j+1})}{I(t,T_{ji},T_{ji}')}$$

La seconde espérance devient égale à :

$$E^t_{Q_{T_{j+1}}}\left[1_{\exp\{\theta_j Y(T_{ji},T_{ji}')\}>1+\theta_j m(T_{ji})}\right]=Q_{T_{j+1}}\left[\theta_j Y(T_{ji},T_{ji}'>\ln(1+\theta_j m(T_{ji})\right].$$

Cette expression est d'un type que nous avons déjà rencontré. En fait, il semble opportun de la regrouper avec les termes en Δ pour faire apparaître une option double-digitale dans la formule générale. En effet l'espérance dans (15) est de la forme :

$$\frac{1}{\theta_j}\left\{E^t_{Q_{T_{j+1}}}[A_i^j-B_i^j]+[\theta_j\Delta_j-1]E^t_{Q_{T_{j+1}}}\right.$$

$$\left.\{1_{\exp\{\theta_j Y(T_{ji},T_{ji}')\}>1+\theta_j m(T_{ji})}-1_{\exp\{\theta_j Y(T_{ji},T_{ji}')\}>1+\theta_j M(T_{ji})}\}\right\}$$

Dans la seconde espérance figure le solde à l'échéance d'une option double digitale exerçable en T_{ji}. En utilisant les résultats précédents, on peut écrire la valeur d'équilibre du couloir élémentaire sous la forme :

$$V(t,T_{j+1};T_j,T_j+\theta_j) =$$

$$\frac{P(t,T_{j+1})}{N_D\theta_j}\,\frac{P(t,T_j)}{P(t,T_j')}\,e^{K(t,T_j,T_j',T_{j+1})}$$

$$\sum_{i=1}^{n_j}\left\{N\left[x(t,T_j;i,\theta_j,m(T_{ji})\right]-N\left[x(t,T_j;i,\theta_j,M(T_{ji})\right]\right\}+ \tag{16}$$

$$\frac{1}{N_D}\,[\Delta_j-\frac{1}{\theta_j}\sum_{i=1}^{n_j}dd(t,T_{ji},T_{j+1},\theta_j,m_{ji},M_{ji})$$

La valeur d'équilibre en t des coupons du titre couloir s'écrit donc :

$$\mathrm{Co}(t, T_0, T_n) = V(t, T_1; T_0, T_0 + \theta_0) + \sum_{j=1}^{N-1} V(t, T_{j+1}; T_j, T_j + \theta_j) \qquad (17)$$

Pour mettre en relief le caractère opérationnel des équations (14) et (16), nous considérons d'abord le premier coupon, et ensuite l'ensemble des coupons d'un titre «couloir» de 18 mois de durée de vie, chaque période de coupon comprenant 180 jours. Par simplicité, il est supposé que la structure des taux d'intérêt est plate et que le taux d'intérêt requis par le marché composé de façon continue est égal à 0,05827 sur une base annuelle. La valeur faciale de l'obligation est supposée être d'un franc. De plus, la prime Δ est par hypothèse considérée comme constante et égale à 150 points de base.

Tableau 4

Valeur du premier coupon du titre «couloir»

$\sigma = 4\%$

m-M	Volatilité linéaire	Volatilité exponentielle a=0,4	Volatilité exponentielle a=2
5,5 %-6,5 %	0,0105	0,011882	0,018495
5 %-7 %	0,018957	0,021195	0,030753
4,5 % -7,5 %	0,025546	0,028177	0,037712
4 %-8 %	0,030584	0,033249	0,041119

$\sigma = 6\%$

m-M	Volatilité linéaire	Volatilité exponentielle a=0,4	Volatilité exponentielle a=2
5,5 %-6,5 %	0,007228	0,008212	0,013054
5 %-7 %	0,013565	0,015293	0,023317
4,5 % -7,5 %	0,018973	0,021215	0,030798
4 %-8 %	0,023551	0,0261	0,035911

Valeur d'une obligation à taux flottant (180 jours) = 0,028714, $\Delta = 1,5\%$, r (Taux discontinu annuel) = 6 %, $T_1 = \theta = 180$ jours, $t = T_0$.

Dans le tableau 4, nous prenons en compte différentes bornes hautes (M) et basses (m) pour déterminer la valeur du premier coupon. Comme on peut le constater, sauf pour des écarts ($m - M$) importants, la valeur du coupon se trouve toujours être inférieure à celle du coupon d'une obligation à taux flottant classique (0,02871), et ceci malgré la marge de 150 points de base incluse dans le contrat. Par ailleurs, quand la volatilité des taux d'intérêt s'accroît de 4 % à 6 %, la valeur du coupon du titre couloir diminue.

Tableau 5

Valeur de tous les coupons du titre «couloir»

m-M	Premier coupon	Deuxième coupon	Troisième coupon
VOLATILITÉ LINÉAIRE			
5,5 %-6,5 %	0,0105	0,004774	0,003559
5 %-7 %	0,018957	0,009447	0,007074
4,5 % -7,5 %	0,025546	0,013926	0,010503
4 %-8 %	0,030584	0,01813	0,013807
VOLATILITÉ EXPONENTIELLE a=2			
5,5 %-6,5 %	0,018495	0,01302	0,012337
5 %-7 %	0,030753	0,024148	0,022967
4,5 % -7,5 %	0,037712	0,032281	0,030858
4 %-8 %	0,041119	0,037363	0,035907
Coupon à taux flottant	0,028714	0,02789	0,027089

$\sigma = 4\%, \Delta = 1,5\%$

r (Taux discontinu annuel) $= 6$ %, $T_1 = \theta = 180$ jours, $t = T_0$.

Le tableau 5 considére l'ensemble des coupons de l'obligation corridor, c'est à dire les trois coupons de six mois chacun. Leur valeur présente décroît au fur et à mesure qu'ils sont plus éloignés dans le temps. Cependant la diminution de valeur constatée est beaucoup plus nette dans le cas du modéle à volatilité linéaire. Par ailleurs, la marge de 150 points de base permet au modèle à volatilité exponentielle de dominer la valeur du coupon de l'obligation classique à taux flottant, dès que l'écart $(m - M)$ dépasse 3 %.

Conclusion

Nous avons obtenu, à l'aide du modèle linéaire gaussien à un aléa, des formules explicites de valorisation pour les options digitales, double-digitales, à paiement contingent, avec paiement retardé, et évalué une obligation couloir. Dans ce dernier cas, la formule d'évaluation s'avère être plus compliquée que celle relative aux options digitales, mais elle reste tout à fait exploitable. A ce propos, nous avons présenté des simulations pour étudier son comportement en utilisant des structures de volatilité aussi bien linéaire qu'exponentielle.

En fait, il n'est pas surprenant que l'on obtienne des solutions explicites, car les structures de volatilités déterministes employées conduisent immanquablement à considérer des taux gaussiens. Nous avons, par ailleurs, remarqué tout l'intérêt d'un recours systématique à l'univers forward-neutre, et noté la très grande efficacité des formules permettant une analyse détaillée des instruments à paiement retardé. Quelques prolongements de cette étude pourraient s'envisager à la fois sur le plan empirique en confrontant les formules d'évaluation obtenues avec les données de marché, mais aussi sur le plan théorique en utilisant des taux dont la distribution de probabilités ne serait pas gaussienne. Enfin, il pourrait être intéressant d'étudier les problèmes liés à la couverture de ces titres couloirs, ou d'analyser certaines de leurs extensions (définition du couloir dépendant de plusieurs taux par exemple).

Références bibliographiques

ASSOUN L., CHAUSSADE C. ET KHOUGAZIAN D. (1994) "Obligations structurées : une option sur l'exotisme", *Quants,*juin 1994.

AUGROS J.-C. (1989) *Les options sur taux d'intérêt*, Paris, Economica.

BRACE A. ET MUSIELA M. (1994) "A Multifactor Gauss-Markov implementation of Heath, Jarrow and Morton", *Mathematical Finance,* 2-1994.

BRIYS E., CROUHY M. ET SCHÖBEL R. (1991) "The Pricing of Default-free Interest Rate Cap, Floor and Collar Agreements", *The Journal of Finance.*

DANA R.A. et JEANBLANC-PICQUE M. (1994) *Marchés Financiers en Temps Continu, Valorisation et Equilibre*, Paris, Economica.

EL KAROUI N. et GEMAN H. (1991) "A Stochastic Approach to the Pricing of FRNs", *RISK.* march 1991.

EL KAROUI N. et GEMAN H. (1991) "The Valuation of General Floating-Rate Notes and Swaps : A Probabilistic Approach", *Working paper, Université Paris VI et ESSEC.*

EL KAROUI N. et ROCHET J.C. (1989) "A Pricing Formula for Options on Coupon-Bonds", *Papier de recherche, Université de Paris VI.*

GEMAN H. et YOR M. (1993) "Bessel Processes, Asian Options, and Perpetuities", *Mathematical Finance.*

HULL J. (1993) *Options, Futures, and other Derivatives Securities*, second edition, Prentice-Hall.

HULL J. et WHITE A. (1993) "One-Factor Interest Rate Models and the Valuation of Interest Rate Derivative Securities", *Journal of Financial and Quantitative Analysis,* 28, 1993.

JAMSHIDIAN F. (1989) "An Exact Bond Option Formula", *The Journal of Finance.*

NAVATTE P. (1992) *Eléments de gestion obligataire*, Paris, Sirey.

QUITTARD-PINON F. (1994) "Evaluation de produits dérivés de taux d'intérêt à l'aide du modèle linéaire gaussien à un aléa", *Séminaire d'Etudes et de Statistiques Appliquées à la Modélisation en Economie,* septembre 1994.

QUITTARD-PINON F. (1995) "Formules fermées pour caps, floors, et options asiatiques sur taux d'intérêt", *Journal de la Société de Statistique de Paris,* décembre 1995.

TURNBULL S. (1995) "Interest Rate Digital Options and Range Notes", *The Journal of Derivatives,* Fall, 1995.