

ADEL BOUGHRARA

## **Identification et estimation des paramètres d'une équation d'Euler en présence de variables intégrées et cointégrées**

*Journal de la société statistique de Paris*, tome 136, n° 3 (1995), p. 37-57

[http://www.numdam.org/item?id=JSFS\\_1995\\_\\_136\\_3\\_37\\_0](http://www.numdam.org/item?id=JSFS_1995__136_3_37_0)

© Société de statistique de Paris, 1995, tous droits réservés.

L'accès aux archives de la revue « Journal de la société statistique de Paris » (<http://publications-sfds.math.cnrs.fr/index.php/J-SFdS>) implique l'accord avec les conditions générales d'utilisation (<http://www.numdam.org/conditions>). Toute utilisation commerciale ou impression systématique est constitutive d'une infraction pénale. Toute copie ou impression de ce fichier doit contenir la présente mention de copyright.

NUMDAM

Article numérisé dans le cadre du programme  
Numérisation de documents anciens mathématiques

<http://www.numdam.org/>

# IDENTIFICATION ET ESTIMATION DES PARAMÈTRES D'UNE EQUATION D'EULER en présence de variables intégrées et cointégrées

Adel BOUGHRARA

Centre d'économétrie et G.R.E.Q.A.M / Université d'Aix-Marseille III

## Abstract

We have a tendency to believe that the recent developments in the theory on cointegration and unit root can help us to get accurate estimations of the structural parameters of the quadratic linear models. The aim of this paper is to show how these techniques can be combined with those of linear quadratic models under uncertainty; to gauge the contribution of cointegration in the estimation of the parameters of interest by showing that the procedure proposed by Dolado and al [1991] don't allow us to get precise estimation of the other parameters; to show that there is a puzzle often ignored which is identification; and finally, to depict all these techniques on a demand money function.

**Key word:** *cointegration, unit root, instrumental variables, Euler equation, discount factor, linear quadratic model.*

## Résumé

On a tendance à croire que les récents développements dans la théorie de la cointégration de la racine unitaire permettent d'avoir des estimations fiables et précises des paramètres structurels des modèles quadratiques linéaires qui ont toujours posé de sérieuses difficultés. L'objectif de cet article est de généraliser ces travaux en montrant de quelle manière les techniques de cointégration et des modèles quadratiques linéaires dans l'incertain peuvent être combinées ; de jauger l'apport de la cointégration à l'estimation des paramètres d'intérêt en montrant que la procédure initiée par Dolado et al [1991] ne permet pas d'avoir des estimations complètement satisfaisantes de l'ensemble des paramètres ; de montrer qu'il y a un autre problème qui n'a pas été signalé à savoir celui de l'identification ; et finalement d'appliquer ces techniques sur une fonction de demande de monnaie.

**Mots clés :** *cointégration, racine unitaire, variables instrumentales, équation d'Euler, modèle quadratique linéaire.*

*Classification J.E.L : C51-C52*

## I Introduction

En économétrie appliquée, un des modèles les plus utilisés dans l'optimisation intemporelle est le modèle quadratique linéaire (dorénavant Q.L) d'anticipations rationnelles d'ajustement de coûts. Il présente l'avantage d'aboutir à des règles de décision linéaires. Dans ce cadre, les preneurs de décision utilisent l'information appropriée et couramment disponible pour optimiser la valeur présente réelle sur un horizon temporel. Durant chaque période les anticipations ainsi que les plans contingents sont révisés à la lumière des informations nouvelles. Les modèles Q.L ont été largement utilisés dans la littérature économétrique par bon nombre de chercheurs (cf. Sargent [1978], Kennan [1979]...).

Sur un plan pragmatique, ces travaux privilégient le caractère tendanciel déterministe des séries temporelles impliquées et par conséquent, l'opération de stationnarisation par régression sur une tendance polynomiale s'y trouve implicitement impliquée. Les années 1980 ont marqué un tournant pour l'économétrie appliquée suite à la contribution séminale de Nelson et Plosser [1982]. L'étude de la non-stationnarité constitue à ce titre un enjeu stratégique en raison de ces implications majeures en matière de prévision et de modélisation économétrique. Depuis, on distingue deux types de non-stationnarité, une de nature déterministe et une autre stochastique.

Dans la littérature consacrée aux modèles Q.L, peu d'explications ont été avancées quant aux manques de curiosité dans l'estimation du coefficient d'escompte. Deux travaux ont été recensés dans ce cadre : Dolado et alii [1991] et Illmakunnas [1989]. Les premiers ont trouvé par le biais des expériences de Monte Carlo des estimations du coefficient d'escompte plutôt plausible ; Illmakunnas, quant à lui, a obtenu dans le cadre des données relatives au marché du travail une estimation négative du coefficient d'escompte.

L'objectif de cet article est de généraliser ces travaux en montrant de quelle manière les techniques de cointégration et des moments généralisées peuvent être combinées ; de jauger l'apport de la cointégration à l'estimation des paramètres en montrant que la procédure initiée par Dolado et al [1991], quoiqu'en évitant des estimations négatives à l'instar de Illmakunnas [1989], ne permet pas d'avoir des estimations complètement satisfaisantes de l'ensemble des paramètres ; de montrer qu'il y a un autre problème qui n'a pas été signalé à savoir celui de l'identification ; et, finalement, d'appliquer ces techniques à une fonction de demande de monnaie.

L'article sera organisé de la manière suivante : la section 2 présente les principaux concepts de base des programmes d'optimisation inter-temporelle tout en montrant que la solution de ce type de modèles est un modèle d'ajustement partiel. A la section 3, nous faisons appel à une nouvelle méthode d'estimation en deux étapes. A la section 4, nous étudions le problème d'identification et son lien avec l'intégration et la cointégration des séries. La section 5, à travers l'exemple d'une fonction de demande de monnaie, présente les résultats empiriques des estimations proposées dans la section précédente. Finalement, la section 6 avance quelques explications supplémentaires par le biais des simulations par la méthode de Monte Carlo.

## II Modèle quadratique dans l'incertain

Généralement les modèles d'optimisation varient selon le choix des fonctions à optimiser ; cependant les plus populaires sont les modèles linéaires dynamiques d'ajustement des coûts. Dans ce genre de modèle, le preneur de décision résout le problème suivant dans le but d'atteindre la valeur désirée  $y_t^*$  :

$$(2.1) \quad \text{Min}_{y_{t+j}} E \left( \sum_{j=0}^{\infty} \beta^j \left[ \delta_1 (y_{t+j} - y_{t+j}^*)^2 + \delta_2 (y_{t+j} - y_{t+j-1})^2 \right] \middle| \Omega_t \right)$$

où  $\beta = (1 + \pi)^{-1}$  est un facteur d'escompte tel que  $0 < \beta < 1$  et  $\pi$  représente le taux de préférence pour le présent ;  $\delta_1 (y_t - y_t^*)$  mesure le coût de déséquilibre ;  $\delta_2 (y_t - y_{t-1})$  mesure le coût d'ajustement.

Dans ce qui va suivre, nous supposons que  $\delta (= \delta_1 / \delta_2) \neq 0$  et nous normalisons par rapport au terme représentant le coût d'ajustement, nous obtenons :

$$(2.2) \quad \text{Min}_{y_{t+j}} E \left( \sum_{j=0}^{\infty} \beta^j \left[ \delta (y_{t+j} - y_{t+j}^*)^2 + (y_{t+j} - y_{t+j-1})^2 \right] \middle| \Omega_t \right)$$

où  $E(\cdot)$  est prise par rapport à un ensemble d'information disponible à l'agent à l'instant  $t$  soit  $\Omega_t$ .

La variable cible est  $y_t^*$  ; elle est fonction d'un ensemble de variables dites "motrices" telles que :

$$(2.3) \quad y_t^* = X_t \theta + e_t$$

où  $X^t$  est la matrice ( $T \times k$ ) des variables motrices,  $\theta$  est un vecteur de paramètres ( $k \times 1$ ) et  $e_t$  est un vecteur ( $T \times 1$ ) de bruits blancs se trouvant dans  $\Omega_t$ . Ce terme reflète l'effet des variables omises sur  $y_t^*$ . Ce type de modèle a connu un succès dans la littérature économétrique relative au choix des facteurs de production (cf. Sargent [1978], Kennan [1979]) La résolution de ce problème donne comme condition de premier ordre l'équation connue sous le nom d'équation d'Euler :

$$(2.4) \quad \Delta y_t = \beta E(\Delta_{t+1} | \Omega_t) - \delta (y_t - y_t^*)$$

La résolution de cette condition d'optimalité peut se faire en invoquant le principe d'équivalence certaine (cf. Simon [1956]) et l'équation (2.4) peut être réécrite sous la forme suivante d'un modèle d'ajustement partiel :

$$(2.5) \quad y_t = \lambda_1 y_{t-1} + (1 - \lambda_1)(1 - \lambda_1 \beta) \sum_{s=0}^{\infty} \lambda_1^s \beta^s E(y_{t+s}^* | \Omega_t)$$

où  $\lambda_1$  est la racine stable de l'équation aux différences finies linéaires (2.4). Les équations (2.4) et (2.5) forment la base des techniques d'estimation des

modèles Q.L et des modèles des anticipations rationnelles (cf. Wickens [1982] et Pesaran [1987]).

L'estimation de ces modèles peut se faire selon deux manières. Une première manière consiste à faire appel à la méthode des erreurs sur les variables (dorénavant EV) où la variable non observable est remplacée par sa valeur plus un terme aléatoire de moyenne nulle :

$$(2.6) \quad \eta_{t+1} = y_{t+1} - E(\Delta y_{t+1} | \Omega_t)$$

Dès lors, (2.4) devient :

$$(2.7) \quad \Delta y_t = \beta \Delta y_{t+1} - \delta(y_t - X_t \theta) + v_t$$

avec 
$$v_t = -\beta \eta_{t+1} + \delta e_t$$

(2.7) est la forme estimable de l'équation d'Euler. McCallum [1976] a proposé les estimateurs des variables instrumentales (VI) pour les paramètres de l'équation (2.7) dont les instruments peuvent être choisis dans l'ensemble d'information de l'économètre  $\Lambda_t \subset \Omega_t$ . Cette méthode d'estimation a été appliquée notamment par Ilmakunnas [1989] et Wickens [1982]. La seconde manière de procéder consiste à exploiter l'information dont nous disposons sur le processus générateur des données (PGD) de  $X_t$  ; la somme des variables non observables futures infinies dans (2.5) peut être calculée et nous pouvons, par conséquent, déduire une équation qui soit estimable (cf. Hansen et Sargent [1982]). Dans cet article, nous supposons que  $X_t$  est générée par le PGD<sup>1</sup> suivant :

$$(2.8) \quad \rho(L)X_t = \varepsilon_t$$

où  $\rho(L)$  est un polynôme retard en  $L$  tel que  $\rho(L) = 1 - \sum_{i=1}^p \rho_i L^i$  et

$$L^s X_t = X_{t-s}$$

**Proposition 1**

Si  $X_t$  est générée par (2.8), alors

$$\sum_{s=0}^{\infty} (\lambda_1 \beta)^s E(x_{t+s} | \Omega_t) = \frac{[\rho(\lambda_1 \beta) - \lambda_1 \beta L^{-1} \rho(L)]}{[\rho(\lambda_1 \beta)](1 - \lambda_1 \beta L^{-1})} x_t$$

**Preuve :** voir Hansen-Sargent [1982], Pesaran [1987, appendice D]

Par voie de conséquence, des méthodes d'estimation adéquates peuvent être proposées. Nous pouvons montrer, en appliquant la proposition 1, que si  $\rho(L) = 1 - \rho_1 L$  alors (2.5) devient :

$$(2.9) \quad \Delta y_t = (\lambda_1 - 1)(y_{t-1} - X_{t-1} \theta) + (\lambda_1 - 1)[(1 - \rho \beta \lambda_1)^{-1} (1 - \lambda_1 \beta) X_t \theta - X_{t-1} \theta] + (1 - \lambda_1 \beta)(1 - \lambda_1) e_t$$

---

1. Dans la suite et pour des raisons de simplification, nous supposons que  $k = 1$ .

de surcroît si  $\rho_1 = 1$ , alors  $X_t$  suit un processus racine unitaire ou marche aléatoire, dans ce cas on dira que c'est une variable intégrée d'ordre 1.

**Définition**

*On appelle variable intégrée d'ordre  $d$  une variable telle que sa différence  $d^{\text{ème}}$  soit stationnaire et possède une représentation ARMA inversible (c'est-à-dire  $(d-1)^{\text{ème}}$  n'est pas stationnaire) et on note  $X_t \sim I(d)$   
 $X_t \sim I(d) \iff \Delta^d X_t = (1-L)^d X_t$  possède une représentation ARMA inversible.*

Dans la terminologie de Box et Jenkins [1976],  $X_t$  est un ARIMA( $p, d, q$ ) si  $p$  et  $q$  sont les degrés respectifs des polynômes AR et MA de  $\Delta^d X_t$ . En pratique, les valeurs de  $d$  qui vont être considérées sont  $d = 0$  et  $d = 1$ . Ainsi, si  $X_t \sim I(0)$  signifie que  $X_t$  est un ARMA stationnaire. Sa variance finie est constante, la covariance entre les deux dates quelconques des  $X_t$  n'est fonction que de l'écart  $s$  entre celles-ci, les autocorrélations correspondantes  $r_s$  tendent vers 0 lorsque  $s$  tend vers l'infini ;  $X_t \sim I(1)$  implique que la variance de  $X_t$  tend vers l'infini avec  $t$ , les autocorrélations entre deux dates distantes de  $s$  tendent vers 1 pour tout  $s$ ,  $r_s$ , lorsque  $t$  tend vers l'infini. Toute combinaison linéaire de variables  $I(0)$  est  $I(0)$ . Généralement, une combinaison linéaire de variables  $I(d)$  est  $I(d)$  mais dans certains cas, peut être intégrée d'ordre plus faible, le cas le plus simple étant :

$d = 1 : y_t, X_t \sim I(d)$  et pour  $\alpha \neq 1, y_t - \alpha X_t \sim I(0)$ .

Les séries peuvent, en effet, présenter des mouvements tendanciels semblables de telle sorte que dans la combinaison linéaire les composantes tendancielle se compensent pour donner une série stationnaire. La définition formelle de la cointégration va traduire cette idée :

**Définition**

*Deux séries sont dites cointégrées d'ordre  $d, b$  pour  $0 < b < d$  si :*  
 i)  $y_t \sim I(d)$  et  $X_t \sim I(d)$   
 ii) il existe  $(\alpha_1, \alpha_2) \neq 0$  tel que  $z_t = \alpha_1 y_t + \alpha_2 X_t \sim I(0)$ .  
 On adopte la notation  $(y_t, X_t) \sim CI(d, b)$ .

Si  $\rho_1 = 1$  dans (2.9), alors cette dernière se réduit à :

$$(2.10) \quad \Delta y_t = (\lambda_1 - 1)(y_{t-1} - X_{t-1}\theta) + (\lambda_1 - 1)\theta \Delta X_t + (1 - \lambda_1 \beta)(1 - \lambda_1)e_t$$

L'équation (2.10) est un modèle à correction d'erreurs (MCE) qui n'est pas linéaire (par rapport aux paramètres) et par conséquent exige une procédure d'estimation non linéaire.

Les procédures d'estimation de ces modèles varient selon que nous avons affaire à des équations uniques ou à des systèmes d'équations<sup>2</sup>. Dans le

---

2. Des travaux récents (cf. West[1986] et Sargent[1978]) ont montré que le gain escompté, en terme d'efficacité, des procédures d'estimation à informations complètes, par comparaison aux procédures à informations limitées, est asymptotiquement marginal.

cas des systèmes d'équations, si  $|\rho_1| < 1$ , alors il y a des restrictions croisées entre les deux équations, ce qui laisse entendre qu'une estimation conjointe par maximum de vraisemblance soit préférable (cf. Johansen[1988]). A notre connaissance, une seule méthode permettant d'estimer l'ensemble des paramètres, a été proposée, que nous étudions dans la section suivante.

### III Estimation des paramètres structurels

Les variables qui composent l'équation d'Euler dérivée des modèles Q.L admettent des structures stochastiques temporelles très particulières :

**Proposition 2**

*$y_t$  admet le même ordre d'intégration que  $X_t$ .*

*Preuve : voir Annexe*

Sur ce sujet, Stock [1987] a démontré que le fait de régresser une variable  $I(1)$  sur une variable (éventuellement plusieurs)  $I(1)$  donne un estimateur du vecteur cointégrant qui converge vers sa vraie valeur avec une vitesse  $T^{-1}$  ( $T$  étant la taille de l'échantillon). En outre, le vecteur de perturbations  $z_t$  de la régression de  $y_t$  sur  $X_t$  est toujours  $I(0)$  :

$$(3.1) \quad y_t - X_t\theta = z_t \sim I(0)$$

ce qui implique que pour toute valeur de  $\beta$ ,  $z_t \sim I(0)$ . Dans ce cas,  $(y_t, X_t) \sim CI(1, 1)$  (cf. Engle et Granger [1987]). Par ailleurs, il a été suggéré qu'une propriété désirable des équations dynamiques de comportement est que les déviations par rapport à la relation de long terme disparaissent en régime permanent, ce qui se traduit en terme technique par :

$$(3.2) \quad y_t - y_{t*} \sim I(0)$$

En terme économique, ceci implique que si un agent escompte le futur, sa stratégie optimale ne pourra jamais comporter un choix de la cible telle que la trouée entre cette dernière et sa valeur désirée disparaît asymptotiquement. Pour estimer les paramètres structurels ( $\beta, \delta$  et  $\theta$ ), il suffit de remplacer  $y^*$  par sa valeur dans (2.4), il vient :

$$(3.3) \quad E(\Delta y_{t+1} | \Omega_t) = \beta^{-1} \Delta y_t + (\delta/\beta) \{ (y_t - X_t\theta) - e_t \}$$

Ensuite, la méthode des EV est utilisée pour remplacer la variable non observable par sa valeur, ce qui donne :

$$(3.4) \quad \Delta y_{t+1} = \beta^{-1} \Delta y_t + (\delta/\beta) \{ y_t - X_t\theta \} + W_{t+1}$$

avec

$$(3.5) \quad W_{t+1} = \eta_{t+1} - (\delta/\beta)e_t$$

L'expression des innovations  $\eta_{t+1}$  peut être obtenue en appliquant la formule de prédiction de WIENER-KOLMOGOROV :

$$(3.6) \quad \eta_{t+1} = (1 - \lambda_1)(1 - \lambda_1\beta) [e_{t+1}\theta\rho(\lambda_1\beta)^{-1}] \varepsilon_{t+1}$$

Cette procédure d'estimation séquentielle<sup>3</sup>, proposée par Dolado et alii [1991], est étroitement liée à la procédure en deux étapes d'Engle et Granger [1987] qui cherche à exploiter les différences des taux de convergence associés aux différents paramètres. En effet, la vitesse de convergence du vecteur cointégrant  $\theta$  permet de concevoir une méthode en deux étapes : durant la première étape, on estime  $\theta$  pour avoir (3.1) ; et durant la seconde étape, le vecteur de perturbations estimé de la régression cointégrante de l'étape 1 est utilisé dans (3.4) pour obtenir :

$$(3.7) \quad \Delta y_{t+1} = \gamma_1 \Delta y_t + \gamma_2 \hat{z}_t + \widehat{W}_{t+1}$$

La formulation (3.7) est intéressante à plus d'un titre. D'abord, toutes les variables sont  $I(0)$  ; dans ce cas Phillips [1989] a démontré que les distributions limites des paramètres associés à ces variables sont Normales. Ensuite, elle ressemble étrangement à la formulation MCE (voir Engle et Granger [1987]). Toutefois, elle diffère de cette dernière puisque le coefficient du terme correcteur d'erreurs est positif alors qu'il est négatif dans la formulation d'Engle et Granger, reflétant ainsi les interprétations prospectives et rétrospectives des deux types de modèles.

Par ailleurs, (3.7) ne peut être estimée par MCO puisque les perturbations ne sont pas des bruits blancs. Elles suivent un processus MA(1) qui est corrélé avec les régresseurs (cf. Gregory et al [1990]). Dans ce cas, l'application de la méthode de VI à l'équation (3.7) donne des estimateurs des paramètres d'intérêt qui sont convergents mais non efficaces. Si l'efficacité des estimateurs est recherchée, alors plusieurs méthodes peuvent être utilisées ; elles sont des variantes de la MMG (Méthode des Moments généralisés) de Hansen [1982]. La méthode d'estimation qui a été retenue dans cet article est celle des VI en deux pas. D'abord, on estime par VI l'équation (3.7) ; l'estimateur correspondant des VI est alors :

$$(3.8) \quad \gamma_{VI} = [X^T Z (Z^T Z)^{-1} Z^T X]^{-1} X^T Z (Z^T Z)^{-1} Z^T y$$

Ensuite, un estimateur convergent de la matrice des variances-covariances est calculé en suivant la méthode proposée par Newey et West [1987] : si  $\xi_t^r$  est le vecteur des perturbations de l'estimateur  $\gamma_{IV}$ , alors la matrice est :

$$(3.9) \quad S = \widehat{\Psi}_0 + \sum_{j=1}^k \left( 1 - \left( j/(k+1) \right) \right) \left[ \widehat{\Psi}_j + \widehat{\Psi}_j^T \right]$$

---

3. Illmakunnas [1989] a estimé une équation équivalente à (3.5) en une seule étape. Il a ainsi obtenu une estimation négative du coefficient d'escompte.



avec

$$(3.10) \quad \hat{\Psi}_j = \sum_{t=j+1}^T Z_t^T \hat{\xi}_t^r \hat{\xi}_{t-j}^r Z_{t-j} / T$$

En pratique, le paramètre  $k$  dans (3.9) est égal à l'ordre de l'autocorrélation sérielle dans  $\xi_t^r$ . Dans le présent contexte  $k = 1$ . Une matrice convergente des variances-covariances des  $\gamma_i (i = 1, 2)$  est alors :

$$(3.11) \quad H = (X^T Z S^{-1} Z^T X)$$

Par voie de conséquence, un estimateur préférable à (3.8), qui est à la fois convergent et efficace, est celui des variables instrumentales en deux étapes :

$$(3.12) \quad \gamma_{V I_2} = (X^T Z S^{-1} Z^T)^{-1} X^T Z S^{-1} Z^T y$$

avec  $H$  pour matrice des variances-covariances.

## IV Problèmes d'identification ou de conditionnement ?

Le problème d'identification apparaît clairement lorsqu'on résout explicitement le problème des variables non observables futures. En effet, l'on remarque clairement que lorsque  $X_t \sim I(1)$  dans (2.8), le paramètre  $\beta$  disparaît et il n'est plus possible de l'estimer. L'avantage des méthodes des EV dans ce contexte est qu'elles nous fournissent un cadre de travail propice pour estimer ce paramètre et nous éviter les calculs fastidieux. Toutefois, ces méthodes ne permettent pas de résoudre le problème correctement et contribuent à occulter certaines données du problème. A priori, un simple regard sur (3.7) laisse penser qu'il n'y a pas un problème d'identification puisque les paramètres structurels  $\beta$  et  $\delta$  peuvent être déduits aisément à partir des  $\gamma_i (i = 1, 2)$ . Or, cette condition, dite parfois condition d'identification de premier ordre, est certes nécessaire mais non suffisante.

Une deuxième condition introduite par les problèmes d'optimisation dans l'incertain doit être vérifiée (cf. Pesaran [1987]). Si  $|\rho_1| = 1$ , alors (3.1) implique que  $z_t$  suit un processus AR(1). Cependant si  $|\rho_1| \neq 1$ , alors (2.9) peut être aménagée pour trouver (3.3), ce qui implique que  $z_t \sim ARMA(2, 1)$ . Dans ce cas,  $z_t$  peut être approximée par un AR( $q$ ) et  $q \geq 2$ . Une simple transformation de (2.4) permet d'obtenir une équation standard aux différences finies d'ordre 1. Etudier l'identification dans cette équation revient à étudier un cas régulier d'identification : l'idée sous-jacente est séduisante ; il suffit de remplacer (2.3) dans (2.4) et ensuite arranger l'écriture, il vient :

$$(4.1) \quad \Delta y_t = \beta E(\Delta y_{t+1} | \Omega_t) + w_t$$

avec  $w_t = -\delta z_t + \delta e_t$  et  $z_t = y_t - X_t \theta$

## IDENTIFICATION DES PARAMÈTRES D'UNE ÉQUATION D'EULER

L'estimation des paramètres des équations aux différences finies dépend de l'identification de ces paramètres qui dépend à son tour de la solution ou des solutions (mathématiques) de l'équation. Pesaran [1981,1987] a démontré que la solution dans ce type d'équations est stationnaire et unique. Une méthode naturelle de résolution consiste à effectuer des remplacements récursifs en direction du futur :

$$(4.2) \quad \Delta y_t = -\delta \sum_{s=0}^{\infty} \beta^s E(z_{t+s} | \Omega_t) + u_t$$

La série n'existe pas toujours mais lorsqu'elle existe, elle correspond à une solution du modèle (4.1). Une condition suffisante d'existence de cette série est, par exemple, que le processus exogène soit stationnaire et que le coefficient structurel soit de module inférieur à 1 :  $|\beta| < 1$ . Par ailleurs, l'équation (4.2) contient une variable non observable  $E(z_t | \cdot)$ . Si nous disposons d'une information supplémentaire sur le processus générateur de  $z_t$ , nous pouvons résoudre cette équation. En effet, la structure stochastique de  $z_t$  dépend de celle de  $X_t$  ; par exemple, si  $X_t$  est générée par :

$$(4.3) \quad X_t = \rho_1 X_{t-1} + \varepsilon_{1t}$$

alors, selon que  $X_t$  contient une racine unitaire ou non,  $z_t$  admet les structures stochastiques suivantes :

$$(4.4) \quad z_t = (1 - \lambda_1 L)^{-1} [\lambda_1 \theta \varepsilon_t + (1 - \lambda_1 \beta)(1 - \lambda_1) e_t]$$

$$(4.5) \quad z_t = (1 - \lambda_1 L)^{-1} \left[ \left[ \Psi(L) - \frac{\lambda_1 L}{(1 - \rho_1 L)} \right] \theta \varepsilon_t + (1 - \lambda_1)(1 - \lambda_1 \beta) e_t \right]$$

où  $\Psi(L) = \frac{(1 - \lambda_1 \beta)(1 - \lambda_1)}{(1 - \rho_1 L)(1 - \rho_1 \beta L)}$

Dans (4.4),  $z_t \sim ARMA(1, 0)$  et dans (4.5),  $z_t \sim ARMA(2, 1)$  Dans les deux cas, il n'est pas possible de résoudre correctement le problème : dans le premier cas,  $z_t$  peut être approximé par :

$$(4.6) \quad z_t = \mu_1 z_{t-1} + \nu_{1t}$$

Par conséquent, si on substitue  $z_t$  par son expression dans (4.2), on obtient :

$$(4.7) \quad \Delta y_t = -\delta / (1 - \rho_1 \beta) z_t + u_{1t}$$

d'où un problème d'identification ; il n'est pas possible d'identifier  $\delta$  de  $\beta$ . Dans le deuxième cas, la procédure d'estimation en deux étapes n'est plus justifiée puisque  $X_t \sim I(0)$  et, d'après la proposition 2,  $y_t$  l'est aussi ; de ce fait la cointégration n'a plus de sens puisque toutes les variables sont

## IDENTIFICATION DES PARAMÈTRES D'UNE ÉQUATION D'EULER

stationnaires. Toutefois, si  $X_t$  est générée par un processus  $I(1)$  dont la structure stochastique est approximée par un processus  $AR(2)$ , mettons :

$$(4.8) \quad X_t = (\rho_1 + \rho_2)X_{t-1} - (\rho_1\rho_2)X_{t-2} + \varepsilon_{2t}$$

avec  $|\rho_1| = 1$  et  $|\rho_2| < 1$ , alors :

$$(4.9) \quad z_t = (1 - \lambda_1 L)^{-1} \left[ (1 - \lambda_1 \beta)(1 - \lambda_1) e_t - \theta \lambda_1 (1 - \rho_2 \beta \lambda_1)^{-1} (1 - \rho_2 \beta) \Delta x_t \right]$$

ce qui implique que  $z_t \sim ARMA(2,1)$  puisque  $\Delta X_t \sim I(0)$  et peut être, par conséquent, approximée par un processus  $AR(2)$ , mettons :

$$(4.10) \quad z_t = \mu_1 z_{t-1} + \mu_2 z_{t-2} + \nu_{2t}$$

Dans ce cas, (4.2) devient :

$$(4.11) \quad \Delta y_t = \varphi_0 z_t + \varphi_1 z_{t-1} + u_{2t}$$

avec

$$\varphi_0 = -\frac{\delta}{1 - \mu_1 \beta - \mu_2 \beta^2}$$

$$\varphi_1 = -\frac{\delta \mu_2 \beta}{1 - \mu_1 \beta - \mu_2 \beta^2}$$

Si nous supposons, de surcroît, que les  $\mu_i (i = 1, 2)$  sont estimés à l'extérieur de ce modèle, alors  $\beta$  et  $\delta$  peuvent être identifiés aisément.

En somme, la règle dite de "comptage", qui consiste à s'assurer que le nombre de paramètres à estimer est au moins égal aux nombres de régresseurs, est une condition nécessaire mais non suffisante. La seconde condition (suffisante) doit être aussi vérifiée. Elle consiste en pratique à, non seulement vérifier que le vecteur de cointégration de la première étape de la procédure d'estimation est  $I(0)$ , mais encore à identifier le processus stochastique qu'il suit par les techniques (la fonction d'autocorrélation et la fonction d'autocorrélation partielle) de Box et Jenkins [1976].

Par ailleurs, le problème d'estimation n'est pas correctement défini : si  $z_t$  suit un processus  $AR(2)$ , nous pouvons montrer qu'il y a un problème de multicollinéarité sévère ; pour cette raison nous pensons que les expériences de Monte Carlo peuvent nous donner des explications supplémentaires.

## V Résultats empiriques

La méthode d'estimation que nous venons de voir a été appliquée sur une fonction de demande de monnaie française. L'échantillon s'étale de 1969(1) jusqu'à 1985(4).  $m$  désigne le stock de monnaie  $M1$ ;  $y$  désigne le produit intérieur brut (pib);  $p$  est le déflateur implicite du pib et  $R$  le taux d'intérêt. Toutes les variables sont en logarithmes sauf  $R$ .

Dans une première étape, nous avons testé la présence de la racine unitaire dans les séries en utilisant les tests paramétriques de Dickey-Fuller [1979,1981] (dorénavant DF) et les tests de Dickey-Fuller augmentés (ADF). L'équation de régression du test DF de l'hypothèse nulle que les séries sont  $I(1)$  est donnée par :

$$(5.1) \quad \Delta X_t = a + ct + \alpha X_{t-1} + v_t$$

La statistique de test correspond au rapport de student de l'hypothèse nulle  $\alpha = 0$ , sa distribution limite est une fonction du processus de WIENER. Le test DF suppose que le terme de perturbations ne soit pas sériellement corrélé. Souvent, en pratique, cette hypothèse est violée. Pour surmonter ce problème Dickey-Fuller [1979] ont suggéré d'ajouter suffisamment de retards pour s'assurer de la blancheur de terme des résidus. D'où la régression du test ADF :

$$(5.2) \quad \Delta X_t = a + ct + \alpha X_{t-1} + \sum_{i=1}^m \pi_i \Delta X_{t-i} + v_t$$

où la statistique de test et les valeurs critiques sont les mêmes que le test DF.

Tableau 1

	$m$	$p$	$y$	$R$
Sans tendance	-2.261 (4)	0.356 (4)	-0.422 (2)	-1.122 (4)
Avec tendance	-1.880 (4)	-2.230 (2)	-2.130 (4)	-2.624 (4)

La statistique ADF correspond à  $\tau_\mu$  dans FULLER [1976].

Les valeurs de  $m$  sont entre parenthèses.

Dans le tableau 1, nous reportons dans chaque cas (avec et sans tendance) la statistique du test ADF ainsi que le retard  $m$  qui permet l'obtention des résidus bruits blancs. Tout semble indiquer<sup>4</sup> que les variables sont  $I(1)$ , d'où la possibilité de tester la cointégration. Pour ce faire, et suivant Engle et Granger [1987], nous avons appliqué le test ADF sur les résidus  $z_t$  de la régression cointégrante suivante :

$$\begin{aligned}
 mt = & -0.048 + 0.196 yt + 0.335 pt - 0.087 Rt + zt \\
 & [0.067] \quad [0.053] \quad [0.258] \quad [0.036] \\
 & \text{MCO, 1969(1)-1985(4), DW=0.591, R}^2=0.298
 \end{aligned}$$

4. Les valeurs critiques asymptotiques sont reportées dans l'annexe.

## IDENTIFICATION DES PARAMÈTRES D'UNE ÉQUATION D'EULER

Ce test, bien qu'il ait la même statistique de test, n'admet pas la même distribution limite que celles des racines unitaires. Cette distribution dépend du nombre de régresseurs de la régression cointégrante. Ce test est dit test de Engle et Granger (EG) ou encore test de Engle et Granger augmenté (EGA). Les résultats de ce dernier (voir Tableau 2) impliquent que les variables sont cointégrées : c'est-à-dire que le vecteur de cointégration suit un processus  $I(0)$ .

**Tableau 2**

Sans tendance	-3.900 (3)
Avec tendance	-5.090 (3)

De surcroît, il peut être approximé par un processus ARMA(1,2) (voir Annexe). Au vu de ces résultats, l'hypothèse nulle de la non cointégration ne peut être acceptée. Nous concluons que les variables sont cointégrées. Quant aux résultats de la seconde étape, ils doivent être analysés avec beaucoup de circonspection.

Dans l'étape 2 de la méthode de Dolado et alii, nous avons fait appel à la méthode des variables VI2 (cf. Hansen [1982]). Cette dernière donne des estimateurs convergents et efficaces, nous permettant ainsi de transgresser la tradition de fixer  $\beta$ . Certes, les résultats obtenus semblent confirmer ce qui est soutenu dans la littérature relative à ce sujet, à savoir que  $\beta$  prend des valeurs proches de 1.

**Tableau 3**

	ℑ1	ℑ2	ℑ3	ℑ4
$\gamma_1$	0.980 [0.589]	0.895 [0.515]	0.986 [0.273]	0.978 [0.270]
$\gamma_2$	-0.091 [0.231]	-0.125 [0.199]	-0.073 [0.163]	-0.086 [0.156]
$\beta$	1.020	1.117	1.011	1.022
$dd$	-0.093	-0.141	-0.074	-0.088
Sarg	2.756	3.535	3.144	3.772
d.1	2	3	3	4
P-value	0.252	0.316	0.370	0.438

*Sarg est le test de la validité des instruments qui suit asymptotiquement une loi chi-deux à dl degré de liberté.*

Le tableau 3 indique que les valeurs estimées de  $\beta$  varient légèrement en fonction des ensembles d'informations choisis (les  $\mathfrak{I}_i$ )<sup>5</sup>. Les estimations de

---

5. Le choix des instruments a été guidé par les valeurs de la P-value tout en

$\beta$  ne sont pas négatives et donc paraissent plausibles puisque la probabilité de signification marginale (P-value) est relativement élevée. Cependant, si on se conforme aux restrictions théoriques que nous avons énoncées dans la section 2 à savoir que  $0 < \beta < 1$ , elles semblent difficiles à interpréter puisque le coefficient d'escompte  $\beta$  n'est autre que  $(1 + \pi)^{-1}$ . De ce fait, les valeurs estimées de  $\pi$  (le taux de préférence pour le présent) sont négatives (voir Tableau 4) :

**Tableau 4**

<i>Instruments</i>	ℑ1	ℑ2	ℑ3	ℑ4
$\pi$ en %	-2.0	-10.5	-1.40	-2.20

Par ailleurs, les estimations de  $\delta$  sont biaisées et ne sont pas conformes à ce qui est attendu (puisqu'elles sont négatives), donc économiquement non interprétables. Dès lors, la valeur négative de  $\beta$  trouvée par Illmakunnas [1989] peut être expliquée par le fait de ne pas tenir compte de la cointégration entre les séries. La méthode d'estimation que nous avons adoptée écarte toute estimation négative de  $\beta$ . Toutefois, un autre problème surgit, à savoir l'amplitude des estimations de  $\beta$  qui est à notre sens décevante puisqu'elle induit des valeurs du taux de préférence pour le présent négatives ! Dans la section suivante, nous avançons quelques explications possibles à ces résultats.

## VI Simulations par Monte Carlo<sup>6</sup>

Nous avons généré deux séries  $e$  et  $\varepsilon_s$  respectivement à partir des lois de LAPLACE-GAUSS  $N(0, \sigma_e)$  et  $N(0, \sigma_\varepsilon)$  avec  $\sigma_e = 1$ ,  $\sigma_\varepsilon = 1$  et  $E(e_t \varepsilon_s) = 0$ . Ensuite,  $X_t$  est générée par les PGD (6.3) et (6.8) et dans chaque cas  $y_t$  est générée par le PGD (2.5). Le nombre de répliques est  $N=2000$ .

Lorsque  $X_t \sim AR(1)$ , les estimations des différents paramètres sont acceptables quoique, pour des valeurs élevées de  $\beta$  et de  $\lambda_1$ , les valeurs estimées de  $\gamma_1$  induisent des estimations de  $\beta$  (coefficient d'escompte) très élevées. Ces valeurs n'appartiennent pas généralement à la plage des valeurs économiquement plausibles [0.9,1]. Aussi remarque-t-on que le biais dans l'estimation de  $\delta$  est très important. Une explication qui peut être avancée dans ce cadre serait : lorsque  $X_t \sim I(1)$ , l'équation (2.6) est "équilibrée", en ce sens que toutes les variables ont le même ordre d'intégration  $I(0)$ . Cependant, la condition suffisante d'identification n'est pas vérifiée (voir la section précédente). Ce qui implique que la matrice des variances-covariances entre les instruments et les régresseurs est asymptotiquement singulière (cf. Gregory et al [1990]. Pour

---

respectant l'inégalité de KINAL [1980]. Ce dernier a proposé de choisir les instruments de manière à respecter  $m > Q - k + 1$  avec  $m$  le nombre de moments de l'estimateur VI,  $Q$  le nombre des variables instrumentales et  $k$  le nombre de régresseurs de l'équation impliquée.

6. Les résultats complets de ces expériences sont disponibles sur demande.

## IDENTIFICATION DES PARAMÈTRES D'UNE ÉQUATION D'EULER

vérifier cela, nous avons calculé les valeurs propres de cette matrice et nous avons reporté dans chaque cas la valeur propre minimale.

**Tableau 5**

$\gamma_1$	$\gamma_2$	$\beta$	$\delta$	$\lambda \text{ min}$
0.879	-0.005	1.137	-0.005	2.8 10 E-5
[0.061]	[0.005]			

$\beta$  est fixé à 0.99 et  $\delta$  à 0.026.

Par ailleurs, lorsqu'on se fixe des valeurs de  $\beta$  relativement faible, (par exemple : 0.8), on obtient une estimation de  $\gamma_1$  supérieur à 1, ce qui implique une estimation de  $\beta$  inférieur à 1. Ceci est dû, d'une part, au problème de biais de petit échantillon dans l'estimation du coefficient de la variable retardée  $\gamma_2$  qui, à son tour, affecte l'estimation du coefficient  $\gamma_1$  (voir Grubb et Symons [1987]). D'autre part, lorsque  $X_t \sim AR(1)$ , les paramètres ( $\beta$  et  $\delta$ ) ne sont plus identifiables. Cette mauvaise identification pourrait avoir des répercussions sur les estimations de ces paramètres. En effet, Phillips [1989] a démontré que, bien qu'il soit possible d'estimer les paramètres  $\beta$  et  $\delta$ , les estimateurs ne sont pas convergents et admettent des distributions limites non standards.

L'effet de la non identification des paramètres structurels des modèles Q.L sur les valeurs numériques des estimateurs a été négligé dans les travaux empiriques. Dans ce qui va suivre, nous allons tenter d'étudier cet effet. En outre et afin de savoir si les mauvaises performances des estimations sont dues ou non à ce problème d'identification, nous avons généré un processus  $X_t$  admettant une structure stochastique d'un processus AR(2) et nous avons estimé les paramètres d'intérêt.

**Tableau 6**

$\rho_2$	$\gamma_1$	$\gamma_2$	$\beta$	$\delta$	$\lambda \text{ min}$
0.9	0.972	-0.004	1.028	-0.004	0.485
	[0.013]	[0.001]			
0.8	0.964	-0.004	1.037	-0.004	0.398
	[0.019]	[0.002]			
0.5	0.947	-0.004	1.055	-0.005	0.060
	[0.028]	[0.003]			
0.3	0.937	-0.003	1.067	-0.004	0.010
	[0.033]	[0.004]			
0.1	0.926	-0.002	1.079	-0.002	0.003
	[0.033]	[0.004]			

$\beta$  est fixé à 0.99 et  $\delta$  à 0.026.

Les résultats qui sont reportés dans le tableau 6, sont tels que les estimations du coefficient d'escompte varient en fonction de plusieurs paramètres : le biais dans l'estimation de  $\beta$  est une fonction décroissante des différentes valeurs que prend le paramètre  $\rho_2$ . En effet, pour des valeurs de  $\rho_2$  proches de 0, le processus  $X_t$  se comporte comme un AR(1) dans les échantillons de taille réduite. De ce fait, les résultats ressemblent (pour des configurations similaires) à celles de l'expérience précédente. En revanche, si  $\rho_2$  tend vers 1, le biais atteint son minimum.

Par ailleurs, quelle que soit la configuration choisie, le biais dans l'estimation de  $\delta$  est trop important et varie légèrement en fonction des valeurs fixées de  $\beta$ ,  $\delta$  et  $\lambda_1$  (raison pour laquelle seul le tableau 6 a été reporté). Le tableau 6 montre que le biais dans l'estimation de  $\beta$  est toujours présent. De surcroît, les résultats de la simulation impliquent que l'effet de l'identification n'est pas substantiel. En effet, les valeurs estimées de  $\delta$  sont toujours négatives. Il est difficile d'en dire plus sur ce problème puisqu'il est extrêmement difficile de calculer analytiquement la matrice des variances-covariances entre les instruments et les régresseurs. Tout ce qu'on sait est qu'elle est une fonction complexe de  $\sigma_e$ ,  $\sigma_\varepsilon$ ,  $\beta$ ,  $\delta$  et  $\lambda_1$ . Dès lors, il serait judicieux de montrer l'effet des différentes configurations (notamment les valeurs de  $\rho_2$ ) sur la singularité de cette matrice. Si  $\rho_2$  est proche de 0 (par exemple,  $\rho_2 = 0.1$ ), l'expérience donne une estimation de  $\lambda_{min}$  pratiquement nulle (0.003). Par contre, si  $\rho_2$  est proche de l'unité (par exemple  $\rho_2 = 0.9$ ) alors  $\lambda_{min}$  est de l'ordre de 0.4 à 0.5, ce qui est satisfaisant. Ce constat est confirmé par les estimations relativement peu biaisées de  $\beta$  lorsque  $\sigma_e$  tend vers 1. Pour notre part, nous pensons que le biais introduit dans la première étape de l'estimation du vecteur cointégrant (cf. Banerjee et al [1986]) affecte l'estimation du paramètre associé dans l'estimation de (3.7).

En somme, lorsqu'il s'agit d'estimer les paramètres structurels d'un programme d'optimisation dans l'incertain, l'apport de la cointégration est conditionnel et limité dans le sens où cette dernière permet de donner des estimations précises sous certaines conditions sur une partie des paramètres structurels : il faut que le processus suivi par les exogènes soit approximé par un processus AR au moins d'ordre 2 (sinon plus) et il faut que la variable dépendante soit  $I(1)$ . Cette dernière restriction est caractéristique des modèles Q.L. En effet, ces derniers requièrent non seulement que l'équation d'Euler soit "équilibrée" au sens de Granger mais aussi que la variable à expliquer soit  $I(1)$ .



## VII Conclusion

L'estimation des modèles Q.L par la Méthode EV est sensible à bon nombre de facteurs notamment le degré d'intégration des variables, la cointégration et l'identification des paramètres. Dans cet article, nous avons étudié quelques problèmes soulevés par l'application d'une méthode séquentielle en deux étapes à information limitée due à Dolado et al [1991]. Elle considère que la non stationnarité dans les données est de type stochastique. Dès lors, cette information additionnelle est utilisée pour estimer les paramètres de l'équation d'Euler dérivée d'un modèle Q.L. Tirer des conclusions au terme de cette étude est une chose difficile. En effet, l'estimation de tous les paramètres structurels des modèles Q.L a toujours posé un problème épineux, notamment celui de l'identification. Nombreux sont les chercheurs qui calibrent leurs modèles en fixant le coefficient d'escompte à 0.99, par exemple, dans le but d'esquiver le problème posé par l'estimation de ce paramètre. La présente étude a montré qu'on peut obtenir des estimations relativement précises de  $\beta$  à condition que le vecteur de cointégration de la première étape de la méthode d'estimation ait une structure stochastique d'un processus ARMA qui peut être approximé par un AR(p) avec  $p \geq 2$ . L'estimation négative de  $\beta$  obtenue par Illmakunnas [1989] est due, à notre sens, à la non prise en compte des propriétés de cointégration des séries impliquées. En effet, en adoptant la même démarche que cet auteur, nous avons trouvé une estimation négative de ce coefficient<sup>7</sup>.

Demeure, cependant, le problème de l'estimation du rapport des coûts  $\delta$  ; le principal apport de cet article consiste à montrer que même s'il est possible de minimiser au maximum le biais dans l'estimation de  $\beta$ , il n'est pas possible d'avoir une estimation (économiquement) plausible de  $\delta$ . L'application de la méthode de Dolado et alii, quoiqu'en évitant de donner des estimations négatives à l'instar d'Illmakunnas [1989], ne nous a pas permis d'avoir des estimations complètement satisfaisantes des différents paramètres structurels du modèle Q.L. De ce fait, nous pensons que l'apport de la cointégration à l'estimation de ces paramètres est conditionnel, voire limité.

Par le biais de cet article, nous avons essayé de montrer qu'il existe un vaste terrain empirique à explorer. Les résultats relativement mauvais qu'on a obtenus ne signifient pas qu'on doit abandonner l'estimation des paramètres structurels des modèles Q.L en présence des variables intégrées et cointégrées ou même qu'on doit calibrer ce genre de modèle en fixant savamment certains paramètres et en estimant les autres : ils doivent certes inciter à la prudence dans la formulation et l'estimation de tels modèles, théoriquement et empiriquement séduisants, et surtout ils doivent aussi être développés et enrichis jusqu'à mettre en lumière et incorporer les points qui restent en suspens.

---

7. Les résultats sont disponibles sur demande.

## RÉFÉRENCES

- BANERJEE A., DOLADO J., HENDRY D.F. et SMITH G.W. (1986) "Exploring Equilibrium Relationships in Econometrics Through Static Models : Some Monte Carlo Evidence", *Oxford Bulletin of Economics and Statistics*, vol. 48, pp. 253-258.
- BOX G.E.P. et JENKINS G.M. (1976) *Time Series Analysis-Forecasting and Control*, San Francisco, CA :Holden-Day.
- BOX G.E.P. et PIERCE D. (1970) "Distribution of Residuels Autocorrelation in Integrated Autoregressive Moving Average Time Series Models", *Journal of the American Statistical Association*, Vol. 65, pp 1509-1526.
- CUMBY R., HUIZINGA J. et OBSTFELD M. (1983) "Two-step Two-stage Least Squares Estimation in Models with Rational Expectations", *Journal of Econometrics*, Vol. 21, pp. 333-355.
- DAVIDSON R. et MACKINNON J. (1993) *Estimation and Inference in Econometrics*, Oxford, Oxford University Press.
- DICKY D.A. et FULLER W.A. (1979) "Distribution of The Estimators for Autoregressive Time Series with a Unit Root", *Journal of American Statistical Association*, Vol. 74, pp 427-431.
- DICKY D.A. et FULLER W.A. (1981) "Likelihood Ratio Statistics for Autoregressive Time Series with a Unit Root", *Econometrica*, Vol. 49, pp. 1057-72.
- DOLADO J.J., GALBRAITH G., BANERJEE A. (1991) "Estimating Intertemporal Quadratic Adjustment Cost Models With Integrated Series", *International Economic Review* Vol. 32, pp. 919-935.
- ENGLE R.F. et GRANGER C.W.J. (1987) *Cointegration and Error Correction : Representation, Estimation and Testing*, *Econometrica*, Vol. 55, pp. 251-276.
- FULLER W.A. (1976) *Introduction to Statistical Time Series*, New York, John Wiley & Sons.
- GRANGER C.W. et NEWBOLD G. (1987) *Forecasting Economic Time Series*, Academic Press, San Fransisco.
- GRANGER C.W. (1990) *Where are the Controversies in Economics Methodology ?*, In *Modelling Economic Series*, in *Advanced Texts in Econometrics* edited by C.W.J.Granger.
- GREGORY A.W., PAGAN A.R. et SMITH G.W. (1990) *Estimating Linear Quadratic Models with integrated process*, Research Working Paper, 247, University of Rochester, NY.
- GREGORY A.W., PAGAN A.R. et SMITH G.W. (1992) *Estimating Quadratic Linear*, Mimeo, University Rochester, NY.
- GRUBB D. et SYMONS J. (1987) "Biais in Regression with Lagged Variables", *Econometric Theory*, Vol. 4, pp. 371-386.

## IDENTIFICATION DES PARAMÈTRES D'UNE ÉQUATION D'EULER

- HALL A. (1993) "Some Aspects of Generalized Method of Moments Estimation", in *Maddala, Rao & Vinod (eds)*, Handbook of Statistics, Vol. 11, Elsevier.
- HANSEN L.P. (1982) "Large Sample Properties of GMM Estimators", *Econometrica*, Vol. 50, pp. 1029-1054.
- HANSEN L.P. (1985) "A Method for Calculating Bounds on the Asymptotic Covariance Matrices of Generalized Method of Moments", *Journal of Econometrics* Vol. 30, pp. 203-238.
- HANSEN L.P. et SARGENT T.S. (1980) "Formulating and Estimating Dynamic Linear Rational Expectations Models", *Journal of Economic Dynamics and Control*, Vol. 2, pp. 7-46.
- HANSEN L.P. et SARGENT T.S. (1981) "A Note on Wiener-Kolmogorov Prediction Formulas for Rational Expectations Models", *Economic Letters*, n° 8, pp. 255-260.
- HANSEN L.P. et SARGENT T.S. (1982) "Instrumental Variables Procedures for Estimating Linear Rational Expectations Models", *Journal of Monetary Economics*, Vol. 9, pp. 263-296.
- ILLMAKKUNAS P. (1989) "Survey Expectations vs Rational Expectations in The Estimation of a Dynamic Model : Demand For Labor in Finnish Manufacturing", *Oxford Bulletin of Economics and Statistics*, Vol. 51, pp. 297-314.
- JOHANSEN S. (1988) "Statistical Analysis of Co-integration Vectors", *Journal of Economic Dynamics and control*, Vol. 12, pp. 231-254.
- JOHANSEN S. (1992) *The Role of Constant Term in Co-integration Analysis of Nonstationary Variables*, Preprint 1, Institute of Mathematical Statistics, University of Copenhagen.
- JOHANSEN S. et JUSELIUS K. (1990) "Maximum Likelihood Estimation and Inference Co-integration With Applications to the Demand for Money", *Oxford Bulletin of Economics and Statistics*, 52, n° 2, pp. 169-210.
- KENNAN J. (1979) "The Estimation of Partial Adjustment Models With Rational Expectations", *Econometrica*, Vol. 47, pp. 1441-1455.
- KINAL T.W. (1980) "The Existence of Moments of k-class Estimators", *Econometrica*, Vol. 48, pp. 241-249.
- KWIATKOWSKI D., PHILLIPS P.C.B., SCHMIDT T. et SHIN Y. (1992) "Testing the Null Hypothesis of Stationarity Against the Alternative of a Unit Root", *Journal of Econometrics*, Vol. 54, pp.159-178.
- MACKINNON J.G. (1991) "Critical Values for Co-integration tests", in *Long Run Economic Relationships : Reading in Cointegration*, Oxford, Oxford University Press.
- MCCALLUM B.T. (1976) "Rational Expectations and The Estimation of The Econometric Models : An Alternative Procedure", *International Economic Review*, Vol. 17, pp. 610-623.

## IDENTIFICATION DES PARAMÈTRES D'UNE ÉQUATION D'EULER

- NELSON C.R. et PLOSSER C.I. (1982) "Trends et Random Walks in Macroeconomic Time Series : Some Evidence and Implications", *Journal of Monetary Economics*, Vol. 10, pp. 139-162.
- NELSON C.R. et STARTZ R. (1987) "Trends et Random Walks in Macroeconomic Time Series : Some Evidence and Implications", *Journal of Monetary Economics*, Vol. 10, pp. 139-162.
- NEWBY W.K. et WEST K.D. (1987) "A Simple, Positive Semi-definite, Heteroskedasticity and Autocorrelation Consistent Covariance Matrix", *Econometrica*, Vol. 55, pp. 703-708.
- NICKELL S. (1985) "Error Correction, Partial Adjustment and All That : An Expository Note", *Oxford Bulletin of Economics and Statistics*, Vol. 47, pp. 119-129.
- PESARAN H. (1981) "Identification of Rational Expectations Models", *Journal of Econometrics*, Vol. 16, pp. 375-398.
- PESARAN H. (1987) *The Limits To Rational Expectations*, Oxford, Basil Blackwell.
- PHILLIPS P.C.B. (1989) "Partially Identified Econometric Models", *Econometric Theory*, Vol. 5, pp.181-240.
- SARGAN J.D. (1958) "The Estimation of Economic Relationships Using Instrumental Variables", *Econometrica*, Vol. 26, 393-415.
- SARGENT T.J. (1978) "Estimation of Dynamic Labor Demand Schedules Under Rational Expectations", *Journal of Political Economy*, Vol. 86, pp. 1009-1044.
- SARGENT T.J. (1979) *Macroeconomic Theory*, New York, Academic Press.
- SARGENT T.J. (1987) *Dynamic Macroeconomic Theory*, Harvard University Press.
- SIMON H.A. (1956) "Dynamic Programming under Uncertainty with a Quadratic Criterion Function", *Econometrica*, Vol. 24, pp. 74-81.
- STOCK J.H. (1987) "Asymptotic Properties of Least Squares Estimators of Cointegration Vectors", *Econometrica*, Vol. 55, pp. 1035-1056.
- WEST K.D. (1986) "Full versus Limited Information of Rational Expectations Models. Some Numerical Comparisons", *Journal of Econometrics*, Vol. 33, pp. 367-385.
- WICKENS M.R. (1982) "The Efficient Estimation of Econometric Models with Rational Expectations", *Review of Economic Studies*, XLIX, pp. 55-67.

ANNEXE A

**Preuve de la proposition 2.**

Reprenons l'équation (2.5) et remplaçons  $y^*$  par sa valeur dans (2.3), ensuite appliquons la formule de WIENER-KOLMOGOROV (voir proposition 1), il vient :

$$(A.1) \quad y_t = (1 - \lambda_1)(1 - \lambda_1\beta)\theta \left[ \frac{\rho(\lambda_1 L) - (\lambda_1 L)L^{-1}\rho(L)}{\rho(\lambda_1 L)(1 - \lambda_1\beta L^{-1})(1 - \lambda_1 L)} \right] X_t \\ + (1 - \lambda_1)^{-1}(1 - \lambda_1 L)(1 - \lambda_1\beta) e_t$$

On a d'une part,  $0 < \lambda_1 < 1$ , car c'est la racine stable du polynôme caractéristique associé à l'équation aux différences finies (2.4), et d'autre part,  $e_t \sim I(0)$ . Donc, pour que l'équation soit équilibrée, il faut que l'ordre d'intégration de  $y_t$  soit égal à celui de  $P(L)X_t$  avec

$$(A.2) \quad P(L) = (1 - \lambda_1)(1 - \lambda_1\beta) \left[ \frac{\rho(\lambda_1 L) - (\lambda_1 L)L^{-1}\rho(L)}{\rho(\lambda_1 L)(1 - \lambda_1\beta L^{-1})(1 - \lambda_1 L)} \right]$$

(puisque le membre restant étant  $I(0)$ ). Si  $P(L)$  contient une racine unitaire (éventuellement plusieurs) alors  $P(1) = 0$ . Si, au contraire,  $P(1) \neq 0$ , alors  $P(L)$  ne contient pas de racine(s) unitaire(s) et dans ce cas,  $y_t$  admet le même ordre d'intégration que  $X_t$ .

Montrons que  $P(1) \neq 0$ . Pour ce faire, divisons d'abord le numérateur et le dénominateur de  $P(L)$  par  $\rho(\lambda_1 L)$  et ensuite, multiplions les par  $L$ , on obtient :

$$(A.3) \quad P(L) = 1 - (\lambda_1\beta) \rho(L)/\rho(\lambda_1 L)$$

On sait d'après (2.8) que  $\rho(L)X_t = \varepsilon_t$ , de plus si  $X_t \sim I(d)$  alors le polynôme  $\rho(L) = (1-L)^d \rho^*(L)$  avec  $\rho^*(L)$  ayant toutes ses racines à l'extérieur du cercle unité et par conséquent,  $\rho(1) = 0$  et par suite  $P(L) = 1 \neq 0$ .

C.Q.F.D.

**ANNEXE B**

Le tableau (1.b) contient les valeurs critiques (asymptotiques) des tests de racines unitaires qui ont été récemment publiées (voir Mackinnon [1991]). Ces valeurs ont l'avantage d'être plus précises que celles de Dickey et Fuller [1979] ou Fuller [1976]. Le tableau (2.b) contient les valeurs critiques des test de cointégration.

**Tableau 1.b**

Taille	5 %	10 %
Sans tendance	-3.338	-3.046
Avec tendance	-3.413	-3.128

**Tableau 2.b**

Taille	5 %	10 %
Sans tendance	-4.10	-3.81
Avec tendance	-4.43	-4.15

**ANNEXE C**

Identification par les techniques de FAC et FACP du vecteur cointégrant

*h	1	2	3	4	5	6	7	8	9
$\gamma(h)$	.679	.402	.105	-.234	-.288	-.256	-.249	-.244	-.210
$\varphi(h)$	.679	-.111	-.230	-.357	.195	.068	-.208	-.327	.066

L'identification du processus correspondant au vecteur cointégrant donne  $q = 2$ , et  $p = 1$  c'est à dire un processus  $ARMA(1, 2)$ .

*Je tiens à remercier l'éditeur et les rapporteurs anonymes du JSSP ainsi que F. APRAHAMIAN, O. CHANEL, A. PEGUIN et I. ADO, chercheurs au GREQAM, pour leurs critiques et remarques sur une version antérieure de ce travail. Leur responsabilité n'est évidemment pas engagée par les erreurs et inexactitudes pouvant subsister dans le texte définitif. Je reste le seul responsable de ses insuffisances. Le soutien et l'encouragement de Monsieur J. VORANGER, Professeur émérite à l'Université d'Aix-Marseille III, m'ont permis de mener ce travail à terme.*