

HUBERT DE LA BRUSLERIE

## **La révélation de la gamme des taux d'intérêt à partir des taux de rendement actuariels**

*Journal de la société statistique de Paris*, tome 136, n° 3 (1995),  
p. 17-36

[http://www.numdam.org/item?id=JSFS\\_1995\\_\\_136\\_3\\_17\\_0](http://www.numdam.org/item?id=JSFS_1995__136_3_17_0)

© Société de statistique de Paris, 1995, tous droits réservés.

L'accès aux archives de la revue « Journal de la société statistique de Paris » (<http://publications-sfds.math.cnrs.fr/index.php/J-SFdS>) implique l'accord avec les conditions générales d'utilisation (<http://www.numdam.org/conditions>). Toute utilisation commerciale ou impression systématique est constitutive d'une infraction pénale. Toute copie ou impression de ce fichier doit contenir la présente mention de copyright.

NUMDAM

Article numérisé dans le cadre du programme  
Numérisation de documents anciens mathématiques

<http://www.numdam.org/>

## II

### ARTICLES

# LA RÉVÉLATION DE LA GAMME DES TAUX D'INTÉRÊT A PARTIR DES TAUX DE RENDEMENT ACTUARIELS

Hubert de LA BRUSLERIE

Professeur à l'Université Paris I Sorbonne

## Résumé

L'objet de l'article est d'apporter une réponse pratique à l'estimation des structures par terme des taux d'intérêt implicites aux prix obligataires constatés sur un marché. La mesure privilégiée est le taux de rendement actuariel conçu comme premier élément d'un algorithme d'optimisation qui fait référence à trois types de relation fonctionnelle permettant de calculer des coefficients d'actualisation des flux obligataires. La référence à la notion de taux actuariel est faite ici pour des raisons pratiques et non pas théoriques. On sait, en effet, que pour une maturité donnée il n'y a pas, à l'équilibre du marché, unicité de taux actuariel.

Les résultats obtenus dans la restitution de prix obligataires sur sept marchés internationaux sont corrects. Même si des interrogations demeurent, ils semblent comparables à ce à quoi aboutissent d'autres méthodes concurrentes dans la révélation de la structure par terme des taux d'intérêt.

## I Introduction

La gamme des taux d'intérêt purs – ou taux “spot” – est un outil indispensable pour l'analyse obligataire. La littérature a souligné depuis longtemps les insuffisances de la notion de taux de rendement actuariel. Depuis les courbes de Durand apparues dans les années 1940, la prise en compte de la dimension de la maturité, a permis d'aboutir à un outil actuariel dont l'usage est maintenant général : les courbes des taux de rendement (“yield curves”) reconnaissent l'existence d'une dimension temporelle lorsqu'il s'agit de décrire un ensemble de titres obligataires, à une date donnée dans une devise donnée.

Même si, depuis lors, les méthodes d'ajustement économétrique ont permis des progrès dans l'analyse, les courbes de taux de rendement restent un outil insuffisant car la variable expliquée, le rendement actuariel, est conceptuellement faible puisqu'il s'agit d'un taux composite au contenu financier ambigu<sup>1</sup>.

La prise en compte d'un effet coupon est apparue pertinente à la fois sur les plans théorique et empirique. Des modèles d'ajustement économétriques mettent en relation le rendement actuariel, la maturité et le coupon des titres. Des approfondissements ont aussi conduit à distinguer des niveaux de courbes de taux de rendement différents selon les classes de rating des obligations.

En fait, le véritable prix du temps est le taux d'intérêt qui mesure avec justesse le prix d'un flux monétaire unique dans le temps. Ce concept économique est central car il est dépourvu des ambiguïtés liées au réinvestissement des flux intercalaires et à l'incidence de l'effet coupon. La gamme des taux d'intérêt est, à une date donnée, le prix pur de la liquidité dans le temps ; elle considère tout le spectre des maturités du jour le jour au 30 ans. La structure par terme des taux d'intérêt est indispensable pour appréhender la valeur actuelle d'un flux quelle que soit sa datation dans le temps. Elle analyse la valeur d'un titre obligataire comme une collection contractuelle de flux certains. Le principe fondamental d'additivité des valeurs actuelles permet de lier le prix d'une obligation et la structure par terme des taux d'intérêt.

---

1. Celui-ci est fondé sur l'hypothèse implicite de réinvestissement au taux actuariel lui-même tout au long de la durée de vie du titre. Si on analyse l'ensemble d'un marché, cela signifie que chaque titre est susceptible de réinvestir ses propres coupons à un taux qui lui est propre. Ce qui est la négation du principe d'unité de caisse dans la gestion d'un portefeuille. Le gérant replace les flux intercalaires à un taux unique à une date donnée, quel que soit le titre à l'origine des flux perçus. Par ailleurs, ce taux de réinvestissement est supposé stable jusqu'à une échéance finale qui peut se situer à plusieurs dizaines d'années de là. C'est nier l'incertitude qui fait des taux d'intérêt une variable aléatoire.

## LA RÉVÉLATION DE LA GAMME DES TAUX D'INTÉRÊT

$$P_t = \frac{C}{1 + R_1} + \frac{C}{(1 + R_2)^2} + \dots + \frac{C + 100}{(1 + R_n)^n} \quad (1)$$

$P_t$  : prix d'une obligation sans risque de défaut à l'instant  $t$

$t^R j$  : taux d'intérêt pur pour l'échéance  $j$

$C$  : coupon

100 : valeur de remboursement (obligation "in fine").

Le problème de méthode le plus délicat pour mettre en œuvre à bon escient les taux d'intérêt est leur mise en évidence empirique. Il s'agit de concepts financiers qui ne correspondent pas à des réalités de marché directement appréhendables. L'analyste obligataire ne dispose que des prix de titres observés sur le marché.

Une première tentative peut consister à s'appuyer uniquement sur les titres à coupon zéro qui sont négociés sur quelques marchés internationaux. En effet, pour tous les titres à flux uniques, il est possible d'obtenir directement le taux d'intérêt pur à partir de sa valeur  $Z_t$  sur le marché en résolvant l'équation :

$$Z_t = \frac{100}{(1 + R_n)^n}$$

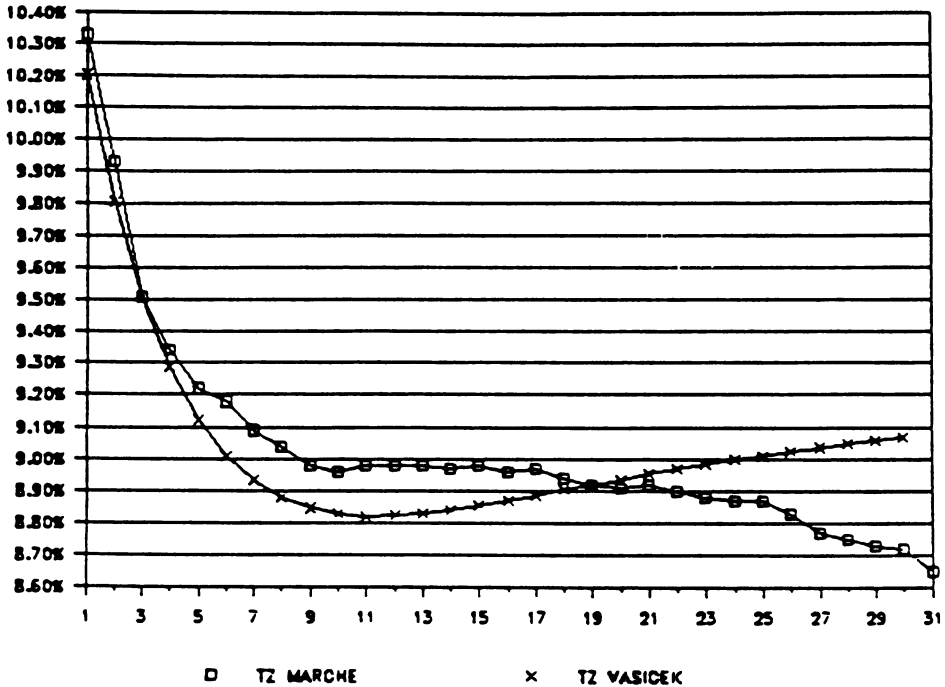
On ne privilégiera pas cette méthode pour les raisons suivantes :

– Elle suppose l'existence d'une gamme complète de titres à coupon zéro traités sur le marché et disponible sur l'ensemble des échéances. Ce n'est le cas que sur certains marchés obligataires, notamment aux Etats-Unis où les "Strips" sont nombreux et bénéficient d'un marché liquide. En France, le nombre de titres à coupon zéro s'est étoffé seulement depuis peu grâce au démembrement d'OAT.

– Elle fait l'hypothèse d'une confusion entre les marchés des titres à coupon zéro et celui des obligations couponnées traditionnelles. Or, il peut exister des effets de clientèle qui se manifestent par une déconnexion entre les deux compartiments du marché obligataire. Une première cause peut être le traitement fiscal plus avantageux des plus-values qui ferait bénéficier les coupons zéros d'une demande fiscale spécifique de la part d'investisseurs particuliers ou institutionnels. Même s'il y a harmonisation fiscale, un effet clientèle peut exister en raison de la présence d'investisseurs plus spéculatifs sur ce compartiment du marché. Ceux qui anticipent en avance des autres une baisse(hausse) des taux vont avoir tendance à privilégier les instruments à forte(faible) sensibilité, ce qui conduira les zéro-coupons à être en décalage anticipatif par rapport au reste des titres obligataires. Cet effet clientèle se vérifie lorsque l'on compare les taux purs implicites au marché des coupons

## LA RÉVÉLATION DE LA GAMME DES TAUX D'INTÉRÊT

zéros et les taux purs estimés à partir d'obligations à coupons classiques. En général, les taux zéro-coupon à long terme sont inférieurs aux taux prévalant sur le marché obligataire. Cette situation est l'indication d'une demande spécifique d'investisseurs à long terme qui renchérit, toutes choses égales par ailleurs, le prix des coupons zéros.



**Graphique 1 - TAUX DE MARCHÉ, TAUX THÉORIQUES**

*Gamme des taux d'intérêt et coupons zéros*

*(X : estimation à partir du marché obligataire à l'aide du modèle de Vasicek,*

*□ : estimation à partir des coupons zéros).*

Source : CCF mars 1994

– De toute manière, la méthode coupon zéro, comme toute autre, suppose un ajustement pour obtenir une fonction d'actualisation continue. En effet, disposer d'une dizaine de points ne suffit pas. Il faut pouvoir valoriser un flux quelconque à sa date d'occurrence. Le recours à un modèle d'ajustement est donc indispensable.

L'objet de cette étude est de comparer les méthodes de mise en évidence empirique de la structure par terme des taux d'intérêt fondées sur l'ajustement de données actuarielles disponibles sur le marché. La caractéristique de ces méthodes est de partir d'une variable dont le contenu financier est faible – le taux de rendement actuariel – pour aboutir à la gamme des  ${}_tR_n$  et à la reconstruction des prix obligataires. D'autres méthodes concurrentes existent dont on ne fera ici que mentionner l'existence :

- la révélation directe de fonctions d'actualisation à partir d'échantillons de prix obligataires (cf., par exemple, Vasicek et Fong [1982] ou Chambers, Carleton et Waldman [1984]).
- la modélisation de la structure par terme, à l'aide de processus stochastiques qui présentent l'avantage d'intégrer une dynamique dans la gamme des taux, par exemple, Vasicek [1978] ou Brennan et Schwartz [1982].

Ces deux types de méthodes sont cependant lourdes à manipuler, dépendantes de choix méthodologiques arbitraires et plutôt moins efficaces dans la restitution des prix obligataires (cf. La Bruslerie et Gelluseau [1987] pour une comparaison empirique).

On présentera successivement trois méthodes d'ajustement actuariel (deuxième partie) et les résultats d'une application empirique sur sept grands marchés obligataires internationaux au cours de la période 1991-1993 (troisième partie).

## II Les modèles d'ajustement actuariel de prix obligataires

Trois méthodes sont candidates pour expliquer les prix d'un ensemble homogène d'obligations. Il s'agit :

- de la courbe des taux de rendement à l'échéance ("*yield to maturity*"),
- de la courbe des taux de rendement à parité ("*par yield curve*"), aussi appelée méthode de proche en proche,
- de la courbe des taux de rendement à la durée ("*yield to duration curve*").

## II/1 – la courbe des taux de rendement à l'échéance (YMaturité)

Celle-ci vise à ajuster un ensemble d'observations dans le plan maturité-rendement actuariel. La spécification de formes fonctionnelles est nécessaire car on sait que ces courbes peuvent prendre des formes ascendantes, descendantes, plates ou bossues. Trois formes fonctionnelles seront envisagées dans les tests empiriques :

$$\log(1 + y_i) = a_0 + a_1 \cdot m_i + a_2(1/m_i) \quad (2)$$

$$\log(1 + y_i) = a_0 + a_1 \cdot \log(m_i) \quad (3)$$

$$y_i = a_0 + a_1 \cdot \log(m_i) + a_2 \cdot (1/m_i) \quad (4)$$

$y_i, m_i$  : rendement et maturité de l'obligation  $i$

La première forme fonctionnelle est exponentielle ; elle correspond au modèle de Echols et Elliot [1976]. La seconde est une fonction puissance. La troisième forme est une combinaison de fonctions logarithme et inverse.

Ces modélisations seront chacune estimées sur un échantillon homogène de titres d'Etat négociés sur sept marchés obligataires mondiaux. Une procédure de filtre est utilisée pour éliminer les titres qui présentent des rendements anormalement forts ou faibles. De même, sont écartés les coupons "hors marché" supérieurs ou inférieurs de 4 % aux taux de rendement actuariels, ainsi que les coupons zéro.

L'estimation est effectuée en divisant le spectre des maturités en 14 segments articulés de la manière suivante :

- 10 segments annuels de (0-1 an) à (9-10 ans),
- 4 segments couvrant les échéances (10-15 ans), (15-20 ans), (20-25 ans) et (25-30 ans).

On calcule pour chaque segment le point moyen correspondant aux obligations présentes. Ce point est défini comme la moyenne arithmétique des maturités et des rendements actuariels. Le regroupement autour de points moyens vise à éviter la concentration de données sur certaines échéances qui seraient surpondérées dans un ajustement global. Il s'agit d'obtenir une représentation de la gamme des taux sur l'ensemble des maturités. Sur de nombreux marchés, les segments de 5 à 10 ans sont très représentés par des titres liquides. Ce n'est pas toujours le cas pour les échéances à plus long ou à plus court terme. Ce regroupement permet d'obtenir jusqu'à 14 points moyens, en pratique moins dans la mesure où l'absence de titres conduit à négliger certains segments. Par ailleurs, pour assurer un lien systématique avec le marché monétaire, on a ajouté

à l'ensemble des points moyens obligataires les taux monétaires à 3 et à 6 mois disponibles sur l'euro-marché. Ce qui conduit à une série maximale de 16 points moyens.

Chaque estimation des fonctions (2), (3) et (4) par régression des moindres carrés est ensuite reprise afin de restituer la valeur de chacune des obligations de l'échantillon de départ. Pour cela, la méthode *Y* Maturité fait l'hypothèse que la gamme des taux d'intérêt se confond avec la courbe ajustée des taux de rendement. En connaissant la date de tombée des flux de coupon et du principal, on obtient en remplaçant  $m$  dans les équations (2) à (4) une estimation du taux d'intérêt  ${}_tR_m$ . Le prix restitué de l'obligation  $i$  est le suivant :

$$P_i + z.C = \sum_m \frac{C_i}{(1 + {}_tR_m)^{m+z}} + \frac{C_i + 100}{(1 + {}_tR_m)^{M+z}}$$

$z$  : fraction de coupon couru à la date d'évaluation ( $0 < z < 1$ )

$M$  : échéance finale

Le prix estimé est ensuite comparé au prix de marché pour mettre en évidence des écarts de restitution,  $\varepsilon_i$ , entre le prix restitué  $P_i$ , et le prix observé  $P_i^{obs}$ .

### Appréciation du modèle

La qualité de la méthode doit s'apprécier par rapport à sa capacité à rendre compte de la seule réalité de marché observable, à savoir les prix obligataires. On fera référence à différents critères permettant de juger la pertinence empirique du modèle (La Bruslerie et Gellusseau [1987]) :

- $E_t = 1/n \cdot \sigma \varepsilon_t$ , est la moyenne des écarts de restitution calculés à la date  $t$ . On s'attend à ce que le biais moyen tende le plus possible vers zéro.

- $RMSE_t = (1/n) \cdot \Sigma \varepsilon_i^2)^{1/2}$ , est la racine carrée de la moyenne des carrés des écarts ("Root Mean Squared Errors"). Cette valeur mesure la dispersion des écarts autour de zéro. On souhaite que  $RMSE$  soit le plus faible possible. Par exemple, une valeur de 1 signifie que les prix obligataires sont globalement restitués autour de leur valeur de marché dans une bande de  $+/- 1\%$ .

- L'homoscédasticité des écarts doit aussi être vérifiée. Le modèle testé est censé prendre en compte la structure complète des cash-flows des titres. Il intègre de manière indirecte la taille des coupons et la maturité de chaque obligation. On doit s'attendre à ce que les écarts soient indépendants du coupon et de la maturité des titres. Les deux régressions suivantes testeront cette indépendance :

$$\varepsilon_i = b_0 + b_1.C_i \tag{5}$$



$$\varepsilon_i = b0' + b1'.M_i \quad (6)$$

On vérifiera que les variables  $b1$  et  $b1'$  ne sont pas significativement différentes de zéro, la valeur du  $t$ -Student associé devant être inférieure à 1.96 pour un seuil de 5%.

La forme fonctionnelle retenue sera le modèle dont la moyenne des écarts de restitution des prix,  $E_i$ , est la plus faible.

### Limite

La méthode YMaturité part d'un outil d'analyse critiquable dans la mesure où la courbe de rendement actuariel ne peut prétendre être une estimation théoriquement pertinente de la structure par terme des taux d'intérêt (il n'y a pas unicité du taux actuariel pour une maturité donnée). Par le biais d'une procédure itérative, on a réintroduit un objectif d'optimisation des prix obligataires restitués qui centre la méthode sur les prix de marché, et non sur les taux de rendement actuariel.

## II/2 – La courbe des taux de rendement à parité (YParité)

Cette méthode – aussi appelée méthode de proche en proche – vise à répondre aux déficiences théoriques de la précédente en intégrant explicitement l'existence d'un effet coupon dans le taux de rendement actuariel d'un titre obligataire. Celui-ci est pris en compte sous la forme d'une variable supplémentaire dans les formes fonctionnelles retenues par la courbe de rendement à l'échéance :

$$\log(1 + y_i) = a0 + a1.m_i + a2(1/m_i) + a3.\log(1 + c_i) \quad (7)$$

$$\log(1 + y_i) = a0 + a1.\log(m_i) + a3.\log(1 + c_i) \quad (8)$$

$$y_i = a0 + a1.\log(m_i) + a2.(1/m_i) + a3.c_i \quad (9)$$

$y_i, m_i, c_i$  : rendement, maturité et coupon de l'obligation  $i$

L'ajustement est effectué pour chacun des modèles (7) à (9) en reprenant des échantillons de titres identiques à ceux utilisés précédemment. Ces échantillons sont regroupés en, au maximum, 14 points moyens par tranches de maturité dans les mêmes conditions que précédemment, auxquels s'ajoutent des observations de taux monétaires.

## LA RÉVÉLATION DE LA GAMME DES TAUX D'INTÉRÊT

La restitution des prix obligataires s'effectue en privilégiant une courbe d'ajustement par rapport à l'infinité que l'on peut construire à l'aide des modèles (7) à (9). La variable  $c$  doit, en effet, être spécifiée pour justifier le passage d'une courbe de taux de rendement à la structure des taux d'intérêt purs. Parmi la famille des courbes décrites par  $c$ , on retiendra la courbe des taux de rendement à parité. Celle-ci se définit comme étant le lieu des rendements actuariels des titres évalués au pair, c'est-à-dire à 100 %. Par définition, un titre dont le coupon est égal au taux actuariel vaut le pair. Il suffit, dès lors, de remplacer dans les modèles  $c_i$  par  $y_i$ . Cela conduit à résoudre une équation en  $y_i$  pour obtenir le rendement actuariel au pair inconnu pour une maturité donnée. Les équations des courbes de rendement à parité sont les suivantes :

$$\log(1 + y_i^P) = \frac{a_0 + a_1 \cdot m_i + a_2(1/m_i)}{(1 - a_3)} \quad (7')$$

$$\log(1 + y_i^P) = \frac{a_0 + a_1 \cdot \log(m_i)}{(1 - a_2)} \quad (8')$$

$$y_i^P = \frac{a_0 + a_1 \cdot \log(m_i) + a_2 \cdot (1/m_i)}{(1 - a_3)} \quad (9')$$

Le passage aux taux d'intérêt se déduit de proche en proche en posant différentes valeurs de  $m$  dans les relations (7') à (9'). En fixant  $m$ , on obtient les taux de coupon des titres valant le pair dans le marché. En reportant ce taux de coupon dans l'équation fondamentale d'évaluation (1), on en dérive successivement les taux d'intérêt purs. Par exemple, en supposant que (7') donne un coupon de 8 % pour  $m = 1$ , on tire de manière évidente que  ${}_tR_1$  est égal à 8 %.

$$100\% = \frac{100\% + 8\%}{(1 + {}_tR_1)}$$

En supposant que (7') donne un coupon de 10 % pour  $m = 2$ , on réutilise le résultat précédent pour résoudre l'équation :

$$100\% = \frac{10\%}{(1 + 8\%)} + \frac{100\% + 10\%}{(1 + {}_tR_2)^2}$$

D'où  ${}_tR_2 = 10.10\%$ . Et ainsi de suite de proche en proche, pour obtenir les trois estimations de la gamme des taux liées aux modèles (7') à (9'). Celles-ci sont réutilisées pour restituer les prix des obligations des échantillons de départ. La qualité de la restitution des prix par rapport

aux cours observés sur le marché permet de déterminer le meilleur modèle au sens de la minimisation du biais moyen  $E_t$ .

### II/3 – La courbe des taux de rendement à la duration (YDuration)

La duration est un outil synthétique qui mesure l'essence de la dimension temporelle d'un actif financier. L'idée est très tôt apparue de construire la courbe de taux de rendement, non par rapport à la maturité, mais par rapport à la duration des obligations. Macaulay (1938), d'une part, Hopewell et Kaufman (1973), d'autre part, recommandent de procéder ainsi<sup>2</sup>. L'explication est que la duration d'un titre permet de prendre en compte l'effet coupon qui affecte le rendement actuariel. L'analogie – et non le raisonnement – qui justifie la construction de courbe de rendement à la duration est simple : une obligation couponnée de maturité  $M$  et de duration  $D$  a même duration qu'un titre pur et coupon zéro de maturité  $D$ . On peut ainsi dériver une approximation de la structure par terme des taux purs à partir de la courbe des rendements à la duration.

Les formes fonctionnelles envisagées pour l'ajustement sont les mêmes que dans la méthode précédente, à la différence près que la valeur de duration,  $d_i$ , remplace celle de la maturité,  $m_i$ . La méthode YDuration est appliquée aux mêmes échantillons d'obligations d'Etat.

$$\log(1 + y_i) = a_0 + a_1 \cdot d_i + a_2(1/d_i) \quad (10)$$

$$\log(1 + y_i) = a_0 + a_1 \cdot \log(d_i) \quad (11)$$

$$y_i = a_0 + a_1 \cdot \log(d_i) + a_2 \cdot (1/d_i) \quad (12)$$

Un regroupement par points-moyens est aussi retenu pour éviter la concentration d'observations sur certains segments de duration, notamment à court terme. Il est effectué un découpage en classes d'une demi-année de duration, de (0-0.5 an) à (9.5-10 ans), ce qui fait 20 points moyens. Cela se justifie par le fait qu'il est rare de voir la duration des titres couponnés dépasser 10. On a prolongé ce découpage par 10 classes couvrant les durations de 10 à 30 ans, par tranches de deux ans : (10-12 ans) jusqu'à (28-30 ans)<sup>3</sup>. Le regroupement en points moyens s'effectue

2. Cf. Livingston et Caks (1977).

3. Des tests exploratoires ont été menés en incluant les coupons zéro dans l'échantillon, de manière à disposer d'observations dans la partie longue des durations, cela en raison de la présence de titres qui ont, sur certains marchés, jusqu'à 30 ans d'échéance. Les résultats étaient plutôt de moindre qualité que ceux obtenus à partir d'un échantillon restreint des titres couponnés.

par simple moyenne à l'intérieur de chaque classe. On y ajoute des observations issues des marchés monétaires à 3 et 6 mois, qui sont pondérées par 3. Le nombre de points entrant dans l'ajustement est donc au maximum de 36.

Chacune des trois estimations des modèles est ensuite utilisée pour restituer les prix de l'échantillon de titres de départ dans les mêmes conditions que précédemment, les critères d'analyse utilisés pour juger la pertinence empirique de la méthode étant les mêmes.

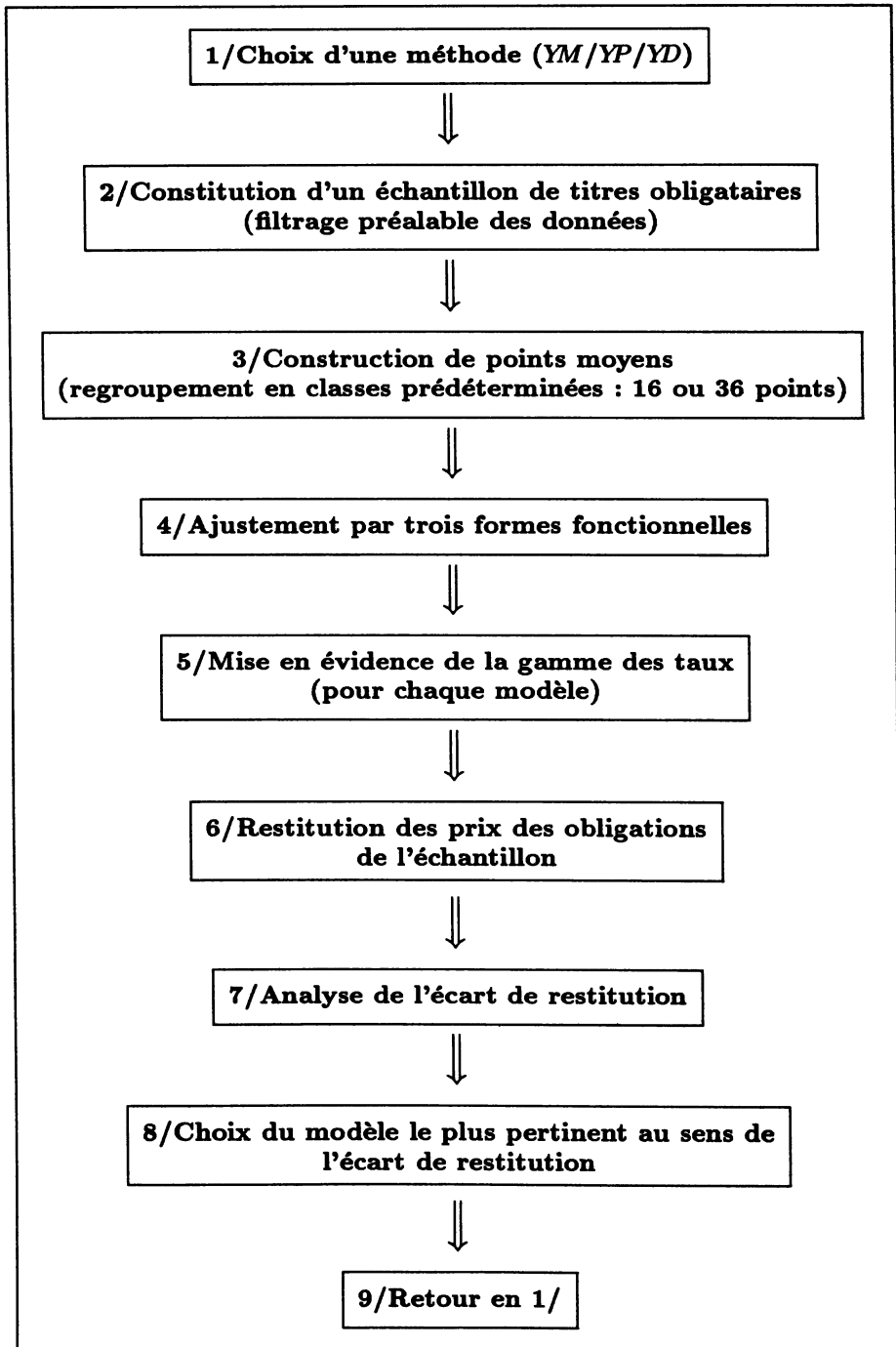
La méthode YDuration présente une faiblesse théorique importante. On a signalé plus haut qu'elle était fondée sur l'analogie critiquable entre duration d'une obligation couponnée et maturité d'un zéro-coupon. On peut montrer que l'assimilation de la structure par terme des taux purs à la courbe de rendement à la duration peut aboutir à des situations incohérentes : deux titres de même duration peuvent avoir à l'équilibre deux rendements actuariels différents, ce qui est incompatible avec l'idée d'une valorisation unique par le marché. Ce résultat important a été démontré dès 1977 par Livingstone et Caks, et a été souligné par Jacquillat et Dumas [1985].

### III Etude empirique sur sept marchés obligataires

La démarche suivie est itérative ; elle suit une procédure en neuf étapes décrites page suivante, qui est appliquée pour chacune des trois méthodes dans la deuxième partie.

Cette démarche est mise en œuvre sur sept marchés obligataires de titres d'Etat libellés en franc français, en dollar américain, en dollar canadien, en deutsche mark, en livre sterling et en yen. Ces titres sont des obligations standard, en général remboursables à l'échéance et ne présentant pas de clause de remboursement optionnel au gré de l'émetteur. Le test empirique est effectué au cours de la période décembre 1991-novembre 1993. Les données sont constituées des cours de fin de journées du lundi, collectés à intervalle hebdomadaire, soit un total de 103 coupes instantanées. Les données proviennent de la base de données obligataires internationales de la B.A.I.I. Le nombre de titres présents à chaque coupe instantanée varie selon les disponibilités de la base de données.

## LA RÉVÉLATION DE LA GAMME DES TAUX D'INTÉRÊT



## LA RÉVÉLATION DE LA GAMME DES TAUX D'INTÉRÊT

Le **tableau 1** donne, pour chaque devise et pour chaque méthode, le nombre moyen de titres entrant dans l'échantillon de travail. Le nombre total de prix obligataires considérés dans l'étude est de 43 114 (*YM* et *YP*) ou 55 126 (*YD*) selon la méthode appliquée.

<b>Echantillon</b>	<b>Y Maturité/Y Parité</b>	<b>Y Duration</b>
Dollar US	127.24	126.44
DM	87.44	87.44
Livre sterling	34.28	33.33
Dollar canadien	51.31	51.34
Yen	83.36	83.36
Franc français	23.21	22.21
Dollar australien	11.74	11.74

**Tableau 1**— Nombre moyen d'obligations présentes dans l'échantillon (103 périodes hebdomadaires – déc. 91 / nov. 93)

Le **tableau 2** renseigne sur le nombre de points-segments utilisés en moyenne dans l'ajustement des trois formes fonctionnelles.

<b>Echantillon</b>	<b>Y Maturité</b>	<b>Y Parité</b>	<b>Y Duration</b>
Dollar US	14.99	14.99	25.44
DM	11.97	11.97	19.67
Livre sterling	13.73	13.73	23.45
Dollar canadien	14.87	14.87	24.25
Yen	12.81	12.81	21.49
Franc français	13.79	13.42	19.31
Dollar australien	10.58	10.58	14.43

**Tableau 2**— Nombre moyen de points utilisés dans l'élaboration des modèles d'ajustement actuariel

LA RÉVÉLATION DE LA GAMME DES TAUX D'INTÉRÊT

Le **tableau 3** présente les valeurs moyennes pour chaque critère d'appréciation  $E_t$  et  $RMSE_t$ . Ces moyennes étant calculées sur la base des résultats obtenus lors de chacune des 103 périodes d'estimation pour chaque devise.

Echantillon	YMaturité		YParité		YDuration	
	E	RMSE	E	RSME	E	RMSE
Dollar US	-0.88	2.60	-0.16	3.34	-0.77	1.46
DM	0.22	0.98	-0.06	0.91	0.08	0.76
Livre sterling	-0.97	2.75	-1.02	3.04	-1.10	1.73
Dollar canadien	-0.84	2.62	-0.24	2.37	-1.33	1.88
Yen	-0.13	2.15	-0.48	1.86	-0.57	1.03
Franc français	-0.03	2.63	-0.47	1.28	0.27	0.69
Dollar australien	-2.14	2.57	-1.32	2.28	-0.62	1.01

**Tableau 3**— Performance moyenne de restitution des prix obligataires  
(E et RMSE : moyenne sur 103 périodes des  $E_t$  et  $RMSE_t$ )

L'appréciation des résultats doit s'effectuer à la fois en terme de biais moyen et de dispersion des valeurs restituées autour des prix de marché. Les résultats apparaissent nets en ce qui concerne la méthode des courbes de rendement à l'échéance (YMaturité) : celle-ci est largement dominée par les deux autres. Conceptuellement la plus sujette à caution en raison de la non-prise en compte de l'effet coupon, il est normal qu'elle soit la moins performante au plan empirique. L'analyse est plus contrastée en ce qui concerne les méthodes du rendement à parité (YParité) et du rendement à la duration (YDuration). Cette dernière domine nettement la première en terme de  $RMSE$  qui sont compris de 0.5 à 1.8.(contre 2.15 en moyenne pour YParité). Les biais moyens sont globalement semblables et généralement négatifs. Dans un cas, pour le Deutsche Mark, il y a quasi-égalité de performance. La méthode YDuration domine nettement pour les marchés en livre sterling, en yen, en franc français et en dollar australien. En revanche, la méthode YParité présente un biais moyen quasi nul accompagné d'un  $RMSE$  très élevé pour le dollar US, contre un fort biais négatif et un  $RMSE$  inférieur de moitié pour YDuration.

Les biais moyens négatifs dans certaines devises peuvent s'expliquer par la forme souvent concave croissante des structures par terme des taux. La méthode des points moyens revient à se situer sur la corde de la courbe. En présence de courbes croissantes, l'estimation des taux est donc minorée, celle des coefficients d'évaluation majorée. Les écarts de restitution de prix tendent donc à être négatifs en dollar et en livre sterling qui ont eu des courbes plutôt croissantes sur la période. A contrario, les courbes en franc français qui ont eu des formes parfois

LA RÉVÉLATION DE LA GAMME DES TAUX D'INTÉRÊT

inversées au cours des années 1992-1993 montrent un biais moyen plutôt positif pour des raisons inverses. Les annexes 1 et 2 présentent sous forme de graphiques, les séries de biais moyens pour chaque période d'estimation. On remarque une plus grande stabilité dans le temps des résultats de la méthode YDuration par rapport à ceux de la méthode YParité.

L'analyse de l'hétéroscédasticité révèle des résultats moins favorables. On a dénombré pour chaque échantillon le nombre de fois où une relation significative apparaissait entre les écarts de restitution de prix, d'une part, et le coupon ou la maturité des titres, d'autre part. Le **tableau 4** donne le nombre total de coefficients  $b_1$  positifs et négatifs dans les régressions (5) sur un total théorique de 103. Le **tableau 5** fait de même pour les coefficients  $b_1'$  de la régression sur la maturité (équation 6).

Rég. sur coupon Echantillon	YMaturité		YParité		YDuration	
	$b_1 > 0$	$b_1 < 0$	$b_1 > 0$	$b_1 < 0$	$b_1 > 0$	$b_1 < 0$
Dollar US	78	25	53	13	0	36
DM	24	55	20	58	103	0
Livre sterling	46	24	45	25	53	0
Dollar canadien	41	0	66	0	17	0
Yen	1	69	0	94	0	56
Français	0	43	0	67	30	0
Dollar australien	0	4	0	5	0	8

**Tableau 4**— Nombre de relations significatives entre les écarts de prix et le coupon des titres (au seuil de 5% ; sur un total de 103 régressions par échantillon)

Rég. sur coupon Echantillon	YMaturité		YParité		YDuration	
	$b_1' > 0$	$b_1' < 0$	$b_1' > 0$	$b_1' < 0$	$b_1' > 0$	$b_1' < 0$
Dollar US	36	39	8	47	0	36
DM	21	44	25	44	98	0
Livre sterling	32	3	6	10	0	46
Dollar canadien	7	38	15	7	0	103
Yen	62	3	50	29	44	54
Franc français	87	0	57	2	31	40
Dollar australien	70	3	82	0	0	94

**Tableau 5**— Nombre de relations significatives entre les écarts de prix et la maturité des titres (au seuil de 5% ; sur un total de 103 régressions par échantillon)

Dans l'ensemble, les résultats précédents mettent en évidence un nombre important de relations significatives montrant la présence d'une certaine hétéroscédasticité dans les écarts de restitution de prix. Celle-ci ne



provient pas directement d'une erreur de spécification des modèles puisque ceux-ci tendent à ajuster les rendements actuariels et non les prix obligataires. On sait en effet que la relation entre les rendements et les prix n'est pas linéaire. Il faut de plus remarquer que le signe des relations n'est pas unanime : il établit une relation positive à certaines périodes et négatives à d'autres. La méthode YDuration semble dominer les autres, et plus particulièrement la méthode YParité, dans la mesure où elle correspond à un nombre moins élevé de coefficients significatifs dans la relation avec le coupon (303 coefficients significatifs contre 445). On notera toutefois la relation systématiquement positive des écarts de restitution en DM avec le coupon.

Dans le **tableau 5**, en revanche, le nombre de relations significatives est de 382 (243 + 139) pour la méthode YParité contre 613 (173 + 440) pour la méthode YDuration. Cette dernière tend à induire un lien négatif entre écart de restitution et maturité des titres (particulièrement en dollar US et en dollar canadien).

Les problèmes d'hétéroscédasticité demeurent importants. Le biais négatif en présence de structure croissante des taux trouve aussi une explication à ce niveau puisque l'analyse en terme de duration aboutit à une translation de la courbe sur la gauche par rapport à la maturité. Les coefficients d'évaluation utilisés pour les flux correspondant aux dates les plus éloignées sont donc majorés, ce qui conduit à des écarts de restitution négatifs croissant avec la maturité, d'où le lien négatif mentionné plus haut. A ce niveau, la méthode du rendement à parité présente un avantage en situation de courbe des taux croissante, avantage que l'on retrouve au niveau des résultats du **tableau 5**.

## IV CONCLUSION

Les résultats comparatifs des méthodes d'évaluation obligataires à partir des rendements actuariels sont globalement satisfaisants en ce qui concerne la capacité de celles-ci à restituer les prix obligataires. Si l'on compare les écarts obtenus ici avec ceux d'autres méthodes, on remarquera que leur performance est comparable, voire plutôt meilleure, que celle issue des méthodes analytiques – cf La Bruslerie et Gelluseau (1987) ou des méthodes stochastiques – cf Jacquillat et Dumas (1985)<sup>4</sup>. Obtenir un écart moyen faible et des *RMSE* de l'ordre de 1.5 doit être considéré comme correct, s'agissant de méthodes plutôt simples appliquées à des échantillons de taille plus importante que ceux utilisés dans des études comparables. L'inconvénient des résultats obtenus est qu'ils ne permettent pas de discriminer sans appel entre la méthode de rendement à parité, intellectuellement meilleure, et celle de rendement à la durée. La méthode de rendement à parité semble empiriquement dominée dans une majorité de cas. Il faut reconnaître que la méthode de rendement à la durée, même si elle est intellectuellement contestable, apparaît empiriquement plus pertinente dans de nombreux cas. D'une manière générale, on soulignera la cohérence interne limitée de ces méthodes en terme d'indépendance des écarts de restitution des prix obligataires.

Les résultats obtenus permettent de caractériser un équilibre de marché obligataire. Il importe de préciser qu'il s'agit d'une démarche par définition statique et descriptive, mais que son contenu prospectif reste soumis à l'utilisation d'un appareil d'interprétation théorique adéquat.

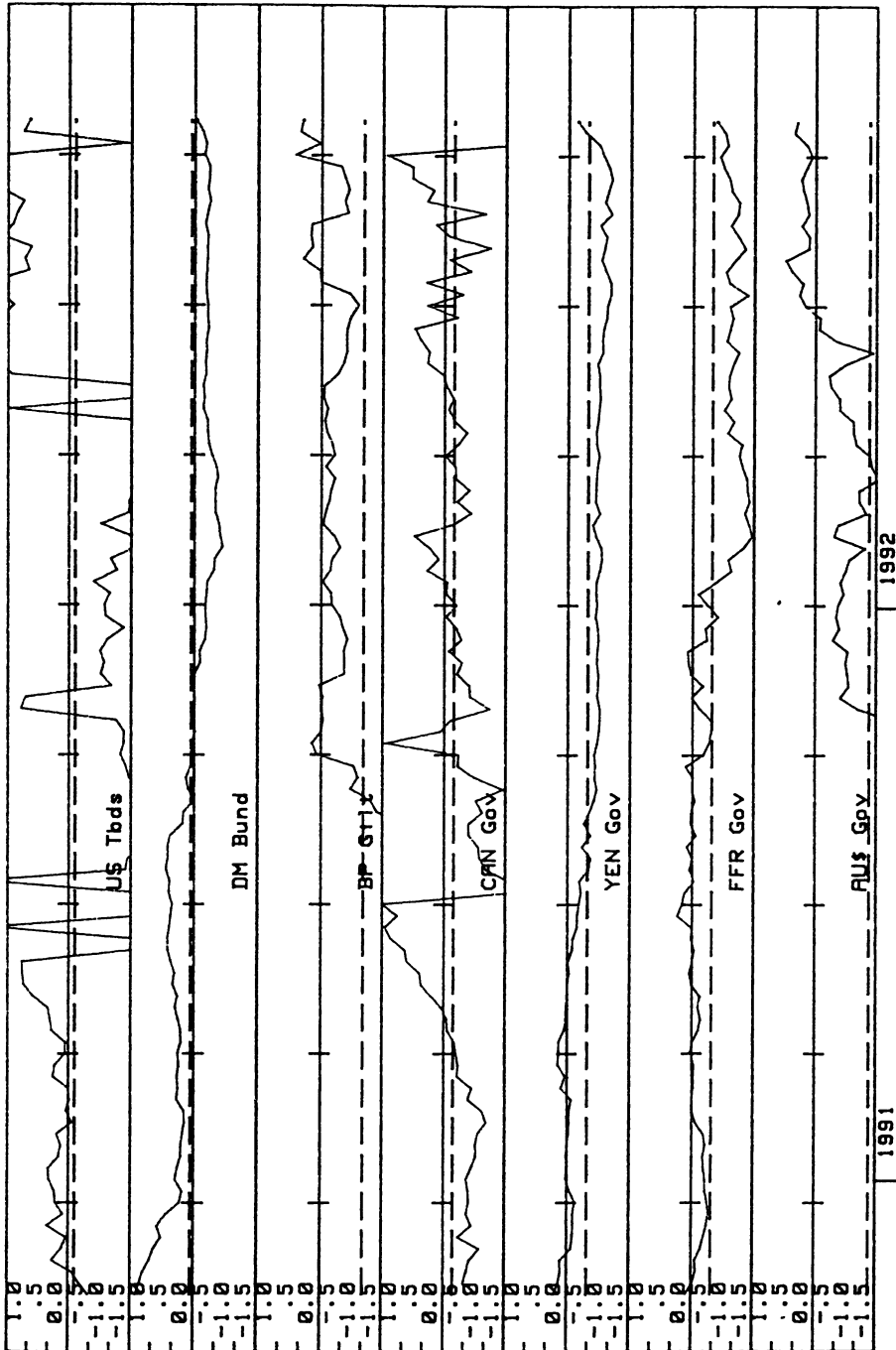
---

4. Concernant les méthodes analytiques fondées sur l'utilisation de fonctions d'actualisation appliquées à des échantillons d'obligation du Trésor américain, La Bruslerie et Gelluseau (1987) aboutissent à des valeurs de *RMSE* de l'ordre de 1.5 à 2. Artus, Belhomme, Elalouf et Minczelles (1992) ont appliqué une méthode analytique d'estimation des taux purs au marché français. Ils reconnaissent l'existence d'un biais non nul dans la restitution des taux d'intérêt égal, en moyenne à 0,11 % pour les taux à 1 an, ce qui n'est pas négligeable (le *RMSE* n'est pas mentionné). Pour leur part, Brennan et Schwartz (1982), en utilisant un modèle stochastique à deux variables d'état, aboutissent à un *RMSE* de 1.58 pour 11 669 observations.

BIBLIOGRAPHIE

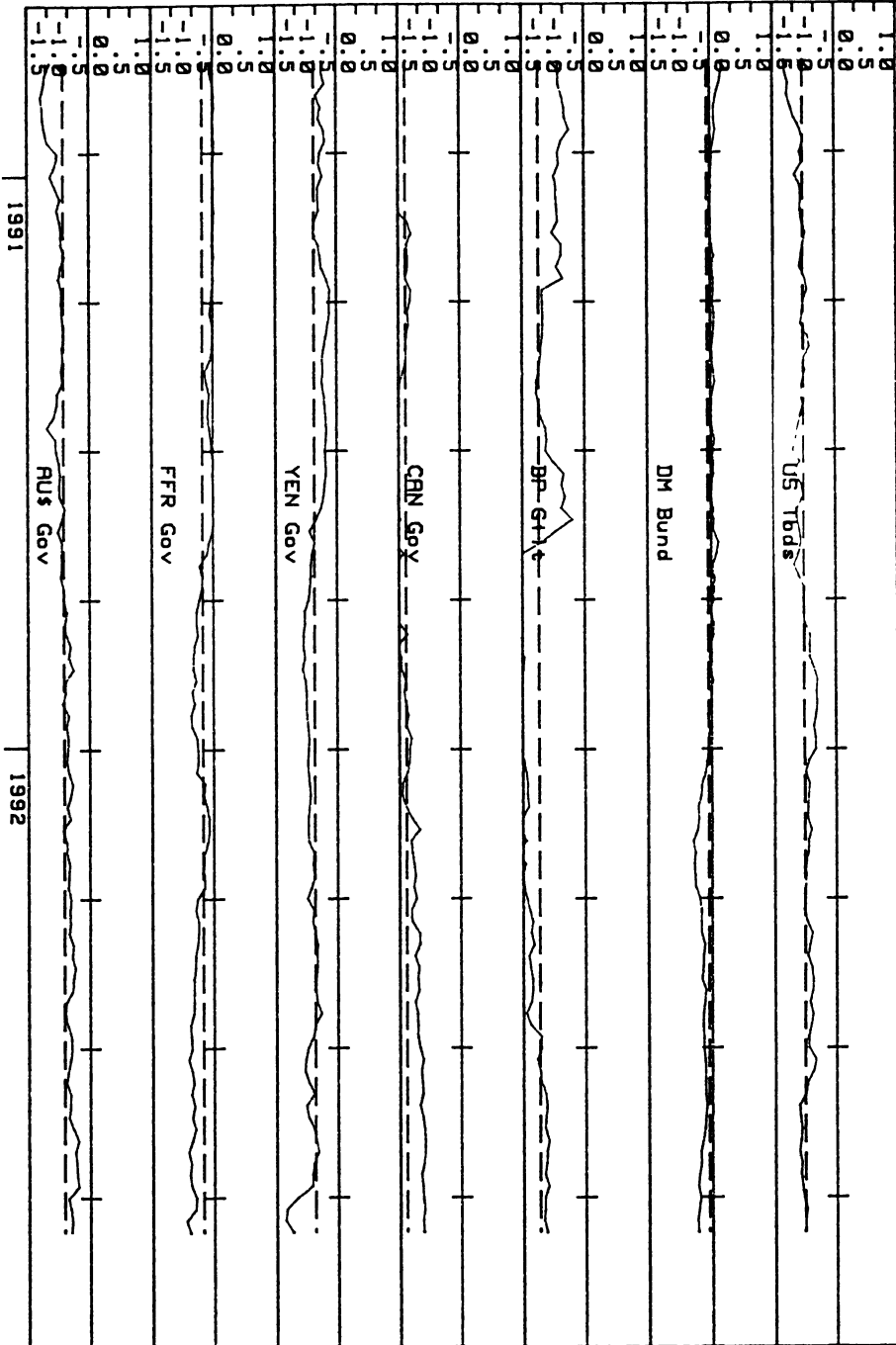
- ARTUS P., BELHOMME C., ELALOUF C., MINCZELES A. (1992) "Les déformations de la structure des taux et la couverture du risque de taux d'intérêt", *Caisse des Dépôts*, doc. de travail n° 1992/01.
- BRENNAN M., SCHWARTZ E. (mars 1982) "An Equilibrium Model of Bond Pricing and a Test of Market Efficiency", *Journal of Financial and Quantitative Analysis*.
- CAKS J. (mars 1977) "The coupon effect on Yield to Maturity", *Journal of Finance*.
- CHAMBERS D., CARLETON W., WALDMAN D. (septembre 1984) "A new Approach to Estimation of the Term Structure of Interest Rate", *Journal of Financial and Quantitative Analysis*.
- DE CLERMONT-TONNERRE A., LEVY M. (1992) *Les obligations à coupon zéro*, Economica, Paris.
- DUMAS B., JACQUILLAT B. (1985) "Panorama des méthodes d'évaluation des obligations", *Analyse Financière*, 4<sup>e</sup> trimestre, pp 9-16.
- ECHOLS M., ELLIOTT J. (mars 1976) "A Quantitative Yield Curve Model for Estimating the Term Structure of Interest Rates", *Journal of Financial and Quantitative Analysis*.
- DE LA BRUSLERIE H., GELLUSSEAU L. (1987) "La mise en évidence empirique de la structure à terme des taux d'intérêt", *Finance*, vol. 8 n° 1, pp 55-74.
- LEVY M. (mars 1994) "Mathématiques appliquées aux produits financiers", *CCF*, doc. interne.
- LIVINGSTON M., CAKS J. (mars 1977) "A Duration Fallacy", *Journal of Finance*.
- VASICEK O., FONG H. (mai 1982) "Term Structure Modeling using Exponential Splines", *Journal of Finance*.

LA RÉVÉLATION DE LA GAMME DES TAUX D'INTÉRÊT



ANNEXE 1 – Average restitution error - in % of price  
 (yield to parity method / from 2 décembre 1991 to 15 novembre 1993)

LA RÉVÉLATION DE LA GAMME DES TAUX D'INTÉRÊT



**ANNEXE 2** – Average restitution error - in % of price  
 (yield to duration method / from 2 décembre 1991 to 15 novembre 1993)