JOURNAL DE LA SOCIÉTÉ STATISTIQUE DE PARIS

FRANÇOIS LONGIN

La théorie des valeurs extrêmes : présentation et premières applications en finance

Journal de la société statistique de Paris, tome 136, nº 1 (1995), p. 77-97

<http://www.numdam.org/item?id=JSFS_1995__136_1_77_0>

LA THÉORIE DES VALEURS EXTRÊMES : PRÉSENTATION ET PREMIÈRES APPLICATIONS EN FINANCE

par François LONGIN[1]
Département de Finance
École Supérieure des Sciences Économiques et Commerciales

Résumé

Cet article présente la théorie des valeurs extrêmes et ses premières applications en finance. La théorie des valeurs extrêmes donne la loi asymptotique des termes maximum et minimum d'un processus aléatoire. En finance, ces valeurs appelées "booms" et "krachs" sont particulièrement importantes puisqu'elles sont associées au risque de défaut des investisseurs, au risque de faillite des institutions financières et au risque systémique. Les applications discutées dans l'article traitent du choix de la loi statistique des rentabilités des actifs financiers, du niveau optimal de marge sur les marchés à terme, du ratio minimum de capital requis pour les institutions financières et de l'utilisation d'options (coréennes) sur krachs boursiers en assurance de portefeuille.

Abstract

This paper presents extreme value theory and its first applications in finance. Extreme value theory states the asymptotic distribution of the maximum and minimum variables of a random process. In finance such values designated by "booms" and "crashes" are of particular importance since they are associated with default, bankruptcy and systemic risks. Applications discussed in the paper deal with the choice of the statistical distribution for assets returns, optimal margins in futures markets, minimal capital requirements for financial institutions and the use of (Korean) crash options in portfolio insurance.

---

1. Département de Finance, Groupe ESSEC, avenue Bernard Hirsch, BP 105, 95021 Cergy Pontoise Cedex, France. Nous tenons à remercier Georges Gallais Hamonno (l'éditeur), Gérard Charreaux, l'arbitre et un anonyme, pour leurs commentaires.

Introduction

Cet article présente la théorie des valeurs extrêmes qui permet d'étudier de façon quantitative les booms et krachs observés sur les marchés financiers. L'article passe aussi en revue les premières applications de cet outil statistique en finance.

Les booms et krachs boursiers sont parmi les phénomènes les plus surprenants de la finance. Ces événements, dont les répercussions concernent aussi bien les investisseurs individuels et les institutions que le système financier dans son ensemble, ne sont cependant pas très bien compris par les économistes. Quelques années après le krach boursier d'octobre 1987, le milieu académique et les professionnels se demandent encore ce qui a pu causer une chute du cours des actions de la Bourse de New York de vingt-cinq pour cent en quelques heures et la propagation de ce krach aux autres places financières internationales.

La profusion des bases de données financières et l'avènement de l'informatique ont rendu possible toutes sortes d'études sur les marchés financiers. La plupart des études empiriques et des modèles ne concernent cependant que les propriétés "moyennes" des actifs financiers comme la rentabilité anticipée, la variance ou encore la corrélation, et relativement peu d'attention a été portée aux mouvements extrêmes eux-mêmes. Ces événements sont pourtant d'une importance considérable puisqu'ils sont reliés au risque de défaut des investisseurs, au risque de faillite des institutions financières et au risque systémique défini par la propagation des difficultés d'une entité à l'ensemble des institutions.

La première partie de cet article présente la théorie probabiliste des valeurs extrêmes. Un mouvement extrême de prix d'un actif financier ou d'un indice de marché est défini comme la rentabilité la plus basse (ou minimale) et la rentabilité la plus haute (ou maximale) observée sur une période donnée. La théorie des valeurs extrêmes montre que la loi asymptotique des rentabilités minimale et maximale a une forme bien déterminée qui est largement indépendante du processus de rentabilités lui-même. Si la forme de la loi des extrêmes est identique, les paramètres de cette loi par contre varient selon le processus de rentabilités sous-jacent. La deuxième partie présente différentes méthodes statistiques pour l'estimation de la loi des extrêmes.

La troisième partie traite des premières applications de la théorie des valeurs extrêmes en finance. Ces applications se situent à deux niveaux : un niveau théorique (connaissance de la loi des extrêmes, quantification des booms et des krachs boursiers, mesure du risque et test de théories économiques) et un niveau pratique (choix de la loi des rentabilités journalières, fixation du niveau optimal de marge sur les marchés à terme, fixation du ratio minimum de capital requis pour les intermédiaires financiers et utilisation d'options coréennes sur krachs boursiers en assurance de portefeuille).

La conclusion analyse l'impact de la théorie des valeurs extrêmes en finance.

1. Théorie probabiliste des valeurs extrêmes

Dans cette partie, nous donnons un aperçu de la théorie probabiliste des valeurs extrêmes. Nous commençons par rappeler quelques résultats exacts concernant leur distribution (1.1). Puis, nous présentons le théorème des valeurs extrêmes qui est un théorème asymptotique (1.2). Finalement, nous rapportons des résultats avancés pour souligner le caractère général de ce théorème (1.3).

1.1. Résultats exacts

Nous supposons que le phénomène observé est aléatoire et peut être mesuré par une variable X. Dans nos études empiriques, le phénomène est simplement l'évolution du prix d'un actif financier ou d'un indice de marché, et la variable aléatoire X représente la rentabilité logarithmique. Nous appelons f_X la fonction de densité de probabilité et F_X la distribution (encore appelée fonction de répartition) de la variable aléatoire X. Le support de la densité de probabilité est noté $[l, u]$. Soient X_1, X_2, ... X_n des variables aléatoires qui mesurent le phénomène aux dates 1, 2, .. n. Les extrêmes sont définis comme les termes maximum et minimum des n variables X_1, X_2, ... X_n. Nous notons Y_n la rentabilité la plus haute (le maximum) et Z_n la rentabilité la plus basse (le minimum) observées sur n séances boursières. Dans la suite de l'exposé, nous présentons les résultats ne concernant que le maximum, puisque les résultats relatifs au minimum se déduisent directement des résultats du maximum en considérant la série opposée $-X_1$, $-X_2$, ... $-X_n$, d'après l'égalité (1) suivante :

$$(1) \quad Z_n(X) \equiv Min\ (\ X_1,\ X_2,\ ...\ X_n\ ) = -Max\ (\ -X_1,\ -X_2,\ ...\ -X_n) \equiv -Y_n(-X)$$

Si les variables X_1, X_2, ..., X_n sont statistiquement indépendantes et tirées de la même loi (hypothèses de la marche aléatoire), alors la distribution exacte du maximum Y_n est simplement donnée par la formule (2) :

$$(2) \qquad F_{Y_n}(x) = [F_X(x)]^n$$

Les propriétés statistiques de Y_n données par sa fonction de répartition, dépendent principalement des propriétés de F_X pour les grandes valeurs de x. Pour les autres valeurs de x, l'influence de $F_X(x)$ décroît rapidement avec n. L'information la plus importante à propos des extrêmes est donc contenue dans les queues de la loi de X. D'après la formule (2), nous pouvons conclure quant à la forme de la loi limite de Y_n en faisant tendre n vers l'infini. Nous trouvons que la fonction de répartition est nulle pour les valeurs de x inférieures à la borne supérieure u et égale à un pour les valeurs de x supérieures à u. La loi limite est donc dégénérée puisqu'elle se réduit à une masse de Dirac portée en u.

Les formules exactes de la loi du terme maximum et de la loi limite présentent toutefois un intérêt limité. En pratique, la loi de la variable parente X est rarement connue avec précision, et par conséquent il en est de même pour la loi du terme maximum. De plus, même si la loi de la variable parente X est connue avec exactitude, la loi du terme maximum Y_n n'est pas toujours facilement calculable. Par exemple, la distribution d'une variable normale ne possède pas d'expression analytique puisque c'est une intégrale incalculable. Sa puissance $n^{\text{ème}}$ est donc difficile à calculer et conduit à de sérieux problèmes numériques pour de grandes valeurs de n et pour de grandes valeurs de x. Pour ces raisons, nous sommes conduits à étudier le comportement asymptotique du terme maximum Y_n.

1.2. Le théorème des valeurs extrêmes

Tiàgo de Oliveira (1973) argumente que "as, in general, we deal with sufficiently large samples, it is natural and in general sufficient for practical uses to find limiting distributions for the maximum or the minimum conveniently reduced and use them". Pour trouver une distribution limite de quelque intérêt (c'est-à-dire non-dégénérée), nous devons transformer la variable aléatoire Y_n. La transformation la plus simple que l'on puisse imaginer est une opération de normalisation. La variable Y_n est ajustée avec un paramètre d'échelle α_n (supposé positif) et un paramètre de localisation β_n. Nous supposons l'existence d'une telle séquence de coefficients $(\alpha_n > 0,\ \beta_n)$[1]. Gnedenko (1943) fournit la version finale du théorème des valeurs extrêmes qui spécifie la forme de la loi limite F_Y quand la longueur de la période sur laquelle on observe les extrêmes croît indéfiniment. Ce théorème repose sur quatre hypothèses de base :

H1. Les variables $X_1, X_2, \dots X_n$ sont aléatoires.

H2. Les variables $X_1, X_2, \dots X_n$ sont statistiquement indépendantes.

H3. Les variables $X_1, X_2, \dots X_n$ sont tirées de la même loi.

H4. Il existe une séquence de coefficients $(\alpha_n > 0,\ \beta_n)$ telle que la loi limite de $(Y_n - \beta_n) / \alpha_n$ soit non-dégénérée.

La loi limite peut prendre trois formes possibles (Gnedenko 1943) :

– La loi de Gumbel (type I)

$$F_Y(y) = \exp(-e^{-y}) \qquad \text{pour } y \in \mathbb{R} \tag{3.1}$$

– La loi de Fréchet (type II)

$$F_Y(y) = \begin{cases} 0 & \text{pour } y \leq 0 \\ \exp(-y^{-k}) & \text{pour } y > 0 \ (k > 0) \end{cases} \tag{3.2}$$

– La loi de Weibull (type III)

$$F_Y(y) = \begin{cases} \exp\left(-(-y)^{-k}\right) & \text{pour } y < 0 \ (k < 0) \\ 1 & \text{pour } y \geq 0 \end{cases} \tag{3.3}$$

1. Cette hypothèse est courante en théorie des probabilités. Par exemple, le théorème central limite repose aussi sur l'existence de constantes de normalisation. Dans ce théorème, la variable étudiée est la somme de n variables aléatoires. La distribution limite de la somme normalisée est, soit la loi normale, soit une loi stable de Pareto. Les deux théorèmes ont en commun plus que leurs hypothèses. Sous certaines conditions, le coefficient α_n est le même (Galambos, 1978, pp. 232 238).

Jenkinson (1955) montre que ces trois lois peuvent être regroupées sous une forme générale :

(3) $$F_Y(y) = \exp\left[-(\tau\cdot y)^{\frac{1}{\tau}}\right] = \begin{cases}\text{pour } y > \tau^{-1} & si\ \tau < 0\\ \text{pour } y < \tau^{-1} & si\ \tau > 0\end{cases}$$

Le paramètre τ qui apparait dans la formule (3) est appelé l'indice de queue. C'est l'inverse au signe près du paramètre de forme k qui apparait dans les formules (3.2) et (3.3). L'indice de queue détermine complètement le type de loi limite : $\tau < 0$ correspond au type II, $\tau > 0$ au type III, et le cas intermédiaire $\tau = 0$ correspond à la loi de Gumbel (type I, $(1-\tau\cdot y)^{1/\tau}$ s'interprétant comme e^{y}). La loi de Gumbel peut être considérée comme une loi de transition entre la loi de Fréchet et la loi de Weibull.

Gnedenko (1943) donne des conditions nécessaires et suffisantes pour l'existence des constantes de normalisation. Quand la loi de la variable parente X est connue, ces conditions peuvent être utilisées pour déterminer le type de la loi limite. Les lois à support borné comme la loi uniforme appartiennent en majorité au domaine d'attraction de la loi de Weibull (type III, $\tau > 0$) ; les lois dont les queues décroissent de façon exponentielle (lois de Gauss, du chi-deux et exponentielle) au domaine d'attraction de la loi de Gumbel (type I, $\tau = 0$) ; les lois de Student au domaine d'attraction de la loi de Fréchet (type II, le paramètre de forme k étant égal au nombre de degré de liberté et l'indice de queue vérifiant : $0 > \tau \geq -0.5$) ; c'est aussi le cas de la loi de Cauchy et des autres lois stables de Pareto, le paramètre de forme k étant égal à l'exposant caractéristique (habituellement noté α) et l'indice de queue vérifiant : $\tau < -0.5$. Les lois du type I et III doivent posséder tous leurs moments (tronqués à gauche). Seules les lois non bornées à droite peuvent appartenir au second type. Les moments tronqués d'ordre r pour les lois du type II existent seulement pour des valeurs de r inférieures à k. Le paramètre k correspond au plus grand ordre pour lequel les moments (tronqués à gauche) sont définis.

L'indice de queue reflète le poids des extrêmes dans la distribution des rentabilités. Une valeur positive de l'indice de queue signifie que les extrêmes n'ont pas de rôle important puisque la variable est bornée. Une valeur nulle donne relativement peu d'extrêmes alors qu'une valeur négative implique un grand nombre d'extrêmes.

Les deux autres paramètres de la loi des extrêmes (les constantes de normalisation) s'interprètent comme suit : le paramètre de localisation β_n tend vers la valeur modale de la loi (la rentabilité extrême la plus probable) ; le paramètre d'échelle α_n représente la dispersion de la loi des extrêmes.

1.3. Résultats avancés

La version du théorème des valeurs extrêmes présentée ci-dessus repose sur quatre hypothèses de base. Le même résultat concernant la forme de la loi est trouvé si l'on relâche ces hypothèses. Citons quelques extensions de ce théorème. Watson (1954) montre que le résultat du théorème est encore valide si les variables $X_1, X_2, ..., X_n$ sont

m-dépendantes. Berman (1964) montre que le résultat tient toujours si les variables sont correlées, la série des coefficients de corrélation au carré étant convergente. De Haan, Resnick, Rootzèn et De Vries (1989) montrent que si le processus suivi par X est un processus ARCH, alors la variable Y_n est du type II, l'indice de queue vérifiant : $0 > \tau > -0.5$. D'après Leadbetter, Lindgren et Rootzèn (1983), un mélange de variables normales produit une loi limite du type I. Ces extensions montrent que les hypothèses d'indépendance et d'identité de la loi parente ne sont pas cruciales. Remarquons que dans ces cas les extrêmes sont tirés asymptotiquement d'une loi non-conditionnelle, alors que la variable parente est tirée d'une loi conditionnelle.

2. Méthodes statistiques d'estimation de la loi des valeurs extrêmes

Le théorème des valeurs extrêmes donne un résultat théorique concernant la loi limite des extrêmes. En pratique, nous voulons estimer la loi asymptotique de laquelle les observations extrêmes sont tirées. Cette loi est définie par trois paramètres : τ, α_n et β_n. Nous présentons ci-dessous différentes méthodes d'estimation : les méthodes de régression et du maximum de vraisemblance qui sont paramétriques et des méthodes non-paramétriques pour estimer l'indice de queue.

2.1. Méthode de régression

La méthode de régression couramment utilisée en ingénierie repose sur les propriétés des statistiques ordonnées des extrêmes. Cette méthode présentée dans Gumbel (1958, pp 176-178) et Kinnison (1985, pp. 68-71) se compose de quatre étapes. La première étape consiste à sélectionner la rentabilité maximale d'un ensemble de rentabilités journalières. A chaque date, nous observons une réalisation de la variable X. Après n unités de temps, nous avons donc n observations notées X_1, X_2, ..., X_n, desquelles nous extrayons la plus grande valeur notée $Y_{1,n}$. Des n observations suivantes, nous extrayons de nouveau le terme maximum appelé $Y_{2,n}$. Si nous possédons N^{obs} $(= n \cdot N)$ observations, alors nous obtenons N observations de maxima $Y_{1,n}$, $Y_{2,n}$, ..., $Y_{N,n}$. Deuxièmement, la séquence $Y_{1,n}$, $Y_{2,n}$, ..., $Y_{N,n}$ est rangée dans l'ordre croissant afin d'obtenir des statistiques ordonnées $Y_{1,n}'$, $Y_{2,n}'$, ..., $Y_{N,n}'$. Ces valeurs vérifient : $Y_{1,n}' \leq Y_{2,n}' \leq ... \leq Y_{N-1,n}' \leq Y_{N,n}'$. Troisièmement, nous utilisons les fréquences aléatoires $F_Y(Y_{1,n}')$, $F_Y(Y_{2,n}')$, ..., $F_Y(Y_{N,n}')$. Nous supposons que les observations d'extrêmes sont exactement tirées de la loi des valeurs extrêmes F_Y donnée par la formule (3). Pour chaque valeur de i, $F_Y(Y_{i,n}')$ est une variable aléatoire qui prend des valeurs comprises entre zéro et l'unité. La loi de cette variable aléatoire est donnée par la formule (4) :

$$(4) \qquad F_{F_Y(Y'_{i,n})}(y) = \frac{N!}{(N-i)!\cdot i!} \cdot i \cdot y^{i-1} \cdot (1-y)^{N-i}$$

Remarquons que la loi de la variable $F_Y(Y_{i,n}')$ est indépendante de la variable Y et ne dépend que de l'ordre i.[1] Les fréquences aléatoires $F_Y(Y_{i,n}')$ sont distribuées autour de leur valeurs moyennes $E\,[F_Y(Y_{i,n}')]$. La valeur moyenne de la $i^{ème}$ fréquence est donnée par la formule (5) :

$$(5) \qquad E\,[F_Y(Y'_{i,n})] = \frac{i}{N+1}$$

Ce résultat conduit au modèle statistique (6) :

$$(6) \qquad F_Y(Y'_{i,n}) = E[F_Y(Y'_{i,n})] + e_{i,n} = \frac{i}{N+1} + e_{i,n}$$

Le terme d'erreur $e_{i,n}$ a une moyenne nulle et est normalement distribué de façon asymptotique si le quotient i/N n'est pas trop proche de zéro et de l'unité (Gumbel 1958, p 48). En pratique, nous estimons une forme réduite de l'équation (6). Pour cela, nous transformons cette équation en prenant deux fois le logarithme de $F_Y(Y_{i,n}')$ et de $E[F_Y(Y_{i,n}')]$. Nous obtenons ainsi un modèle non-linéaire (7) dont l'estimation produit les valeurs pour les paramètres τ, α_n et β_n :

$$(7) \qquad -\ln\left[-\ln\left(\frac{i}{N+1}\right)\right] = \frac{1}{\tau}\cdot\ln\alpha_n - \frac{1}{\tau}\cdot\ln\left[\alpha_n - \tau\cdot\left(Y'_{i,n} - \beta_n\right)\right] + u_{i,n}$$

Nous sommes particulièrement intéressés par le signe de l'indice de queue τ, qui détermine le type de la loi asymptotique. Comme le cas de la loi de Gumbel est un cas intermédiaire ($\tau = 0$), il est nécessaire d'estimer un modèle particulier (8) pour cette loi :

$$(8) \qquad -\ln\left[-\ln\left(\frac{i}{N+1}\right)\right] = \frac{Y'_{i,n} - \beta_n}{\alpha_n} + u_{i,n}$$

Ce modèle peut être vu comme le modèle général contraint (le paramètre τ étant égal à zéro). Un test du ratio de vraisemblance peut être réalisé pour tester si la contrainte est satisfaite (ou de façon équivalente si la loi de Gumbel est rejetée).

La méthode de régression fournit des estimateurs de τ, α_n et β_n relativement précis bien que légèrement biaisés.[2] Les équations (7) et (8) sont estimées en minimisant la somme des carrés des résidus ; sous l'hypothèse de normalité et d'indépendance des résidus, minimiser cette fonction revient à maximiser la vraisemblance de chaque modèle.[3]

1. Ce résultat est analogue au résultat classique suivant : si Y une variable aléatoire quelconque de fonction de répartition F_Y, alors la variable aléatoire $F_Y(Y)$ est distribuée selon une loi uniforme sur [0,1].

2. Longin (1994a) montre par des simulations de Monte Carlo qu'il y a un biais vers le bas d'environ quatre pour cent pour l'indice de queue et que les deux autres paramètres ne sont presque pas biaisés.

3. En pratique, nous utilisons la procédure LSQ du logiciel statistique TSP International. Les procédures NLIN de SAS et NLR de SPSS sont aussi utilisables.

2.2. Méthode du maximum de vraisemblance

L'estimateur du maximum de vraisemblance produit un estimateur non-biaisé et asymptotiquement distribué comme une loi normale. La variance asymptotique est égale à la borne FDCR (Fréchet-Darmois-Cramer-Rao). Le système d'équations non-linéaires est donné par Tiago de Oliveira (1973) et Gumbel (1958, p 231). Nous résolvons ce système numériquement en utilisant la méthode itérative de Newton-Raphson en prenant les estimations données par la méthode de régression comme valeurs initiales de l'algorithme.

2.3. Méthodes non-paramétriques pour l'indice de queue τ

Les deux méthodes précédentes supposent que les observations d'extrêmes sont *exactement* tirées de la loi des extrêmes donnée par la formule (3). Or, la théorie étant asymptotique, ces observations sont tirées d'une loi proche mais différente. Les estimateurs non-paramétriques pour l'indice de queue développés par Pickands (1975) et Hill (1975) ne présentent pas cet inconvénient. L'estimateur de Pickands est un estimateur général applicable aux trois types de lois de valeurs extrêmes ; d'après Jansen et De Vries (1991), l'estimateur de Hill est plus efficient que celui de Pickands si la distribution des extrêmes est de type II. Ces estimateurs sont fondés sur les statistiques ordonnées de la variable parente X et prennent en compte l'information contenue dans les queues de cette variable. Pour le terme maximum, ils sont donnés par les formules (9) et (10) :

$$\text{(9)} \qquad \tau_{\text{Pickands}} = -\frac{1}{\ln 2}\cdot\ln\frac{X'_{N^{obs}-q+1} - X'_{N^{obs}-2q+1}}{X'_{N^{obs}-2q+1} - X'_{N^{obs}-4q+1}}$$

$$\text{(10)} \qquad \tau_{\text{Hill}} = \frac{1}{q-1}\cdot\sum_{i=1}^{q-1}\ln X'_{N^{obs}-i} - \ln X'_{N^{obs}-q}$$

où $(X'_m)_{m=1,N^{obs}}$ est la série des rentabilités journalières ordonnées en ordre croissant et $q = q(N^{obs})$ est une séquence de nombres entiers qui tendent vers l'infini de façon à ce que le quotient $q(N^{obs})/N^{obs}$ tende vers zéro. Dekkers et De Haan (1989) obtiennent la consistance de l'estimateur de Pickands si $q(N^{obs})$ croît d'une manière convenable, et ils prouvent que la variable normalisée $(\tau_{\text{Pickands}} - \tau)\cdot\sqrt{q}$ est distribuée de façon asymptotique selon une loi normale de moyenne nulle et de variance $\tau^2\cdot(2^{-2\tau+1}+1)/[2(2^{-\tau}-1)\cdot\ln 2]^2$. De même, l'estimateur de Hill est consistant et la variable normalisée $(\tau_{\text{Hill}} - \tau)\cdot\sqrt{q}$ est distribuée de façon asymptotique selon une loi normale de moyenne nulle et de variance τ^2. La valeur de q est obtenue par simulation de Monte-Carlo (méthode proposée par Jansen et De Vries (1991)) : nous simulons N^{obs} observations de quatre variables aléatoires suivant une loi de Cauchy et trois lois de Student avec des degrés de liberté égaux à 2, 3 et 4. Les queues de ces quatre lois présentent différentes épaisseurs et correspondent à des indices de queues égaux à – 1, – 0.5, – 0.33 et – 0.25. Les queues d'une loi de Cauchy contiennent beaucoup d'extrêmes alors que celles d'une loi de Student à quatre degrés de liberté en contiennent relativement peu. Puis nous estimons l'indice de queue en utilisant l'un ou l'autre des estimateurs avec différentes valeurs de q allant de 1 à 500. Nous répétons cette simulation 500 fois. Pour chaque loi et pour chaque valeur de q, nous obtenons une série de 500 observations de l'estimateur de l'indice de queue. Puis pour chaque loi j, nous calculons la moyenne du carré des erreurs (Mean Square Error noté MSE) de cette série. Nous retenons la valeur de q, notée q_j^{opt}, qui minimise le MSE.

Avec des données réelles, nous calculons l'estimation de Pickands et de Hill pour les valeurs optimales obtenues précédemment $(q_j^{opt})_{j=1,4}$. Ces valeurs correspondent aux quatre valeurs choisies pour l'indice de queue $(\tau_j)_{j=1,4}$. Nous retenons finalement l'estimation qui est la plus proche de la valeur choisie τ_j. Pour cela nous calculons les statistiques $(\tau_{\text{Hill}}(q_j^{opt}) - \tau_j) / \sigma_j$ où $\tau_{\text{Hill}}(q_j^{opt})$ est l'estimateur de Hill calculé avec q_j^{opt} extrêmes et σ_j est l'écart-type de cette estimation, et la p-valeur associée p_j. Nous retenons finalement l'estimation associée $\tau_{\text{Hill}}(q_j^{opt})$ qui est la plus proche de τ_j, c'est-à-dire celle qui correspond à la plus faible valeur de p_j.

3. Exemples d'application

Dans cette partie, nous présentons quelques exemples d'application de la théorie des valeurs extrêmes en finance.

3.1. La loi des rentabilités extrêmes du marché boursier

Dans cette section, nous estimons la loi asymptotique des rentabilités minimales et maximales de la Bourse de Paris. Les rentabilités journalières sont calculées à partir des cours de l'indice CAC Général 240 (dividendes inclus) sur la période janvier 1977-juin 1990 (base de données AFFI)[1]. Les rentabilités extrêmes sont sélectionnées sur 55 périodes ne se recouvrant pas et contenant chacune 60 séances boursières. Avec les notations de la partie précédente, nous avons donc : $n = 60$ et $N = 55$ sachant que $N^{obs} = 3\,301$. Ces données sont rapportées en annexe pour permettre au lecteur de reproduire les résultats d'estimation donnés dans les Tables 1A, 1B et 2. Nous trouvons que les rentabilités minimale et maximale sont tirées d'une loi de Fréchet avec un indice de queue compris entre -0.20 et -0.50. Les estimations des paramètres de cette loi varient peu d'un estimateur à l'autre. La valeur du test de ratio de vraisemblance entre le modèle général et le modèle contraint de Gumbel est égal à $56.206\ [= -2 \cdot (2.497 - 30.600)]$ pour le minimum et à $94.256\ [= -2 \cdot (-22.258 - 24.870)]$ pour le maximum. La statistique du test est distribuée de façon asymptotique comme un chi-deux à un degré de liberté. Les p-valeurs des deux tests sont en-dessous de 10^{5}. Nous rejetons donc la loi de Gumbel en faveur de la loi de Fréchet pour décrire les extrêmes boursiers. Les fonctions de

1. Une présentation de la base de données AFFI ainsi que des résultats empiriques concernant le marché boursier français peut être trouvée dans Hamon et Jacquillat (1992).

répartition des rentabilités minimale (Z_n) et maximale (Y_n) observées sur un trimestre sont données par les formules (11) et (12) :

$$(11) \qquad F_{Z_n}(z) = \begin{cases} 1 - \exp\left[- \left(\dfrac{-3.404}{z - 1.564} \right)^{3.672} \right] & \text{pour } z < 1.564 \\ 1 & \text{pour } z \geq 1.564 \end{cases}$$

$$(12) \qquad F_{Y_n}(y) = \begin{cases} 0 & \text{pour } y \leq -0.263 \\ \exp\left[- \left(\dfrac{-2.085}{y + 0.263} \right)^{3.142} \right] & \text{pour } y < -0.263 \end{cases}$$

La figure 1 représente graphiquement les densités de probabilité estimées des lois d'extrêmes (minimum et maximum) et la densité de probabilité des rentabilités journalières empiriquement observée.

Ces résultats obtenus pour le marché français des actions sont analogues à ceux obtenus pour le marché américain. Jansen et De Vries (1991), Longin (1993a) et Loretan et Phillips (1994) obtiennent par différentes méthodes d'estimation une valeur de l'indice de queue comprise aussi entre – 0.20 et – 0.50. Dans notre article *Booms and Crashes. Application of Extreme Values Theory to the US Stock Market*, nous allons plus loin en distinguant entre krachs et non-krachs d'une part et entre booms et non-booms d'autre part. Un krach, par exemple, correspond certainement à une rentabilité minimale observée sur une période donnée. Mais l'inverse est faux : une rentabilité minimale n'est pas nécessairement un krach. Nous proposons deux classifications des rentabilités minimales entre krachs and non-krachs : *quantitative* en utilisant un seuil pour capturer l'effet “taille" de la chute du prix des actions et *qualitative* en analysant les commentaires des participants au marché relevés dans le *New York Times* pour capturer l'effet “conditions du marché". Nous testons s'il y a de l'hétérogénéité dans la distribution des extrêmes qui pourrait expliquer la distinction entre krachs et non-krachs. En d'autres termes, nous nous demandons si les krachs et les non-krachs sont tirés de la même distribution d'extrêmes. Les résultats empiriques montrent que quelle que soit la classification retenue, les krachs et les autres minima sont vraisemblablement tirés de la même distribution d'extrêmes négatifs. De même, les booms et les autres maxima sont vraisemblablement tirés de la même distribution d'extrêmes positifs. D'un point de vue statistique, il n'y a donc pas de différence entre les deux types de minima et entre les deux types de maxima. Nous n'avons pas trouvé d'hétérogénéité dans la distribution des extrêmes qui aurait pu expliquer ou refléter les classifications de minima et de maxima. Nous concluons que les booms et les krachs sont simplement de bons et de mauvais tirages de distributions d'extrêmes et non des événements statistiquement “anormaux". Comparées aux autres mouvements extrêmes, même les grandes crises boursières de 1929 et de 1987 n'apparaissent pas comme des événements singuliers.

3.2. Choix de la loi des rentabilités boursières journalières

Dans notre article *The Choice of the Distribution for Asset Returns: Extreme Values Can Help*, nous utilisons les résultats concernant la loi des extrêmes pour discriminer parmi différentes lois statistiques pour les rentabilités journalières[1]. Comme expliqué en Section 1.2, les lois couramment utilisées en finance se différencient par le poids des queues de distribution et donc par la valeur du paramètre de queue τ. La loi de Fréchet avec une valeur de τ aux alentours de – 0.30 obtenue empiriquement permet de rejeter la loi normale, le mélange de lois normales ainsi que les lois stables de Pareto. La loi des rentabilités journalières contient plus d'extrêmes que ne le prévoit la loi normale mais cependant moins que ne le prévoit les lois stables de Pareto. La loi des rentabilités journalières présente des queues épaisses ("fat-tailed distribution") mais elle a une variance qui reste finie. Les résultats suggèrent qu'une loi de Student de degré 3 ou 4 peut être retenue pour une modélisation non-conditionnelle et que les processus ARCH[2] peuvent être utilisés pour une modélisation conditionnelle des rentabilités journalières sur la place de Paris.

3.3. Mesure du risque

La distribution des extrêmes peut être utilisée pour comparer le risque d'un actif sur deux sous périodes ou le risque de deux actifs. Cette approche est semblable à celle de Rothschild et Stiglitz (1970) qui définissent le degré de risque à partir des queues de la distribution de la rentabilité. Précisément, ils montrent l'équivalence entre trois définitions du concept "A moyenne égale, la variable aléatoire Y est plus risquée que la variable X". Ces trois définitions sont :

1) La variable Y est égale à la variable X plus un bruit.

2) Tout investisseur averse au risque préfère X à Y.

3) Le poids des queues de Y est plus important que celui de X.

Notant $(\tau^1, \alpha_n^1, \beta_n^1)$ et $(\tau^2, \alpha_n^2, \beta_n^2)$ les paramètres des distributions d'extrêmes estimés sur deux sous périodes, nous dirons que la période 1 est plus stable que la période 2 si les trois conditions suivantes sont vérifiées :

$$1)\ \tau^1 > \tau^2\ ; \qquad 2)\ \alpha_n^1 < \alpha_n^2\ ; \qquad 3)\ \beta_n^1 < \beta_n^2$$

En d'autres termes, la période 1 est plus stable que la période 2 si les queues de distribution sont plus épaisses en période 2 qu'en période 1 (c'est-à-dire s'il y a plus d'extrêmes) et si la dispersion et l'amplitude des extrêmes sont plus grandes en période 2 qu'en période 1. Comme nous l'a fait remarquer l'arbitre de cet article, notre approche pourrait être rapprochée de la dominance stochastique ; la comparaison des distributions de probabilités point par point qui est particulièrement lourde dans la dominance stochastique pourrait être remplacée par une comparaison des paramètres des distributions de probabilité qui serait plus simple.

1. Une revue de la littérature sur la distribution de rentabilités peut être trouvée dans Fama (1965) et Allaz (1994).

2. Une présentation des modèles ARCH en finance peut être trouvée dans Alexandre (1991).

Dans notre article *Instability of the U.S. Equity Market: Empirical Evidence Based on Extreme Price Movements*, nous utilisons cette mesure pour comparer le degré d'instabilité du marché des actions sur deux sous périodes de l'histoire financière des Etats-Unis : 1836-1914 caractérisée par l'absence d'institutions fédérales majeures et 1914-1990 marquée par la présence d'une Banque Centrale, le Federal Reserve System. Empiriquement, nous trouvons que la première période est plus stable que la seconde confirmant les travaux de Jones, Sylla and Wilson (1991). Ce fait est en accord avec l'hypothèse selon laquelle les marchés financiers sont plus instables en la présence d'un prêteur en dernier ressort, la forme d'assurance produite par ce dernier pendant les crises de liquidité impliquant un aléa moral (Folkerts-Landau et Garber 1991).

3.4. Test de la relation niveau de marge et volatilité

Nous montrons maintenant comment la théorie des valeurs extrêmes peut être utilisée pour tester des modèles économiques. Nous prenons l'exemple de la relation entre le niveau de marge et la volatilité du marché des actions[1]. Sur certains marchés d'actions, il est possible d'acheter les titres à la marge : l'investisseur ne paye qu'une partie du prix et emprunte l'autre partie à sa maison de titres (appelé "broker" à la Bourse de New York). A la suite du boom de la fin des années 1920 et du krach de 1929, le Congrès a dénoncé cette pratique comme déstabilisant le marché. En 1934, le Congrès transféra à la Réserve Fédérale le pouvoir de fixer le niveau de marge sur les marchés d'actions afin de contrôler la volatilité et la spéculation via la quantité de crédit accordée aux investisseurs. Dans notre article *The Margin-Volatility Relationship: A Test Based on Extreme Price Movements*, nous réexaminons la relation entre le niveau des marges et la volatilité sur le marché américain. Dans les études précédentes, la volatilité était mesurée par la variance des rentabilités du marché. Cependant l'instabilité du marché des actions a souvent été reliée aux mouvements extrêmes de prix tels que les booms et les krachs. L'occurrence de ces événements a même été à l'origine de la législation. Nous utilisons l'indice de queue comme mesure de la volatilité. Nous régressons l'indice de queue sur le niveau de marge pour tester l'impact de la législation. Empiriquement, nous ne trouvons pas de relation significative entre les deux variables.

3.5. Niveau optimal de marge sur les marchés à terme

Dans cette section, nous montrons comment la théorie des valeurs extrêmes peut être utilisée pour fixer le niveau de marge sur les marchés à terme[2]. Rappelons qu'un contrat à terme est un arrangement entre deux parties pour acheter ou vendre un actif à une date T dans le futur à un prix F_0 fixé à la date 0. Dans un contrat à terme, l'échange réel n'intervient qu'à la date T et aucun flux d'argent intervient sur la période $[0, T]$. A l'échéance du contrat, l'investisseur "long" qui doit acheter l'actif paie F_0 à l'investisseur "court" qui doit lui fournir l'actif. Pour un investisseur long,

1. Chance (1990) fournit une revue de la littérature sur l'effet des marges sur la volatilité.
2. Une présentation des marchés à terme peut être trouvée dans Duffie (1989).

la structure de perte et de gain (pay-off) d'un tel contrat est égal à la variation du prix de l'actif entre la date de livraison du titre et la date de signature du contrat : $F_T - F_0$. Un investisseur long bénéfice donc d'une hausse du prix : à la date T, il ou elle achète l'actif à un prix F_0 qui est en-dessous du prix du marché en vigueur F_T. En revanche, si le prix F_T est en-dessous du prix fixé dans le contrat, alors l'investisseur long doit acheter l'actif à un prix supérieur au prix du marché. Dans une telle situation, l'investisseur long a une forte incitation à rompre le contrat. Pour assurer l'intégrité des marchés à terme, plusieurs mécanismes ont donc été mis en place : les investisseurs n'échangent pas directement entre eux mais passent par des intermédiaires financiers ("brokers") qui échangent au sein d'une bourse. De plus, une chambre de compensation ("clearinghouse") s'interpose entre les deux parties pour garantir la performance de chaque transaction. Les contrats sont aussi renouvelés chaque jour ("daily marked-to-market") de façon à limiter le risque dû à la fluctuation des cours (la variance du changement de prix sur un jour $F_1 - F_0$ est plus faible que la variance du changement de prix sur toute la période $F_T - F_0$). Enfin, les intermédiaires financiers demandent à leurs clients de déposer une certaine somme d'argent appelée marge. Ces dépôts garantissent que les clients honorent leurs contrats. Un niveau de marge élevé assure une bonne protection contre le risque de défaut et diminue le risque systémique ; un niveau de marge bas diminue les coûts de transaction supportés par les investisseurs. Il existe donc un niveau optimal de marge associé à une probabilité de violation de marge dérivée de ce dilemme. Dans notre article *Optimal Margin Level in Futures Markets : A Parametric Extreme-Based Method*, nous utilisons la théorie des valeurs extrêmes pour fixer le niveau de marge sur les marchés à terme pour une probabilité de violation de marge sur une période contenant n séances boursières. Notre relation entre ces deux variables notées r^{long} et π^{long} s'écrit simplement :

$$\pi^{\text{long}} = Prob\left(MIN\left(r_1, r_2, \ldots, r_n\right) < r^{\text{long}}\right) = F_{Y_n}\left(r^{\text{long}}\right) \tag{13}$$

La distribution du changement de prix minimal (exprimé en pourcentage) est remplacée par la distribution asymptotique des extrêmes. Les résultats empiriques utilisant des données américaines montrent que pour une position longue et une probabilité de violation de marge égale à 5 %, la niveau optimal de marge est égal à – 3.09 % en utilisant la loi normale, – 6.09 % en utilisant la distribution de Fréchet et – 6.32 % en utilisant la fréquence empirique. L'utilisation de la loi normale sous-estime l'occurrence des extrêmes alors que la théorie des valeurs extrêmes donne des valeurs proches de la réalité.

3.6. Ratio de capital minimum pour les intermédiaires financiers

Un problème semblable se pose pour fixer le ratio de capital minimum requis pour les institutions financières (banques, maisons de titres, mainteneurs de marché...)[1]. Un niveau minimum de capital couvre le risque de position qui peut provenir

1. Une présentation de ce problème peut être trouvée dans Maisel (1981) pour les banques commerciales et dans Dimson et Marsh (1994) pour les intermédiaires financiers.

de l'exposition de ces entités aux fluctuations de la valeur de leurs actifs. Trois méthodes sont actuellement utilisées : une approche dite "complète" aux Etats-Unis, une approche par "bloc" suggérée par le Comité de Bâle et une approche fondée sur une version simplifiée du modèle de marché au Royaume-Uni. Seule la dernière méthode est directement reliée au risque d'un portefeuille impliquant plus de capital pour une position plus risquée. Une méthode plus appropriée pourrait être développée en utilisant la distribution des extrêmes puisque le risque de faillite est directement lié à l'occurrence de krachs (pour une positon longue) et de booms (pour une position courte). Une formule similaire à la formule (13) pourrait être utilisée pour fixer le ratio de capital minimal pour une probabilité de faillite donnée.

3.7. Assurance de portefeuille et krachs boursiers : "crash option"

Dans cette section, nous montrons comment la théorie des valeurs extrêmes peut être utilisée dans la gestion du risque d'un portefeuille. Dans l'article *Crash Options. Part I: Definition, Motivation and Implementation*, nous proposons un nouvel instrument financier : option sur krach boursier ou *crash option.* Ce nouvel instrument peut être d'une grande utilité pour la gestion d'actifs financiers en période de forte volatilité et en particulier lors d'un krach boursier. Il permet de protéger la valeur d'un portefeuille de titres financiers (actions, obligations...) contre une forte variation des cours à la baisse.

Nous motivons l'introduction des *crash options* en notant que les techniques d'assurance de portefeuille[1] sont moins efficaces en période de forte volatilité qu'en temps normal pour des raisons liées aux dysfonctionnements des marchés. Les rapports de la CFTC (1987, pp. 55-61) et Brady (1988, pp. 55-59) notent que pendant le krach d'octobre 1987 aux Etats-Unis, le manque de liquidité sur le marché au comptant, les disparités des procédures de règlement, et la disruption des liens informatiques ont conduit à une déconnexion des marchés d'actions, de futures et d'options. Les techniques d'assurance de portefeuille ont d'ailleurs été beaucoup moins utilisées depuis le krach d'octobre 1987.

Le but d'une *crash option* est de protéger la valeur d'un portefeuille contre une variation négative extrême des cours boursiers[2]. Une *crash option* complète le spectre des options[3] du point de vue du risque couvert : les options asiatiques s'intéressent à la moyenne des cours sur toute ou une partie de la durée de vie de l'option, les options classiques call et put permettent de se protéger contre une variation du prix de l'action, une *crash option* permettrait de se protéger contre une variation extrême des cours sur une période très brève. Dans sa conception, une *crash option* est relativement proche d'une option lookback dont le pay-off dépend du prix minimum atteint entre la date d'achat et la maturité de l'option. Alors qu'une option lookback s'intéresse à la différence entre le prix de l'actif sous-jacent à la date finale et le prix

1. Pour une description de cette technique, voir, en anglais, Leland et Rubinstein (1981) et, en français, Berthon et Gallais Hamonno (1989), (1991).

2. De façon similaire, nous pourrions définir des *boom options* pour des mouvements extrêmes positifs.

3. Un exposé sur les différents types d'options peut être trouvé dans Hull (1993).

minimum durant la vie de l'option, une *crash option* ne prend en compte que les différences consécutives de prix.

Comme le but d'une *crash option* est de protéger la valeur d'un portefeuille contre une brusque chute des cours, nous considérons la rentabilité du portefeuille sur une courte période : une journée ou une semaine. Un tel choix est justifié par la durée très brève des krachs boursiers observés historiquement (Kindleberger 1978). Le strike noté s_0 est défini en taux de rentabilité. La durée de vie de la *crash option* est notée T. A maturité T, la fonction de gain notée $CO_T(s_0,T)$ est donnée par la formule (14) :

$$CO_T(s_0, T) = Max\left[-Min\,(r_1 - s_0, r_2 - s_0, r_3 - s_0, ..., r_T - s_0), 0\right] \tag{14}$$
$$= Max\,[s_0 - Z_T, 0]$$

A maturité, nous comparons les rentabilités journalières r_1, r_2, r_3, ..., r_T observées au cours de la période $[0, T]$ au strike s_0. Si l'une des différences $r_i - s_0$ est négative (c'est-à-dire si le marché a chuté de plus de s_0 pour-cent au moins une fois), alors la *crash option* est dite dans la monnaie et le détenteur de l'option reçoit alors $s_0 - Z_T$ où Z_T est la rentabilité la plus basse sur la période $[0, T]$. Si aucune des rentabilités r_1, r_2, r_3, ..., r_T n'est inférieure au strike s_0, alors la *crash option* est dite en dehors de la monnaie et le détenteur de l'option ne reçoit rien. Le strike s_0 fixé à la date 0 dans le contrat devrait être défini en relation avec la volatilité de l'indice et les besoins des agents qui opèrent sur ces marchés. Par exemple, l'indice CAC Général 240 a une volatilité exprimée en unité journalière d'environ 1 pour-cent (15 pour-cent en unité annuelle). Des valeurs possibles de strike pour différentes *crash options* pourraient être – 2 %, – 3 %, – 5 % et – 7 %.

Comme le type d'événements couverts par une *crash option* est relativement rare, la variable T devrait être assez grande pour que la probabilité de cet événement ne soit pas négligeable. La période $[0,T]$ pourrait couvrir une année par exemple. Dans ce cas, T serait aux alentours de 250.

Dans l'article *Crash options. Part II : Valuation*, nous essayons d'évaluer le prix d'une crash option. Une crash option peut être considérée comme une séquence de put d'une maturité de un jour largement en-dehors de la monnaie. Dans les hypothèses du modèle de Black et Scholes (mouvement brownien pour le prix du sous-jacent, marché efficient, absence de coût de transaction), nous montrons alors qu'il existe un portefeuille de couverture composé du sous-jacent et de l'actif sans risque qui duplique l'évolution d'une crash option et nous en déduisons la valeur de l'option qui est égale à celle de ce portefeuille. Comme nous l'avons montré en Section 3.2, l'hypothèse de normalité pour les rentabilités (impliquée par l'hypothèse d'un mouvement brownien pour les prix) n'est pas supportée empiriquement puisque la distribution des rentabilités présente des queues épaisses. Nous proposons donc une formule utilisant la théorie des valeurs extrêmes qui permettent de tenir compte du poids exact de ces événements.

4. Conclusion

Cet article a un double objectif : présenter la théorie des valeurs extrêmes et discuter ses premières applications en finance. Cet outil statistique est particulièrement adapté pour étudier les booms et les krachs sur les marchés financiers. Nous avons montré l'utilité de la théorie des valeurs extrêmes dans le domaine de la législation des marchés financiers qui est particulièrement sensible à ces événements. L'impact de la théorie est sans doute moindre pour les décisions d'investissements des agents économiques puisque c'est davantage les propriétés moyennes (rentabilité anticipée et variance) qui interviennent. La théorie peut cependant être utilisée pour une gestion du risque d'un portefeuille d'actifs considérant l'occurrence des booms et krachs boursiers.

BIBLIOGRAPHIE

ALEXANDRE H. (1991) "La Quasi-Marche Aléatoire", *Finance*, 13, pp 5-21.

ALLAZ B. (1994) "A Short Survey of Some Empirical Features of Financial Assets Rates of Returns", Document de Recherche, Groupe HEC.

BERMAN S.M. (1963) "Limiting Theorems for the Maximum Term in Stationary Sequences", *Annals of Mathematical Statistics*, 35, pp 502-516.

BERTHON J. et GALLAIS-HAMONNO G. (1989) "L'assurance de portefeuille : théorie et pratique", *R. Analyse Financière*, n° 77.

BERTHON J. et GALLAIS-HAMONNO G. (1991) "La robustesse de l'assurance de portefeuille par réplication d'option en delta-rente", *R. Analyse Financière*, 4e trimestre.

BLACK F. et M. SCHOLES (1973) "The Pricing of Options and Corporate Liabilities", *Journal of Political Economy*, 81, pp 637-659.

BRADY N. (1988) *Report of the Presidential Task Force on Market Mechanisms.*

CHANCE M.D. (1990) "The Effect of Margins on the Volatility of Stock and Derivative Markets : A Review of the Evidence", *Monograph Series in Finance and Economics*, Salomon Brothers Center for the Study of Financial Institutions, New York University.

DE HAAN L. et RESNICK I.S. (1980) "A Simple Asymptotic Estimate for the Index of a Stable Distribution", *Journal of the Royal Statistical Society*, Series B, pp 83-87.

DE HAAN L., RESNICK I.S., ROOTZEN H. et DE VRIES C.G. (1989) "Extremal Behavior of Solutions to a Stochastic Difference Equation with Applications to ARCH Process", *Stochastic Processes and their Applications*, 32, pp 213-224.

DIMSON E. et MARSH P. (1994) "The Debate on International Capital Requirements", The City Research Project, London Business School.

DUFFIE D. (1989) *Futures Markets*, Prentice Hall, New Jersey.

FAMA E.F. (1965) "The Behavior of Stock Market Prices", *Journal of Business*, 38, pp 34-105.

FOLKERTS-LANDAU D. et GARBER P.M. (1991) "The ECB : A Bank or a Monetary Policy Rule ?", Dans *Establishing a Central Bank : Issues in Europe and Lessons from the US*, Edité par M.B Canzoneri, V. Grilli et P.R. Masson, CEPR et IMF, New York.

GALAMBOS J. (1978) *The Asymptotic Theory of Extreme Order Statistics*, John Wilhey and Sons, New York.

GNEDENKO B.V. (1943) "Sur la Distribution Limite du Terme Maximum d'une Série Aléatoire", *Annals of Mathematics*, 44, pp 423-453.

GUMBEL E.J. (1958) *Statistics of Extremes*, Columbia University Press, New York.

HAMON J. et JACQUILLAT B. (1992) *Le Marché Français des Actions. Etude Empiriques 1977-1991*, Presses Universitaires de France, Paris.

HILL B.M. (1975) "A Simple General Approach to Inference about the Tail of a Distribution", *Annals of Statistics*, 46, pp 1163-1173.

HULL J.C. (1993) *Options, Futures and Other Derivatives*, Second Edition, Prentice Hall, New Jersey.

JANSEN D.W. et DE VRIES C.G. (1991) "On the Frequency of Large Stock Returns : Putting Booms and Busts into Perspectives", *Review of Economic and Statistics*, 73, pp 18-24.

JENKINSON A.F. (1955) "The Frequency Distribution of the Annual Maximum (or Minimum) Values of Meteorological Elements", *Quarterly Journal of the Royal Meteorology Society*, 87, pp 145-158.

JONES C.P., SYLLA R.E. et WILSON J.W. (1988) "Financial Market Panics and Volatility in the Long Run, 1830-1988", dans *Crashes and Panics*, Edité par E.N. White, Business One Irwin.

KINDLEBERGER C. (1978) *Manias, Panics and Crashes*, Seconde Edition, Macmillan, New York.

KINNISON R.R. (1985) *Applied Extreme Value*, Battelle Press, New York.

LEADBETTER M.R., LINDGREN G. et ROOTZEN H. (1983) "Extremes and Related Properties of Random Sequences and Processes", Springer Verlag, New York.

LELAND H. et RUBINSTEIN M. (1981) "Replicating Options with Positions in Stock and Cash", *Financial Analysts Journal*, July-August, pp 63-72.

LONGIN F. (1993a) *Volatilité et Mouvements Extrêmes du Marché Boursier*, Thèse, Groupe HEC.

LONGIN F. (1993b) "Booms and Crashes. Application of Extreme Value Theory to the US Stock Market", Document de Recherche #179-93, London Business School.

LONGIN F. (1994a) "The Margin-Volatility Relationship : A Test Based on Extreme Price Movements", Document de Recherche #191-94, London Business School.

LONGIN F. (1994b) "Optimal Margin Level in Futures Markets : A Parametric Extreme-Based Method", Document de Recherche #192-94, London Business School.

LONGIN F. (1994c) "The Choice of the Distribution for Asset Returns : Extreme Values Can Help", Document de Recherche, ESSEC.

LONGIN F. (1994d) "Crash Options. Part I : Definition, Motivation and Implementation", Document de Recherche, ESSEC.

LONGIN F. (1994e) "Crash Options. Part II : Valuation", Document de Recherche, ESSEC.

LONGIN F. (1994f) "Instability of the U.S. Equity Market : Empirical Evidence Based on Extreme Price Movements," Document de Recherche, ESSEC.

LORETAN M. and PHILLIPS P.C.B. (1994) "Testing for Covariance Stationarity of Heavy-tailed Time Series : An Overview of the Theory with Applications to Several Financial Datasets", *Journal of Empirical Finance*, 2, pp 211-248.

MAISEL S.J. (1981) *Risk and Capital Adequacy in Commercial Banks*, Recueil d'Articles, University of Chicago Press, Chicago.

PICKANDS J. (1975) "Statistical Inference Using Extreme Order Statistics", *Annals of Statistics*, 45, pp 119-131.

ROTHSCHILD M. et STIGLITZ J.E. (1970) "Increasing Risk : I. A Definition", *Journal of Economic Theory*, 2, pp 225-243.

TIAGO DE OLIVEIRA J. (1973) "Statistical Extremes – A Survey", Center of Applied Mathematics, Faculty of Sciences, Lisbon.

U.S. COMMODITY FUTURES TRADING COMMISSION (1987) *Interim Report on Stock Index Futures and Crash Market Activity during October 1987*, Division of Economic Analysis and Division of Trading and Markets.

WATSON G.S. (1954) "Extreme Values in Samples from m-dependent Stationary Stochastic Processes", *Annals of Mathematical Statistics*, 25, pp 798-800.

Tableau 1A. Estimations de la loi des rentabilités extrêmes négatives

Méthode d'estimation	Estimation des paramètres		
	τ	α_n	β_n
Régression	– 0.272 (0.026)	0.926 (0.028)	– 1.840 (0.021)
Maximum de vraisemblance	– 0.217 (0.075)	0.832 (0.036)	– 1.815 (0.069)

Tableau 1B. Estimations de la loi des rentabilités extrêmes positives

Méthode d'estimation	Estimation des paramètres		
	τ	α_n	β_n
Régression	– 0.318 (0.022)	0.663 (0.018)	1.822 (0.016)
Maximum de vraisemblance	– 0.315 (0.104)	0.647 (0.052)	1.770 (0.094)

Note : Ces tables donnent les estimations des trois paramètres de la loi des rentabilités extrêmes par les méthodes paramétriques décrites en sections 2.1 et 2.2. Les rentabilités extrêmes sont sélectionnées sur 55 trimestres boursiers ne se recouvrant pas. Les rentabilités sont calculées à partir des cours journaliers de l'indice CAC Général 240 sur la période janvier 1977-juin 1990 (base de données AFFI).

Tableau 2. Estimations non-paramétriques de l'indice de queue gauche (rentabilités négatives) et de l'indice de queue droite (rentabilités positives)

Méthode d'estimation	Indice de queue gauche	Indice de queue droite
Pickands	– 0.353 (0.177)	– 0.239 (0.174)
Hill	– 0.354 (0.041)	– 0.267 (0.038)

Note : Cette table donne les estimations de l'indice de queue pour les deux queues de la distribution des rentabilités par des méthodes non-paramétriques (Pickands et Hill) décrites en section 2.3.

ANNEXE

Données de rentabilités extrêmes positives

850529	1.03 max	800318	2.10 max	871112	2.60
820402	1.06 max	841218	2.16 max	810421	2.61
800806	1.10 max	821013	2.17 max	860319	2.61
810114	1.13 max	790913	2.17 max	770922	2.62 max
891003	1.33 max	890302	2.18 max	880217	2.63
830923	1.37 max	860922	2.21 max	840104	2.63 max
800625	1.45 max	830104	2.23 max	780314	2.70
850522	1.46 max			810813	2.71
801212	1.50 max	780526	2.24	800103	2.74 max
840920	1.58 max	780405	2.25	880219	2.91
790606	1.58 max	820825	2.25 max	851121	2.92 max
840502	1.66 max	780316	2.29	780419	2.98 max
770104	1.69 max	791115	2.29	880202	3.02 max
880914	1.71 max	770512	2.31	860317	3.02
840823	1.72 max	860220	2.32	880104	3.09
830817	1.80 max	810609	2.33	880608	3.10 max
891019	1.85 max	770914	2.35	860530	3.11 max
851023	1.87 max	870105	2.35 max	820106	3.15 max
900405	1.91 max	810723	2.38	860221	3.38 max
790405	1.91 max	900226	2.39 max	871113	3.66
890525	1.92 max	860423	2.40	810720	3.70 max
870702	1.92 max	800108	2.42	871110	3.91
890104	1.99 max	880531	2.43	810615	4.55 max
870323	2.00 max	810717	2.47	770406	4.84 max
830324	2.02 max	810504	2.48	780317	4.46
781031	2.02 max	780927	2.54 max	871020	5.25 max
780112	2.05 max	880115	2.55	871029	5.89 max
811124	2.08 max	871211	2.56	780310	7.35 max

Note : les données ci-dessus permettront au lecteur d'estimer les paramètres de la loi des rentabilités extrêmes positives par les méthodes paramétriques (régression et maximum de vraisemblance) et de calculer l'indice de queue par la méthode de Hill. Les deux méthodes paramétriques utilisent les observations suivies des lettres *max* qui correspondent aux rentabilités maximales observées sur des trimestres ne se recouvrant pas. Les observations sont ordonnées en ordre croissant et correspondent à la série $(Y'_{i,n})_{i=1,N}$ (avec N égal à 55) utilisée dans la méthode de régression (équations (7) et (8)). Pour l'estimateur de Hill, nous avons trouvé par simulation une valeur optimale pour q égale à 48. Pour calculer l'estimation de Hill avec la formule (10), nous utilisons donc les 48 plus fortes rentabilités journalières observées sur toute la période (janvier 1977-juin 1990). Notons que certaines rentabilités très élevées ne sont pas associées à des maxima : il arrive que pendant certains trimestres de forte volatilité, il apparaisse deux, trois ou plus fortes rentabilités. Pour l'estimateur de Pickands, nous avons trouvé par simulation une valeur optimale pour q égale à 114. Pour calculer l'estimation de Pickands avec la formule (9), nous utilisons donc les rentabilités d'ordre 3188, 3074 et 2846 égales à 1.845%, 1.355% et 0.940%.

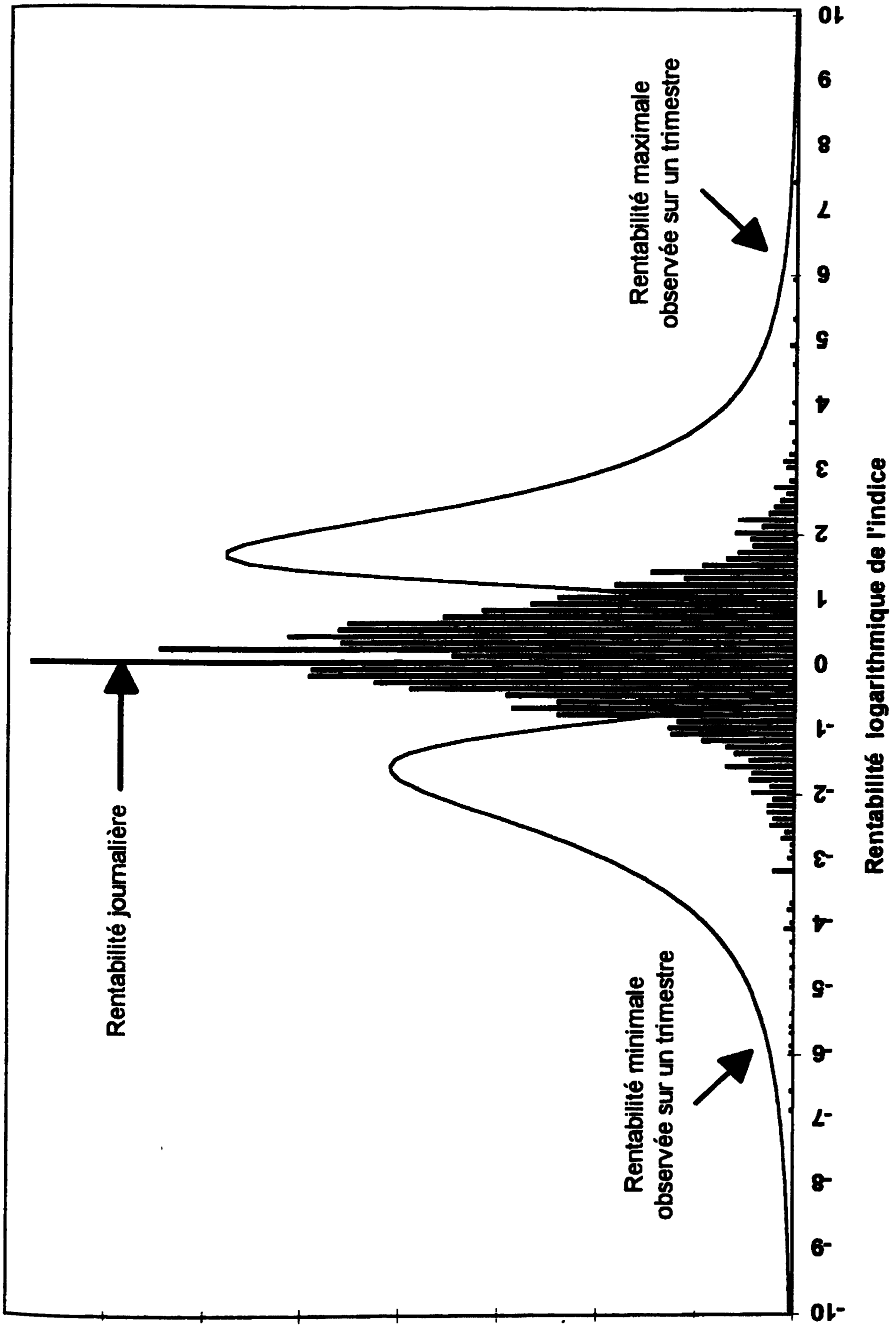

Figure 1. Densités de probabilité des rentabilités minimale, maximum et journalière de la Bourse de Paris (indice CAC Général 240, 1977-1990)