Journal de la société statistique de Paris

D. Besancenot

Arbitrage spéculatif optimal : une simulation sur le marché obligataire

Journal de la société statistique de Paris, tome 134, n° 4 (1993), p. 25-53

<http://www.numdam.org/item?id=JSFS_1993__134_4_25_0>

ARBITRAGE SPÉCULATIF OPTIMAL : UNE SIMULATION SUR LE MARCHÉ OBLIGATAIRE

par D. BESANCENOT
Université Paris 2, CEFIB

Résumé

Cet article propose un modèle d'arbitrage spéculatif construit autour du marché des rentes perpétuelles. Il définit un comportement optimal permettant la construction de portefeuilles d'arbitrage et applique la procédure au marché obligataire. La simulation révèle alors l'existence de profits potentiels sur tous les marchés envisagés. Le modèle constitue un test d'efficience qui conduit au rejet de l'hypothèse d'efficience faible des marchés sur lesquels portent la simulation.

Sur un marché, l'activité spéculative consiste à acquérir un portefeuille de titres dont la liquidation doit permettre de réaliser une plus-value. Un agent achètera un ensemble de titres s'il anticipe une élévation de la valeur globale de ce portefeuille. L'opération symétrique est réalisée en cas d'anticipation à la baisse. Dans les faits, cette opération recouvre deux sortes d'activités distinctes. Le spéculateur va acheter un actif s'il anticipe une augmentation des cours, il réalisera une vente en cas d'anticipation inverse. C'est à cette classe d'opérations que la notion de spéculation est le plus souvent associée. Une autre possibilité d'intervention spéculative existe cependant. Elle consiste à repérer des écarts de prix entre actifs, et à parier sur leur évolution future. C'est ce que l'on appelle le *« spread trading »* ou la spéculation sur écart.

Si l'on anticipe un rapprochement du prix de deux actifs, il est possible de prendre une position permettant de bénéficier des variations de l'écart observé indépendamment de l'évolution du prix de chacun des titres. Dans ce cas, l'intervenant achète l'actif sous-côté et vend simultanément l'actif sur-évalué. Si l'anticipation est réalisée, la liquidation du portefeuille entraîne un gain, que les prix aient augmenté ou diminué.

La spéculation sur écart est fréquente dans le cadre spécifique des marchés financiers sur lesquels la structure à terme des taux d'intérêt joue un rôle important. Elle intervient largement sur les marchés obligataires ou sur des marchés de couverture comme le M.A.T.I.F. Sur le marché obligataire, cette pratique se fonde sur les taux de rendement interne des différents titres. La divergence de deux taux de rendement

Journal de la Société de Statistique de Paris, tome 134, n° 4, 1993

conduit les opérateurs à acheter l'actif le plus rémunérateur et à vendre simultanément l'autre actif. L'opération est dénouée lorsque les écarts de rendements ont retrouvé une valeur normale. Sur un marché comme le M.A.T.I.F., cette opération peut porter sur des contrats d'échéances différentes. Un agent peut alors parier sur l'évolution respective des taux longs et des taux courts (Cf. Le M.A.T.I.F., C.C.I.F.P. [1988])[1].

Une telle démarche peut être justifiée par deux types de comportements. Le spéculateur peut prendre une position croisée parce qu'il anticipe la convergence ou la divergence de taux d'intérêt d'échéances différentes. Il prévoit alors une modification du prix relatif des titres et tire profit de son anticipation. Une seconde démarche fait implicitement référence à une condition d'absence d'opportunité d'arbitrage. Les prix de deux titres techniquement proches l'un de l'autre doivent se fixer de manière à porter leurs rendements à des niveaux voisins. Plus généralement, si l'on observe une relation empirique entre le prix de deux actifs, il est possible de profiter d'une distorsion par rapport à cette relation pour prendre une position. L'observation de ces écarts fait alors intervenir des opportunités d'interventions rémunératrices. La spéculation sur écart pratiquée dans le cadre du marché obligataire correspond à ce type de logique.

La référence à une relation technique, unissant les prix des actifs, fait que le jeu des opérateurs autour de la valeur des écarts peut s'apparenter à une activité d'arbitrage. Ces opérations conservent cependant un aspect spéculatif. La notion d'arbitrage correspond à la possibilité de réaliser des gains sans risque en tirant profit de cotations incohérentes (Cf. Varian [1987]). Intervenir sur la base de distorsions des cours revient à jouer sur le caractère temporaire de la perturbation. La rentabilité de l'intervention dépend des réalisations futures de l'écart. Or, ces écarts ont des évolutions indéterminées. Étant donnée la relation théorique entre le prix des actifs, le risque est limité, on ne peut cependant négliger sa présence. Le terme d'arbitrage est donc impropre pour caractériser ce type d'intervention. En revanche, la référence explicite à une condition d'absence d'arbitrage dans le développement de notre modèle nous conduira à qualifier ce type de comportement par les termes de *quadi-arbitrage* et *d'arbitrage spéculatif*.

L'objet de cet article réside dans la détermination des comportements optimaux de *quasi-arbitrage* dans le contexte fictif d'un marché de rentes perpétuelles et son application aux marchés obligataires. La modélisation présentée se fonde sur les principes simplifiés de la programmation dynamique utilisés dans le cadre de l'éco-

1. Un exemple simple permettra de mieux comprendre le fonctionnement de ce type d'activité spéculative. Supposons que, le 15 octobre, le prix du contrat PIBOR 3 mois s'élève à 91,5 sur l'échéance de décembre et à 91,4 sur l'échéance de mars. Les taux d'intérêt implicites de ces contrats sont alors respectivement de 8,5 % et 8,6 %. Considérons un spéculateur qui anticipe une augmentation de l'écart, c'est-à-dire un accroissement de la pente positive de la courbe des taux. En achetant un contrat sur l'échéance de décembre et en vendant un contrat sur l'échéance de mars, il adopte une position qui lui permet de réaliser un gain quel que soit le niveau général des taux. Que l'écart s'affiche à (8,7 %, 9 %), ce qui traduit une élévation des taux d'intérêt, ou qu'il s'établissent à (8,1 %, 8,3 %), le dénouement de l'opération fait apparaître un bénéfice. Ici, le support de la spéculation n'est plus directement l'actif négocié. L'activité spéculative porte sur un portefeuille dont la valeur évolue suivant les variations du taux d'intérêt.

nomie du travail sous le nom de *« théorie de la recherche »* (Cf. Lippman & McCall [1976], Hey [1979], McKenna [1986]). L'approche consiste à rechercher les seuils de déclenchement (*valeur de réservation* dans la « théorie de la recherche ») à partir desquelles une action est automatiquement engagée. Le premier problème réside ainsi dans la détermination et la justification des valeurs optimales de ces seuils.

Le modèle est ensuite testé sur le marché obligataire. Le principe d'arbitrage spéculatif est en effet applicable si l'on dispose d'un ensemble de titres suffisamment homogènes pour que le prix de chacun de ses éléments connaisse une évolution parallèle. Il ne requiert, en effet, que l'existence d'une liaison stable entre le prix de deux actifs. Le cadre du marché obligataire qui satisfait cette condition est donc approprié pour permettre une simulation du modèle. Nous étudierons alors l'efficacité de la politique de *quasi arbitrage* sur les marchés des Obligations d'État de la RFA, du Canada et du Royaume Uni. Les résultats de la simulation constituent une mesure de l'efficience de ces marchés. Comme la simulation est réalisée à partir des seules chroniques des prix, la génération de gains positifs signifie que les marchés considérés ne respectent pas la condition d'efficience au sens faible.

Pour obtenir ces résultats, nous raisonnerons en plusieurs étapes. Nous établirons tout d'abord la relation entre les prix de deux rentes perpétuelles. Cette relation, qui correspond à une règle d'absence d'arbitrage, constitue le point de départ du modèle et sera présentée dans la section 1. Étant donnée cette règle, l'intervenant doit établir la procédure qui lui permettra au mieux de profiter d'une distorsion des cours. Si les erreurs de marché qui perturbent la relation suivent une loi de probabilité stationnaire, quelques hypothèses simples permettent la résolution du problème d'optimisation dynamique auquel est confronté le spéculateur. La section 2 présente alors la politique optimale du spéculateur.

Si le marché obligataire est proche du marché théorique des rentes perpétuelles, leurs actifs respectifs connaissent cependant des différences dont on doit, tout d'abord, mesurer l'importance. La section 3 est donc consacrée à l'étude des conditions d'applicabilité, au marché obligataire, de la politique d'arbitrage spéculatif. La section 4 présente enfin les supports et les résultats de la simulation. Chaque marché national intègre un grand nombre de lignes d'emprunts d'état. À partir du panel des obligations de long terme, nous rechercherons tous les couples d'obligations dont les prix peuvent être unis par une relation stable. L'application de la politique d'arbitrage spéculatif à l'ensemble de ces couples permet d'obtenir les résultats financiers présentés dans les tableaux de la section 4.3. Il ressort de la simulation que la politique de quasi arbitrage génère, en moyenne, des profits positifs. Les marchés considérés sont donc inefficients.

L'ensemble des méthodes numériques utilisées lors de l'implémentation du modèle est enfin présenté en annexe. Parce que la simulation suppose l'existence d'une relation stable entre le prix de deux actifs et la stationnarité de la distribution des écarts par rapport à cette relation, nous montrerons comment nous pouvons définir une relation simple entre le prix de deux obligations pour en tirer la série des écarts.

1. Cadre général du modèle

Une rente perpétuelle est un actif qui distribue à chaque période, et sur une durée infinie, un revenu constant d. Suivant les principes de l'actualisation (Cf. Williams [1938] ou Leroy [1989]), le prix théorique d'un tel actif se mesure comme la somme actualisée des revenus auxquels il donne droit. Soit $R_t(\tau)$ la fonction d'actualisation indiquant la valeur, à la date t, d'un franc disponible en τ. La valeur à la date t d'une rente perpétuelle – dont les caractéristiques seront repérées grâce à la lettre a – s'écrit :

$$P_t^a = \sum_{\tau=1}^{\infty} R_t(\tau)\, d^a \tag{1}$$

S'il connaît la fonction d'actualisation, le spéculateur peut calculer le prix normal de l'actif. Il en déduit une opportunité d'intervention quand le prix affiché s'écarte du prix théorique. Suivant le sens de la déviation, il réalisera une opération d'arbitrage en achetant (respectivement en vendant) l'actif et en plaçant les liquidités obtenues (respectivement, en s'endettant pour financer l'achat). Ce type d'opération nécessite cependant une information parfaite sur la structure à terme des taux d'intérêt. Or, en général, il est extrêmement difficile de disposer d'une telle information, il est donc excessivement dur de mettre en place de telles politiques[1]. Un agent peut cependant contourner le problème grâce à l'utilisation d'une règle d'absence d'arbitrage.

1.1. Définition de la règle d'absence d'opportunité d'arbitrage

Supposons que, sur le marché, il existe une rente perpétuelle similaire à la première et distribuant un revenu d^b. Le prix de cette seconde rente perpétuelle – repérée par la lettre b – sera théoriquement :

$$P_t^b = \sum_{\tau=1}^{\infty} R_t(\tau)\, d^b \tag{2}$$

Pour ce titre, comme pour le précédent, le prix théorique correspond à la valeur actualisée du flux de revenu. Or, la courbe qui permet l'actualisation est la même pour les deux actifs. Il est alors possible de définir un lien entre le prix théorique des deux titres. Posons $\alpha = d^a/d^b$. Ce rapport nous donne également une relation entre les prix des deux rentes. Les équations (1) et (2) nous permettent en effet de déduire :

1. On peut se référer, à ce sujet, aux travaux présentés par McCulloch [1975] sur les difficultés de mesure de la courbe des taux d'intérêt.

$$\frac{P_t^a}{P_t^b} = \frac{d^a \sum_{\tau=1}^{\infty} R_t(\tau)}{d^b \sum_{\tau=1}^{\infty} R_t(\tau)} = \frac{d^a}{d^b} = \alpha \tag{3}$$

Parce que la courbe d'actualisation affecte les deux rentes de manière identique, le prix des actifs doit conserver un lien qui dépend du rapport entre les revenus d^a et d^b. Étudier le prix de deux actifs identiques permet alors de faire abstraction de la courbe d'actualisation, il est possible d'obtenir un indicateur du prix théorique d'un titre en utilisant comme référence le prix d'un actif similaire. On notera qu'une relation de ce type peut être établie pour tout couple de rentes perpétuelles, et ce, indépendamment de la valeur future des taux d'intérêt. Elle s'impose sur le marché si l'on accepte les règles d'actualisation. Cette relation fournit alors au spéculateur un élément de décision à partir duquel il va fonder son action. Cette règle va donc jouer le rôle de condition d'absence d'opportunité d'arbitrage.

1.2. Relation empirique entre les prix sur des marchés cloisonnés

Considérons un ensemble de marchés sur lesquels sont négociées des rentes perpétuelles et supposons que ces marchés soient cloisonnés. Les prix des actifs a et b sont alors déterminés indépendamment l'un de l'autre et varient suivant les évolutions de l'offre et de la demande de chaque rente. Le prix est donc influencé par le comportement des investisseurs dont l'intervention génère à chaque période un excès d'offre ou de demande. De manière instantanée, les prix des rentes vont subir des distorsions aléatoires. En notant θ^i la perturbation aléatoire qui affecte le titre i, les relations (1) et (2) peuvent être réécrites sous la forme :

$$P_t^i - \theta_t^i = \sum_{\tau=1}^{\infty} R_t(\tau)\, d^i$$

La relation exacte entre le prix de l'actif a et celui de l'actif b devient alors :

$$P_t^a = \alpha P_t^b + (\alpha \theta_t^b - \theta_t^a) \quad \text{soit :} \quad P_t^a = \alpha P_t^b + \varepsilon_t \quad \text{avec} \quad \varepsilon_t = \alpha \theta_t^b + \theta_t^a \tag{4}$$

Par hypothèse, nous considérerons que les θ^i correspondent à des variables aléatoires indépendantes distribuées symétriquement et d'espérance nulle. La combinaison linéaire de ces perturbations correspond donc également à une variable aléatoire distribuée symétriquement et de moyenne nulle, nous noterons $F(\varepsilon)$ la fonction de répartition de cette variable. La présence de cette perturbation ε_t correspond à une violation de la condition d'absence d'opportunité d'arbitrage, elle indique une distorsion des cours à partir de laquelle les spéculateurs vont pouvoir intervenir. L'observation de l'écart ε_t permet, en effet, de juger de la surévaluation ou de la sous-évaluation relative des deux actifs.

$$\begin{cases} \text{si} \quad \varepsilon_t > 0 \Rightarrow P_t^a > \alpha P_t^b & \text{l'actif } a \text{ est cher par rapport à l'actif } b \\ \text{si} \quad \varepsilon_t < 0 \Rightarrow P_t^a < \alpha P_t^b & \text{l'actif } b \text{ est cher par rapport à l'actif } a \end{cases}$$

La difficulté pour l'observateur des marchés consiste à repérer ce qu'il faut considérer comme un écart ε_t suffisant pour déclencher l'action. Le spéculateur doit maintenant définir une politique lui permettant de profiter au mieux des écarts de cours.

1.3. Définition du comportement spéculatif

Le modèle développé ici permet la mise en place d'une procédure de décision élémentaire. L'agent rationalisera son comportement s'il détermine des valeurs de réservation, portant sur les écarts, tels que tout franchissement par ε_t conduit à une intervention d'*arbitrage spéculatif*. Notons x et y ces seuils. Le spéculateur va alors adopter la politique suivante :

– Si $\varepsilon_t < x$, l'agent acquiert le portefeuille X grâce aux opérations suivantes :

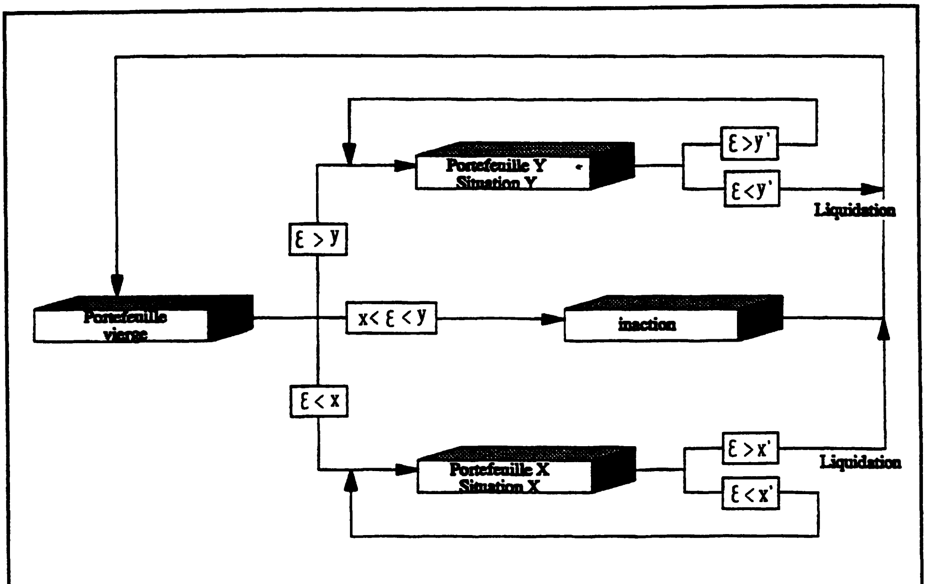
$$\text{PORTEFEUILLE } X \begin{Bmatrix} \text{achat d'une quantité } N_a \text{ de l'actif } a \\ \text{vente d'une quantité } N_b \text{ de l'actif } b \end{Bmatrix} \rightarrow \text{Situation } X$$

– La symétrie de la distribution de ε_t permet d'envisager un autre type de position. Si $\varepsilon_t > y$, le portefeuille Y sera généré par les actions suivantes :

$$\text{PORTEFEUILLE } Y \begin{Bmatrix} \text{achat d'une quantité } N_a \text{ de l'actif } a \\ \text{vente d'une quantité } N_b \text{ de l'actif } b \end{Bmatrix} \rightarrow \text{Situation } Y$$

Une fois la position d'*arbitrage spéculatif* adoptée, le problème consiste à déterminer les circonstances qui conduiront à la liquidation de la position. À nouveau, l'agent peut adopter une stratégie faisant intervenir une valeur de réservation. Dans la situation X, l'agent peut choisir une valeur x' qui le conduira au dénouement de la position. Ainsi, si $\varepsilon_t > x'$, l'agent liquidera sa position. Il pourra alors recommencer la procédure de recherche. Si la borne n'est pas franchie, le spéculateur conserve sa position dans l'attente d'une nouvelle cotation et dans l'espoir d'un rapport de prix favorable.

Dans le cas symétrique, l'opérateur engagé dans une situation Y choisira une valeur y' telle que tout franchissement par défaut de ε_t induira la liquidation du portefeuille. Une fois l'opération dénouée, le spéculateur retrouve la situation originelle caractérisée par un portefeuille vierge. L'analyse dynamique du comportement du spéculateur est décrite par le graphique suivant :



Graphique 1

La situation initiale de l'opérateur correspond au départ du circuit. L'observation de ε_t conduit à trois cas possibles. Si l'écart ε_t est suffisant, l'agent va atteindre l'une des situations X et Y envisagées précédemment. Dans le cas contraire, ε_t étant compris entre x et y, le spéculateur préfère ne pas intervenir. Dans ce dernier cas, il se retrouve alors dans une situation caractérisée par un portefeuille vierge, situation identique à la situation initiale. Une flèche indique ce retour au point de départ. Si l'agent adopte une position, une même structure de boucle apparaît. L'intervenant observe les écarts ε_t, s'il décide de liquider son portefeuille il revient à la position originelle caractérisée par un portefeuille vierge, s'il conserve sa position le problème de liquidation se pose à nouveau à lui.

Le choix des valeurs de réservation correspond à un désir de maximiser le gain de l'opération. Quitter la position trop tôt ou attendre trop longtemps conduit à réduire les profits réalisés. L'agent va donc déterminer ces bornes de manière optimale.

2. Politique optimale du spéculateur

La politique optimale du spéculateur sera obtenue grâce à la maximisation de l'espérance de gain liée à la politique d'intervention que nous venons de définir. Afin de caractériser cette politique optimale, nous devons spécifier le comportement du spéculateur.

2.1. Spécificité de la politique d'échange

Le principe général de l'*arbitrage spéculatif* consiste en une suite d'opérations croisées. Si le spéculateur détecte un écart important entre les cours de deux rentes, il achètera l'actif sous-évalué et vendra simultanément l'actif surévalué. La position sera dénouée dès que l'écart observé prend une valeur permettant une prise de bénéfice. Ce mode d'intervention suppose donc que l'on soit systématiquement en mesure de vendre un actif surévalué. Ceci est possible si l'on dispose d'un portefeuille important ou si l'on a la possibilité de vendre un actif à découvert.

Dans ce modèle nous supposerons qu'un agent ne peut réaliser de vente à découvert. L'opérateur dispose cependant de la possibilité d'emprunter les titres nécessaires à ses opérations (la pratique de marché dite *« vente à réméré »* permet ce type d'emprunt). Cette possibilité permet alors à l'opérateur de vendre des actifs qu'il ne possède pas dans son portefeuille et de réaliser les opérations d'*arbitrage spéculatif*. Elle s'accompagne cependant de contraintes financières. Elle entraîne tout d'abord un coût de refinancement *RF*. Nous supposerons que ce coût est constant et est payé avec un décalage d'une période pour toute position de *quasi-arbitrage* non nulle[1]. Elle impose également à l'emprunteur de rembourser au propriétaire de l'actif les flux de revenus versés par le titre. À chaque période, l'emprunteur d'un titre a doit alors payer le montant d^a au prêteur. Ces flux influencent donc la politique optimale. L'opérateur peut cependant adopter une démarche qui en réduit l'impact.

La pratique de l'emprunt de titres signifie en effet que le spéculateur peut réaliser des ventes au comptant à partir de titres qui ne composent pas son portefeuille. Cela signifie également que l'opérateur va bénéficier immédiatement des fruits de la vente de ses actifs. Comme il réalise simultanément un achat et une vente il peut tenter de faire coïncider ces flux de paiement.

Nous avons supposé que l'agent échangeait les quantités N_a et N_b d'actifs lors de ses transactions, les flux de paiement qui en résultent correspondent à la compensation du montant des achats et des ventes. Comme les transactions sont croisées, elles génèrent des flux CF_t distincts. Si l'opération consiste en un achat de l'actif b et une vente de l'actif a, (transaction de type 1 qui correspond à la fois à la constitution du portefeuille Y et à la liquidation du portefeuille X), le cash flow sera :

1. L'emprunt à réméré (qui constitue le support de l'emprunt de titre) est un prêt de liquidités garanti par la livraison d'un volume de titres. Au terme de l'opération, l'emprunteur peut reprendre ses titres contre le remboursement du principal majoré d'un taux d'intérêt correspondant au taux du marché moins 1/4. Il récupère alors des actifs dont le prix a évolué en fonction des revenus versés et du jeu de l'offre et de la demande. Pour le prêteur de liquidités, cette procédure permet la mise en œuvre des opérations de vente à découvert. Le coût d'opportunité de l'emprunt de titres correspond alors à un taux d'intérêt de 1/4 payé sur la valeur des titres empruntés. Comme la politique adoptée conduit à échanger des quantités constantes d'actifs et si le prix des rentes est suffisamment stable, ce coût d'opportunité peut être considéré comme constant. Nous supposerons pour simplifier que ce coût est payé à chaque période.

$CF_t^1 = N_a P_t^a - N_b P_t^b$. Dans le cas inverse, (transaction de type 2), le cash flow s'écrit : $CF_t^2 = N_b P_t^b - N_a P_t^a$. Si le spéculateur désire minimiser les flux nets investis, il peut faire coïncider ses paiements. Il adoptera alors une stratégie en terme de volume telle que : $N_b = \alpha N_a$, et, dans ces conditions, les cash flow s'écrivent :

$$CF_t = P_t^a N_a - \alpha P_t^b N_a = \begin{cases} N_a \varepsilon_t & \text{transaction de type 1} \\ -N_a \varepsilon_t & \text{transaction de type 2} \end{cases}$$

Lors de chaque opération, les flux de paiements se compensent. Les flux nets sont marginaux en regard des positions adoptées, la procédure génère donc un effet de levier important. Cette politique présente en outre deux avantages supplémentaires.

La compensation des paiements permet tout d'abord de n'entraîner en moyenne que des paiements positifs pour le spéculateur. En d'autres termes, l'opérateur qui prend une position ou liquide son portefeuille bénéficie d'un flux positif de liquidités. En effet, une transaction de type 1 est réalisée uniquement si ε_t est supérieur à une valeur de réservation donnée ($\varepsilon_t > y$ ou $\varepsilon_t > x'$). En moyenne, la valeur de ε_t qui induit la transaction est alors positive. Le cash flow CF_t^1 a donc une espérance positive. De même, la transaction de type 2 est réalisée pour une valeur moyenne négative de ε_t. Le cash flow $CF_t^2 = -N_a \varepsilon_t$ est donc également positif en moyenne. La politique de quantité adoptée par l'agent lui permet d'espérer une rémunération positive lors de chaque transaction.

Cette politique présente une autre propriété intéressante. Nous avons vu, en effet, que les rentes perpétuelles distribaient un revenu à chaque période, l'achat d'une rente i génère le flux d^i alors que la vente du titre j implique le flux $-d^j$. Or, la stratégie adoptée permet une compensation des flux de paiement intermédiaires. En effet, étant donnée la valeur $\alpha = d^i/d^j$, les revenus périodiques produits par les rentes, achetées et vendues, coïncident. Le portefeuille adopté ne génère donc pas de revenus nets. Les valeurs de ces rémunérations quotidiennes n'interviendront donc pas dans la détermination de la politique optimale. Seules vont jouer un rôle les évolutions des écarts entre les prix des rentes. Cette stratégie conduit donc à restreindre l'ordre de grandeur des paiements et à l'imiter ces paiements aux seules dates de réalisation des échanges.

2.2. Définition des espérances de gain

Il est maintenant possible de définir de manière plus formelle l'espérance de gains liée la politique de notre opérateur. Pour cela, nous utiliserons les notations suivantes :

Notations :

Nous noterons $WW(t)$ le rendement de la politique suivie par le spéculateur quand son portefeuille est vierge, l'espérance à la date t de ce rendement sera noté $W(t)$.

L'opérateur qui a adopté une position correspondant au portefeuille X attend, à la date t, la rémunération $XX(t)$. L'espérance de gain associée en t à la situation X sera notée $X(t)$.

La rémunération en t, du spéculateur dans la situation Y, sera notée $YY(t)$. La valeur espérée du rendement du portefeuille Y s'écrit $Y(t)$.

Nous noterons enfint $\beta_t = (1 + r_t)^{-1}$ le coefficient d'actualisation.

2.2.1. Espérance de gain associée au portefeuille vierge

L'agent dont le portefeuille est vierge observe à chaque période la valeur de l'écart ε_t et prend une décision. Si l'écart observé ε_t est inférieur à x, l'agent va réaliser une transaction de type 2. Il constitue le portefeuille X en achetant le titre a et en vendant l'actif b, il paye alors $N_a\varepsilon_t$. À la période suivante, il se trouvera dans la situation X dont l'espérance de rémunération est $X(t+1)$. En revanche, si l'écart est supérieur à y, le spéculateur va prendre la position inverse. Il constitue le portefeuille Y en achechant N_b rentes b et en vendant N_a rentes a. Cette opération lui procure le flux de revenu $N_a\varepsilon_t$, et lui permet d'espérer percevoir le revenu $Y(t+1)$ de la liquidation future du portefeuille. Dans le cas où le spéculateur reste inactif, $x < \varepsilon_t < y$, il conserve son portefeuille vierge et attend une opportunité d'intervention à la période suivante. La valeur présente du rendement associé à cette recherche de position correspond à la valeur $\beta_t W(t+1)$. Nous pouvons alors définir la valeur de la rémunération $WW(t)$:

$$WW(t) = \begin{cases} -N_a\varepsilon + \beta_t X(t+1) & \text{si} \quad \varepsilon_t < x \\ \beta_t W(t+1) & \text{si} \quad y > \varepsilon_t > x \\ N_a\varepsilon + \beta_t Y(t+1) & \text{si} \quad \varepsilon_t > y \end{cases} \tag{5}$$

À la date t, l'espérance de la rémunération associée à la recherche de position s'écrit :

$$\begin{aligned} W(t) &= E\big(WW(t)\big) \\ &= \int_{-\infty}^{x} \big(-N_a\varepsilon + \beta_t X(t+1)\big)\, \mathrm{d}F(\varepsilon) + \int_{x}^{y} \beta_t W(t+1) \mathrm{d}F(\varepsilon) \\ &\qquad + \int_{y}^{\infty} \big(N_a\varepsilon + \beta_t Y(t+1)\big)\, \mathrm{d}F(\varepsilon) \\ &= \beta_t W(t+1)\big(F(y) - F(x)\big) + \beta_t Y(t+1)\big(1 - F(y)\big) + \beta_t X(t+1)\, F(x) \\ &\qquad + \int_{-\infty}^{x} N_a\varepsilon\, \mathrm{d}F(\varepsilon) - \int_{y}^{\infty} N_a\varepsilon\, \mathrm{d}F(\varepsilon) \end{aligned} \tag{6}$$

Cette équation indique que l'espérance de gain du spéculateur dont le portefeuille est vierge dépend des circonstances qui conduisent à la liquidation de la position. À chaque type de portefeuille correspond une rémunération anticipée que nous devons maintenant établir.

2.2.2. *Espérance de gain associée au portefeuille Y*

Si après observation de l'écart ε_t le spéculateur dans la situation Y décide de liquider la position (ε_t est inférieur à y'), il paye le coût de refinancement, vend l'actif b, rachète l'actif a et perçoit $-N_a\varepsilon_t$. Comme nous étudions uniquement le comportement d'un spéculateur professionnel, celui-ci se retrouve, une période plus tard, dans une situation caractérisée par un portefeuille vierge, ce qui correspond à la situation originelle dont on sait que la valeur présente anticipée est $\beta_t W(t+1)$. S'il conserve sa position, il paye uniquement le coût de refinancement RF et retrouve la situation Y à la période suivante. $YY(t)$ peut donc être écrit :

$$YY(t) = \begin{cases} -RF - N_a\varepsilon + \beta_t W(t+1) & \text{si } \varepsilon_t < y' \\ -RF + \beta_t Y(t+1) & \text{si } \varepsilon_t > y' \end{cases} \tag{7}$$

L'espérance de rémunération pour un agent placé dans la situation Y est alors :

$$\begin{aligned} Y(t) &= E\big(YY(t)\big) \\ &= \int_{-\infty}^{y'} \big(-RF - N_a\varepsilon + \beta_t W(t+1)\big)\, \mathrm{d}F(\varepsilon) \\ &\qquad + \int_{y'}^{\infty} \big(-RF + \beta_t Y(t+1)\big)\, \mathrm{d}F(\varepsilon) \\ &= -RF + \beta_t W(t+1)\, F(y') + \beta_t Y(t+1)\big(1 - F(y')\big) - \int_{-\infty}^{y'} N_a\varepsilon\, \mathrm{d}F(\varepsilon) \end{aligned} \tag{8}$$

2.2.3. *Espérance de gain associée au portefeuille X*

Enfin, envisageons le comportement d'un agent qui dispose du portefeuille X à la date t. Ce spéculateur liquidera la position si la distorsion ε_t est supérieure à x'. Dans ce cas, il perçoit l'écart ε_t pour chaque rente a vendue, paye le coût de refinancement et attend, à la période suivante, la rémunération de la politique de prise de position $W(t+1)$. Si ε_t est insuffisant, l'agent conservera sa position. Il paye alors le coût de refinancement, et attend la rémunération de la politique de liquidation $X(t+1)$. $XX(t)$ a pour valeur :

$$XX(t) = \begin{cases} -RF - N_a\varepsilon + \beta_t W(t+1) & \text{si } \varepsilon_t < x' \\ -RF + \beta_t X(t+1) & \text{si } \varepsilon_t > x' \end{cases} \tag{10}$$

L'espérance de rémunération pour un agent placé dans la situation X sera alors :

$$\begin{aligned} X(t) &= E\big(XX(t)\big) \\ &= \int_{x'}^{\infty} \big(-RF - N_a\varepsilon + \beta_t W(t+1)\big)\, \mathrm{d}F(\varepsilon) \\ &\qquad + \int_{-\infty}^{x'} \big(-RF + \beta_t X(t+1)\big)\, \mathrm{d}F(\varepsilon) \\ &= -RF + \beta_t W(t+1)\big(1 - F(x')\big) + \beta_t X(t+1)\, F(x') + \int_{x'}^{\infty} N_a\varepsilon\, \mathrm{d}F(\varepsilon) \end{aligned} \tag{10}$$

Le problème du spéculateur consiste maintenant à maximiser la rémunération de ses interventions, il doit déterminer les valeurs optimales des *bornes de réservation* $(x,\ x',\ y,\ y')$ qui maximisent son espérance de gain.

2.3. Résolution optimale du problème

L'analyse en terme de boucle permet une simplification du problème si les espérances de rendements liées à une prise position ou à la liquidation de cette même position restent identiques au cours du temps. Dans ce cas, en effet, il est possible d'assimiler les différentes variables $(X,\ Y,\ W)$ constituant les équations (6), (8) et (10). Trois hypothèses sont nécessaires pour admettre cette stationnarité :

- H1 : le coefficient d'actualisation β_t est constant. Cette hypothèse est forte en ce qu'elle correspond à une structure figée des taux d'intérêt. Elle peut néanmoins être acceptée si l'on observe que l'activité de *quasi-arbitrage* est conduite dans des intervalles de temps restreints pendant lesquels le taux d'intérêt appliqué est négligeable et la valeur du coefficient d'actualisation est très proche de l'unité.
- H2 : la distribution de probabilités des ε_t est indépendante du temps. Pour accepter cette hypothèse, il suffit de considérer que les marchés intègrent une population d'intervenants stable. L'action des investisseurs sur le prix de chaque rente implique alors une distribution des perturbations θ_i stationnaire.
- H3 : la capacité d'intervention du spéculateur reste identique au cours du temps. L'agent n'est jamais ruiné et ne modifie jamais la quantité de titres échangée. Comme, sur le marché financier, les interventions de *quasi-arbitrage* sont le fait de banques ou sociétés de bourse, le résultat de leurs opérations ne modifie pas leur capacité d'intervention et le problème posé par leur ruine éventuelle peut être éliminé.

Sous ces hypothèses, nous pouvons redéfinir les espérances de gain. Puisque ces dernières sont indépendantes du temps, nous supprimerons les datations. Par factorisation de l'équation (8), l'espérance de rendement pour le trader dans la situation Y devient :

$$Y = \frac{-RF + \beta WF(y') - \int_{-\infty}^{y'} N_a \varepsilon \, \mathrm{d}F(\varepsilon)}{1 - \beta\left(1 - F(y')\right)} \tag{11}$$

De même, l'équation (10) permet d'écrire l'espérance de rendement pour un trader dans la situation X :

$$X = \frac{-RF + \beta W\left(1 - F(x')\right) + \int_{x'}^{\infty} N_a \varepsilon \, \mathrm{d}F(\varepsilon)}{1 - \beta F(x')} \tag{12}$$

La substitution de ces deux équations dans l'équation (6) conduit à la définition de l'espérance de gain W :

$$W = \frac{-\beta RF A + N_a\left(-\int_{-\infty}^{x} \varepsilon \, \mathrm{d}F(\varepsilon) + \int_{y}^{\infty} \varepsilon \, \mathrm{d}F(\varepsilon) + \beta B\right)}{1 - \beta\left(F(y) - F(x)\right) - \beta^2 C} \tag{13}$$

$$\text{avec} \begin{cases} A = \dfrac{1 - F(y)}{1 - \beta\left(1 - F(y')\right)} + \dfrac{F(x)}{1 - \beta F(x')} \\ B = \dfrac{-\left(1 - F(y)\right)\int_{-\infty}^{y'} \varepsilon \, \mathrm{d}F(\varepsilon)}{1 - \beta\left(1 - F(y')\right)} + \dfrac{F(x)\int_{x'}^{\infty} \varepsilon \, \mathrm{d}F(\varepsilon)}{1 - \beta F(x')} \\ C = \dfrac{F(y')\left(1 - F(y)\right)}{1 - \beta\left(1 - F(y')\right)} + \dfrac{\left(1 - F(x')\right) F(x)}{1 - \beta F(x')} \end{cases}$$

La politique optimale du spéculateur est définie par maximisation de cette fonction par rapport aux valeurs de réservation. Soit :

$$[x^*, x'^*, y^*, y'^*] = \operatorname{Arg}\left\{\max_{[x, x', y, y']} W(x, x', y, y')\right\}$$

Dans le cas général, il n'est pas possible de démontrer la concavité de $W(x, x', y, y')$. Les calculs réalisés dans le cadre de la simulation montrent cependant que ces bornes existent et que la fonction satisfait les conditions de maximisation. L'agent dispose donc d'une politique qui lui permet de maximiser son gain intertemporel en profitant des écarts de cours.

3. Application au marché obligataire

La performance du modèle d'intervention précédent peut être mesurée dans le cadre du marché obligataire si l'on parvient à définir une relation linéaire entre le prix de deux obligations [Cf. équation (4)]. Du fait des caractéristiques propres aux obligations, cette relation n'est pas immédiate. L'utilisation de règles d'approximation permet néanmoins d'obtenir une relation de ce type. La pratique de marché du coupon couru permet en effet d'assimiler le revenu annuel d'une obligation à un mécanisme de versement quotidien. De même, pour des obligations de très long terme, la valeur de liquidation joue un rôle marginal dans la fixation du prix et le rapport entre le prix de deux obligations dont l'échéance est voisine peut être expliqué par le poids respectif de leurs coupons.

3.1. Principe du coupon couru

Lors de l'achat d'une obligation, le paiement de l'actif est divisé en deux parties : le prix coté $P(t)$, dit *pied de coupon,* et le coupon couru $Cc(t)$. Ce coupon couru correspond à la rémunération de l'obligation. Il se calcule comme la valeur du coupon C divisée par le nombre de jours Nbt, compris entre la date du dernier coupon versé et la date du prochain coupon (soit le nombre de jours constituant l'année civile de référence), le tout multiplié par le nombre de jours écoulés depuis la dernière tombée de coupon $Nbe\,(t)$. Lors d'un versement de coupon, cette prime se réinitialise et prend une valeur nulle. Le coupon couru s'écrit donc :

$$\begin{cases} Cc\,(t) = C\,\dfrac{Nbe\,(t)}{Nbt} & \text{si } t \text{ n'est pas la date de tombée de coupon} \\ Cc\,t) = 0 & \text{si le coupon est versé à la date } t \end{cases}$$

La valeur du coupon couru évolue entre deux dates de tombée de coupon comme une suite arithmétique de raison C/Nbt. Si l'on exclut les variations du prix de l'obligation (le prix, pied de coupon, varie en fonction des évolutions du taux de l'intérêt), acheter et vendre une obligation à un jour d'intervalle génère une rémunération que l'on peut assimiler à une constante. Ainsi payer le coupon couru et le recevoir une période plus tard entraîne le revenu actualisé R suivant[1] :

$$R = -\,Cc\,(t) + BCc\,(t+1) = \beta\,\frac{C}{Nbt} - (1-\beta)\,Cc\,(t)$$

Comme sur une journée, le taux d'actualisation β est proche de 1, par approximation, cette rémunération est proche de $\beta C/Nbt$. Le portage sur une journée de l'obligation considérée donne donc lieu à la perception d'un revenu que l'on peut considérer comme fixe.

3.2. Remboursement des obligations à l'échéance

En notant $R_t(\tau)$ la valeur à la date t d'un franc disponible à la date τ et en admettant l'hypothèse simplificatrice d'une rémunération quotidienne des obligations, le prix théorique de l'obligation A, à la date t, s'écrit :

$$P_t^a = R_t\,(t_m)\,100 + \sum_{i=1}^{t_m - t} R_t\,(t+i)\,\frac{C^a}{Nbt}$$

Considérons alors deux obligations A et B remboursables à une date identique. Le rapport α_t du prix de ces obligations à la date t, s'écrit :

$$\alpha\,(t) = \frac{R_t\,(t_m)\,100 + \sum_{i=1}^{t_m - t} R_t\,(t+i)\,C^a/Nbt}{R_t\,(t_m)\,100 + \sum_{i=1}^{t_m - t} R_t\,(t+i)\,C^b/Nbt}$$

Ce rapport dépend de la fonction d'actualisation $R_t\,(t+i)$ et de l'éloignement par rapport à la date de maturité t_m. Or, le modèle d'arbitrage spéculatif requiert la stabilité

1. Si la période de portage intègre la date de tombée de coupon, le coupon couru s'annulera pour compenser la distribution de revenus. Pour un agent qui a acquis le titre à la période précédente (achat à la date t), le gain lié à la double transaction s'écrit également :

$$R = \beta C - Cc\,(t) = \beta\,\frac{c}{Nbt} - (1-\beta)\,Cc\,(t)$$

de la relation entre le prix des actifs. La dépendance temporelle du paramètre α interdit l'utilisation de la règle optimale d'achat.

Une solution simple permet cependant de résoudre cette difficulté. L'étude de la fonction α (t) révèle, en effet, l'existence d'une branche asymptotique. Plus la date t est éloignée de la date de remboursement, plus la valeur de la fonction α (t) approche le rapport C^a/C^b. En outre, il est facile de vérifier que la pente de la courbe est d'autant plus faible que l'écart entre les coupons est peu important. Sous certaines conditions, ces propriétés permettent alors d'assimiler la fonction α (t) à une droite horizontale. Le rapport α (t) du prix de deux actifs peut être assimilé à une constante sur un intervalle de temps $[t_1, t_2]$ donné si :

- L'intervalle de temps $[t_1, t_2]$ est court.
- Les titres ont une durée de vie importante (la maturité de l'actif est très éloignée).
- L'écart entre les coupons est faible.

Prendre en compte des actifs dont l'échéance est éloignée permet également de supposer que le prix se justifie plus largement par les flux de coupons que par la valeur de remboursement final. Le rapport des prix s'explique alors par le rapport des coupons, il est possible de faire abstraction du remboursement à l'échéance. De ce fait, si l'on admet l'analogie entre le principe de coupon couru et la rémunération quotidienne des obligations, le marché obligataire peut être apparenté au marché théorique des rentes perpétuelles. Il permet l'application de la règle optimale d'arbitrage spéculatif.

4. Simulation

La présentation de la simulation sera réalisée en 4 étapes. La politique optimale d'arbitrage spéculatif est testée sur les ensembles d'obligations des marchés de la RFA, du Canada et de la Grande Bretagne. La présentation du panel sera suivie par l'exposé des hypothèses de calcul utilisées pour déterminer les *bornes de réservation* optimales et les flux de revenus issus de la politique. Les résultats de la simulation seront présentés dans des tableaux interprétés en fin de section.

4.1. Présentation du panel d'obligations

L'efficacité du modèle d'arbitrage spéculatif est mesurée à partir des cours de clôture des Obligations d'État des marchés allemand, canadien et anglais (source DATASTREAM). Les séries intègrent des données quotidiennes qui débutent au premier janvier 1987, pour les titres les plus anciens, et s'échèvent au 22 janvier 1990. Les tableaux 1 et 2 indiquent le nom et les caractéristiques des titres utilisés dans notre simulation. La dernière colonne des tableaux indique le nombre de relations stables dans lesquelles un actif est impliqué.

Afin de garantir un panel important de relations tout en conservant les conditions nécessaires portant sur les échéances des titres, seules seront retenues les obligations dont la date de maturité est postérieure à 1997. De même, pour garantir la liquidité des marchés considérés, les lignes d'emprunt dont le montant émis est ingérieur à 800 millions de francs sont rejetées du panel[1]. À partir de cet ensemble d'obligations la simulation recherche toutes les relations stables pouvant correspondre à une condition d'absence d'arbitrage. Chaque combinaison de titres appartenant à un même marché fait l'objet d'une mesure d'applicabilité du test. Les séries ne présentant pas les caractéristiques de stabilité requises par le modèle sont alors rejetées. Pour les séries qui satisfont les conditions d'applicabilité, l'extraction de la série des écarts permet d'obtenir la distribution empirique des résidus.

Tableau 1

Pays	Code DATASTREAM	Coupon	Maturité	Emission	Montant émis (M)	Nb rl
GB	955342	8 1/2 %	28/01/00	28/04/87	1320	1
GB	948525	9 %	03/03/00	14/03/86	1550	1
GB	915616	13 %	14/07/00	25/06/80	1817	1
GB	928352	10 %	26/02/01	17/10/85	1050	1
GB	915548	14 %	22/05/01	28/11/79	1250	0
GB	965940	9 3/4 %	10/08/01	10/02/84	801	2
GB	915453	12 %	22/01/02	02/03/78	1600	1
GB	923806	9 3/4 %	27/08/02	15/08/85	1450	5
GB	955340	9 %	13/11/02	02/03/87	1300	5
GB	915464	13 1/4 %	25/07/03	22/02/79	1800	0
GB	935596	10 %	08/09/03	24/01/86	1000	2
GB	915480	11 1/2 %	19/03/04	23/05/79	1900	0
GB	948069	9 1/2 %	25/10/04	25/10/84	1100	2
GB	948054	9 1/2 %	18/04/05	18/10/85	1880	0
GB	955510	10 1/2 %	20/09/05	14/01/85	1050	1
GB	915455	12 1/2 %	21/11/05	23/11/78	2200	5
GB	924802	8 %	05/10/06	20/10/71	1800	1
GB	915503	11 3/4 %	22/01/07	25/07/79	3150	4

1. Un volume de titres insuffisant implique un marché peu actif. Dans ce cas, l'atomicité du marché n'est plus garantie et les cours peuvent varier sous l'impact d'une demande importante. De larges distorsions peuvent intervenir entre les cours de ces titres sans que l'activité de quasi-arbitrage puisse être mise en œuvre.

Pays	Code DATASTREAM	Coupon	Maturité	Emission	Montant émis (M)	Nb rl
GB	955295	8 1/2 %	16/07/07	16/07/86	1400	1
GB	915614	13 1/2 %	26/03/08	17/04/80	1250	4
GB	955330	9 %	13/10/08	11/02/87	1800	1
RFA	744712	6 3/8 %	20/08/97	20/08/87	4000	5
RFA	751180	6 3/4 %	22/09/97	22/09/87	4000	5
RFA	751679	6 3/8 %	20/10/97	20/10/87	2000	5
RFA	752184	6 3/8 %	20/01/98	20/01/88	5000	5
RFA	753081	6 1/4 %	20/02/98	20/02/88	4000	5
RFA	725289	6 1/8 %	20/03/98	20/03/88	4000	0
RFA	723887	6 %	20/04/98	20/04/86	3000	2
RFA	797020	6 1/2 %	20/05/98	20/05/88	4000	6
RFA	727551	6 %	20/10/98	20/10/86	4000	1
CANADA	954892	9 1/2 %	01/10/01	01/04/76	1625	1
CANADA	996707	10 %	01/05/02	01/05/79	1850	5
CANADA	994819	11 1/4 %	15/12/02	15/06/80	1625	2
CANADA	985999	11 3/4 %	01/02/03	01/02/80	2700	1
CANADA	996704	10 1/4 %	01/02/04	01/02/79	2200	1
CANADA	972027	12 %	01/03/05	01/03/83	1775	4
CANADA	972821	12 1/4 %	01/09/05	19/07/83	1375	4
CANADA	988202	12 1/2 %	01/03/06	28/02/84	975	4
CANADA	970319	14 %	01/10/06	15/05/84	1025	4
CANADA	755916	10 %	16/12/07	16/12/85	1350	0
CANADA	704873	11 %	01/06/09	18/09/85	925	1
CANADA	703510	10 3/4 %	01/10/09	04/06/85	1000	1
CANADA	722531	9 %	18/06/09	18/06/86	1975	0

4.2. Hypothèses générales de calcul

Pour procéder à la simulation il reste à définir les bornes d'interventions optimales. La détermination de ces bornes permet le repérage des dates d'intervention. Les flux induits par les transactions successives sont alors comparés aux frais financiers pour donner un résultat global par transaction.

4.2.1. Détermination des bornes optimales

Grâce aux procédures de calcul exposées en annexe, la simulation isole parmi l'ensemble des relations obtenues celles qui permettent la mise en place du modèle. Pour les couples d'actifs qui satisfont les propriétés requises, la simulation recherche alors les *valeurs de réservation* (x, y, x', y') qui optimisent l'espérance de gain, $W(x, y, x', y')$, du modèle d'arbitrage spéculatif [Cf. équation (13)]. Pour établir cet optimum, les différents paramètres exogènes sont supposés prendre les valeurs suivantes :

- Le coût de refinancement RF correspond aux frais d'emprunt de l'actif sur le marché du réméré. Il est calculé sur la base d'un taux annuel de 1/4 payé sur le montant des titres empruntés. Pour simplifier le calcul, nous supposerons que les transactions sont réalisées sur des titres dont le prix s'élève à 100 FF en moyenne[1]. L'emprunt de titres entraîne alors des frais financiers quotidiens pour un montant $RF = 25 \,.\, 10^{-4}/365$.
- Le coefficient d'actualisation retenu est établi sur la base d'un taux d'intérêt annuel de 12 %. Le coefficient qui permet d'établir la valeur actuelle d'un franc disponible demain sera donné par la formule $\beta = \left(1 + (0{,}12/365)\right)^{-1}$.
- La loi de distribution des ε_t est obtenue par la méthode présentée en annexe et nous poserons enfin $N_a = 1$.

Mathématiquement, les valeurs (x, y, x', y') sont distinctes. On notera cependant que les résultats de l'optimisation conduisent à une identification des seuils d'entrée et de sortie des positions. Étant donnés les coûts de refinancement et d'opportunité que nous avons adoptés et la distribution empirique des écarts, les seuils optimaux (x, x') et (y, y') se différencient uniquement à partir de la sixième décimale. Les seuils dont le franchissement conduit à la constitution d'un portefeuille peuvent donc être assimilés à ceux qui impliquent la liquidation de la position.

Les valeurs de réservation obtenues indiquent les seuils d'intervention de l'opérateur. Une position est supposée être contractée au premier écart ε_t supérieur à y (respectivement inférieur à x), elle sera liquidée au premier écart inférieur à y' (respectivement supérieur à x'). Aucune position ne peut être engagée tant que le portefeuille du spéculateur n'est pas vierge.

1. Cette mesure du coût est approximative, nous utiliserons la vraie valeur des frais de refinancement lors de l'évaluation des résultats de la politique.

4.2.2. Détermination des flux de paiements

La valeur des flux de paiements contingents aux transactions est obtenue à partir des prix intégrant le coupon couru. Le coefficient α indique la relation qui existe entre le prix d'un premier actif que nous identifierons par le terme *T1* et le prix d'un second titre que nous noterons *T2* (soit $\alpha = T1/T2$). Nous supposons pour simplifier que l'agent dispose de la possibilité d'acheter et de vendre les actifs de manière à respecter le rapport de quantités requis. Un titre *T1* sera acheté (respectivement vendu) pour $\alpha T2$ titres vendus (respectivement acheté). La quantité de titres *T1* offerte ou demandée est normée à l'unité, $N_a = 1$.

Lors de chaque opération le flux de paiement $CF(t)$ est déterminé par comparaison des flux induits par l'achat et la vente des deux titres. Ces flux dépendent du prix d'échange des actifs, soit de la somme du prix, pied de coupon, et de la valeur du coupon couru[1]. Le résultat de chaque opération complète de quasi arbitrage génère alors un gain actualisé GA_t que l'on calculera par la méthode suivante :

$$GA_t = CF_t + (CF_{t+nbj} - RF)\left(1 + 0{,}12\,(nbj/365)\right)^{-1}$$

où :

- CF_t représente le flux généré lors de la constitution du portefeuille. Il correspond à la différence entre la valeur des quantités de titres achetées et vendues. Pour une transaction impliquant l'achat de *T1* et la vente de *T2*, il correspond au montant :

$$CF_t = -\left(P_1(t) + Cc_1(t)\right) + \alpha\left(P_2(t) + Cc_2(t)\right)$$

- CF_{t+nbj} indique le flux issu de la liquidation quand celle-ci intervient *nbj* jours plus tard.
- *RF* mesure le coût effectif de refinancement, il s'établit suivant la formule :

$$RF = (1/4)\,10^{-2}\left(P(t) + Cc(t)\right) nbj/365$$

$\left(P(t) + Cc(t)\right)$ indique ici le prix d'échange des actifs achetés à réméré.

Ce gain correspond à la somme actualisée des flux de revenus enregistrés lors de la constitution et de la liquidation du portefeuille. Il intègre la valeur des frais financiers effectifs induits par l'opération d'emprunt de titres. Ces frais sont pris en compte lors de la liquidation du portefeuille.

4.3. Présentation des résultats.

Les résultats de la simulation sont résumés dans les tableaux de la page suivante. La première colonne indique les codes des titres impliqués dans les relations de quasi arbitrage. Les références de ces titres sont précédés par les lettres *T1* et *T2* qui désignent l'ordre utilisé dans la relation ($T1 = \alpha T2 + \varepsilon$).

---

1. En cas de tombée de coupon pendant une position, la valeur du coupon est ajoutée au prix coupon couru de liquidation. Cette approximation élimine l'effet de la réinitialisation du coupon couru sur le prix d'échange.

La méthode de sélection des couples de titres fait apparaître des relations de deux types. Les obligations peuvent être appariées du fait de leurs caractéristiques intrinsèques. Dans ce cas, les relations unissent des titres dont la date d'échéance est voisine et dont les coupons ont des ordres de grandeur identiques. La méthode d'évaluation par le marché de titres techniquement proches est alors semblable et la relation entre le prix des actifs est stable. Une autre classe de relations unit des titres dont les caractéristiques différent. Ces relations sont néanmoins effectives du fait de la prise en compte, dans la relation, d'un actif qui sert de référence au marché. Dans ce dernier cas, les relations intègrent un « *benchmark* » qui sert de norme implicite dans la fixation du prix de tous les actifs du marché. Les relations ne se justifient plus par des critères techniques mais par l'utilisation d'un titre dont la valeur étalonne le prix des autres obligations.

La seconde colonne, ALPHA, indique la valeur empirique du paramètre α pris en compte dans la relation. La valeur inscrite entre parenthèses correspond au rapport des coupons ($C1/C2$). Comme nous l'avons déjà mentionné, le marché valorise les titres dont la rémunération est faible. Ainsi, le paramètre α sera supérieur au rapport des coupons si $C1 < C2$. On observe que, dans le cas où les coupons sont identiques (Cf. marché de la RFA), l'écart entre α et l'unité est de l'ordre de 1/1000. Ceci confirme l'impact de paramètres exogènes (fiscalité ou maniabilité) dans la fixation des prix des obligations.

La colonne BORNES indique les *valeurs de réservation* qui optimisent la valeur du profit anticipé issu de la politique d'arbitrage spéculatif.

La colonne suivante (NB de POSITION) indique le nombre de positions spéculatives adoptées sur la période de simulation (Cf. dernière colonne). La valeur inscrite entre parenthèses indique le nombre d'opérations dont le résultat financier actualisé est négatif. Par défaut, l'écart entre ces deux chiffres donne le nombre d'opérations gagnantes réalisées.

La durée moyenne de ces positions est indiquée dans la colonne suivante (DURÉE DES POSITIONS). Les trois chiffres entre parenthèses correspondent au nombre de positions dont la durée est respectivement inférieure à une semaine, comprise entre une et deux semaines, et supérieure à deux semaines.

Les deux colonnes suivantes rapportent les résultats financiers de la simulation. La colonne INVESTISSEMENT MOYEN indique le flux moyen consécutif à la prise de position. On notera que cette valeur peut être positive, ce qui signifie que la prise de position est accompagnée d'un flux entrant de liquidités. Ceci est normal étant donné la règle d'achat suivie par le spéculateur.

RFA							
TITRES	ALPHA (C1/C2)	BORNES	NB DE POSITIONS	DURÉE DES POSITIONS	INVEST MOYEN	GAIN MOYEN	NB de JOURS DE TEST
T1 : 744712 T2 : 751180	0.975 (0.944)	$y = y' = 0.041$ $x = x' = -0.038$	70 (0)	8.73 (46) (13) (11)	0.194	0.103 (6.532)	832
T1 : 744712 T2 : 751679	0.9992 (1)	$y = y' = 0.034$ $x = x' = -0.033$	74 (0)	6.85 (51) (13) (9)	0.603	0.087 (5.709)	797
T1 : 744712 T2 : 752184	1.0006 (1)	$y = y' = 0.032$ $x = x' = -0.035$	82 (0)	6.84 (53) (17) (12)	0.514	0.080 (5.809)	741
T1 : 744712 T2 : 753081	1.0091 (1.041)	$y = y' = 0.042$ $x = x' = -0.042$	60 (0)	8.51 (35) (14) (11)	− 0.383	0.104 (5.517)	709
T1 : 744712 T2 : 797020	0,9920 (0.981)	$y = y' = 0.05$ $x = x' = -0.051$	59 (0)	6.88 (42) (10) (7)	0.113	0.122 (6.548)	595
T1 : 751180 T2 : 751679	1.0248 (1.059)	$y = y' = 0.041$ $x = x' = -0.039$	76 (0)	7.95 (55) (7) (14)	0.026	0.082 (5.477)	797
T1 : 751180 T2 : 752184	1.0261 (1.059)	$y = y' = 0.04$ $x = x' = -0.05$	64 (2)	8.73 (44) (8) (12)	0.559	0.087 (4.831)	741
T1 : 751180 T2 : 753081	1.0349	$y = y' = 0.044$ $x = x' = -0.051$	66 (1)	8.05 (42) (15) (9)	0.073	0.109 (6.388)	709
T1 : 751180 T2 : 797020	1.0172 (1.038)	$y = y' = 0.053$ $x = x' = -0.052$	52 (1)	7.69 (38) (7) (7)	0.224	0.129 (6.023)	595
T1 : 751679 T2 : 752184	1.0012 (1)	$y = y' = 0.039$ $x = x' = -0.042$	65 (1)	8.25 (45) (8) (12)	− 1.153	0.077 (4.425)	741
T1 : 751679 T2 : 753081	1.0098 (1.02)	$y = y' = 0.041$ $x = x' = -0.041$	69 (0)	8.03 (46) (11) (12)	− 0.838	0.098 (6.028)	709
T1 : 751679 T2 : 797020	0.9926 (1.02)	$y = y' = 0.052$ $x = x' = -0.052$	50 (0)	8.35 (32) (10) (8)	− 0.341	0.136 (6.142)	595
T1 : 752184 T2 : 753081	1.0085 (1.02)	$y = y' = 0.031$ $x = x' = -0.032$	67 (0)	7.56 (48) (11) (8)	0.006	0.076 (4.498)	709

TITRES	ALPHA (C1/C2)	BORNES	NB DE POSITIONS	DURÉE DES POSITIONS	INVEST MOYEN	GAIN MOYEN	NB de JOURS DE TEST
RFA							
T1 : 752184 T2 : 797020	0.9913 (0.981)	$y = y' = 0.043$ $x = x' = -0.045$	46 (0)	9.16 (27) (12) (7)	0.346	0.126 (5.166)	595
T1 : 753081 T2 : 977020	0.9828 (0.962)	$y = y' = 0.04$ $x = x' = -0.045$	53 (0)	8.25 (37) (7) (7)	0.516	0.094 (4.532)	595
T1 : 723887 T2 : 797020	0.9656 (0.923)	$y = y' = 0.061$ $x = x' = -0.055$	49 (1)	9.43 (32) (11) (7)	0.21	0.171 (7.53)	595
T1 : 723887 T2 : 727551	1.0013 (1)	$y = y' = 0.059$ $x = x' = -0.057$	71 (0)	11.94 (47) (9) (16)	0.271	0.126 (7.687)	1114
CANADA							
T1 : 954892 T2 : 996704	0.9448 (0.927)	$y = y' = 0.078$ $x = x' = -0.086$	64 (0)	13.11 (40) (8) (16)	0.447	0.327 (17.711)	1114
T1 : 996707 T2 : 994819	0.9248 (0.889)	$y = y' = 0.082$ $x = x' = -0.066$	77 (1)	10.62 (57) (7) (13)	1.930	0.304 (20.282)	1114
T1 : 996707 T2 : 972027	0.8809 (0.833)	$y = y' = 0.104$ $x = x' = -0.084$	82 (1)	11.35 (58) (10) (14)	− 0.459	0.277 (19.79)	1114
T1 : 996707 T2 : 972821	0.8659 (0.816)	$y = y' = 0.1$ $x = x' = -0.075$	81 (1)	11.53 (56) (9) (16)	− 0.402	0.279 (19.715)	1114
T1 : 996707 T2 : 988202	0.8512 (0.8)	$y = y' = 0.109$ $x = x' = -0.087$	78 (1)	11.39 (51) (10) (17)	0.579	0.326 (21.896)	1114
T1 : 996707 T2 : 970319	0.7758 (0.714)	$y = y' = 0.118$ $x = x' = -0.108$	88 (1)	8.85 (62) (10) (16)	− 0.442	0.301 (22.803)	1114
T1 : 994819 T2 : 985999	0.96711 (0.957)	$y = y' = 0.066$ $x = x' = -0.064$	63 (0)	10.65 (43) (7) (13)	2.212	0.347 (19.416)	1114
T1 : 972027 T2 : 972821	0.9829 (0.98)	$y = y' = 0.031$ $x = x' = -0.03$	71 (10)	10.99 (46) (10) (15)	− 1.062	0.260 (16.739)	1114
T1 : 972027 T2 : 988202	0.9662 (0.96)	$y = y' = 0.048$ $x = x' = -0.052$	91 (0)	8.16 (64) (14) (13)	0.192	0.224 (19.561)	1114

TITRES	ALPHA (C1/C2)	BORNES	NB DE POSITIONS	DURÉE DES POSITIONS	INVEST MOYEN	GAIN MOYEN	NB de JOURS DE TEST
CANADA							
T1 : 972027 T2 : 970319	0.8806 (0.857)	$y = y' = 0.093$ $x = x' = -0.113$	76 (0)	11.49 (45) (11) (20)	0.579	0.380 (25.243)	1114
T1 : 972821 T2 : 988202	0.9830 (0.98)	$y = y' = 0.045$ $x = x' = -0.046$	100 (2)	8.41 (66) (20) (14)	1.393	0.191 (16.703)	1114
T1 : 972821 T2 : 970319	0.8959 (0.875)	$y = y' = 0.091$ $x = x' = -0.106$	67 (0)	12.89 (43) (8) (16)	0.568	0.434 (25.274)	1114
T1 : 988202 T2 : 970319	0.91139 (0.893)	$y = y' = 0.083$ $x = x' = -0.093$	76 (1)	11.67 (47) (8) (21)	0.975	0.3 (19.813)	1114
T1 : 704873 T2 : 703510	1.0152 (1.023)	$y = y' = 0.054$ $x = x' = -0.057$	85 (1)	8.71 (65) (7) (13)	0.289	0.412 (30.527)	1114
ROYAUME UNI							
T1 : 955342 T2 : 948525	0.9666 (0.944)	$y = y' = 0.036$ $x = x' = -0.042$	102 (0)	6.53 (86) (9) (7)	0.596	0.126 (11.477)	995
T1 : 915616 T2 : 915453	1.0707 (1.083)	$y = y' = 0.045$ $x = x' = -0.05$	103 (2)	7.99 (77) (14) (12)	1.134	0.145 (12.752)	1114
T1 : 928352 T2 : 965940	1.0156 (1.026)	$y = y' = 0.04$ $x = x' = -0.046$	86 (3)	10.71 (55) (13) (18)	1.814	0.134 (10.365)	1114
T1 : 965940 T2 : 915455	0.8179 (0.78)	$y = y' = 0.08$ $x = x' = -0.082$	107 (2)	7.97 (83) (11) (13)	1.34	0.226 (21.642)	1114
T1 : 923806 T2 : 955340	10.5536 (1.083)	$y = y' = 0.046$ $x = x' = -0.058$	84 (1)	9.63 (57) (12) (15)	0.4029	0.209 (15.482)	1052
T1 : 923806 T2 : 935596	0.9758 (0.975)	$y = y' = 0.068$ $x = x' = -0.071$	80 (0)	11.42 (59) (10) (11)	0.218	0.198 (13.926)	1114

TITRES	ALPHA (C1/C2)	BORNES	NB DE POSITIONS	DURÉE DES POSITIONS	INVEST MOYEN	GAIN MOYEN	NB de JOURS DE TEST
T1 : 915455 T2 : 915614	0.9336 (0.907)	$y = y' = 0.065$ $x = x' = -0.056$	86 (1)	10.07 (62) (13) (11)	1.2782	0.16 (12.056)	1114
T1 : 915503 T2 : 915614	0.8857 (0.87)	$y = y' = 0.066$ $x = x' = -0.054$	86 (1)	8.74 (70) (7) (9)	−0.5532	0.171 (12.758)	1114
T1 : 955295 T2 : 955330	0.9523 (0.944)	$y = y' = 0.039$ $x = x' = -0.038$	112 (1)	7.18 (85) (14) (13)	−0.19	0.156 (15.841)	1072
T1 : 923806 T2 : 915455	0.8216 (0.78)	$y = y' = 0.069$ $x = x' = -0.064$	115 (0)	7.15 (90) (15) (10)	−0.522	0.187 (18.351)	1114
			ROYAUME UNI				
TITRES	**ALPHA (C1/C2)**	**BORNES**	**NB DE POSITIONS**	**DURÉE DES POSITIONS**	**INVEST MOYEN**	**GAIN MOYEN**	**NB de JOURS DE TEST**
T1 : 923806 T2 : 915503	0.86605 (0.83)	$y = y' = 0.068$ $x = x' = -0.064$	122 (1)	6.75 (97) (11) (14)	0.502	0.213 (22.409)	1114
T1 : 923806 T2 : 915614	0.7670 (0.722)	$y = y' = 0.065$ $x = x' = -0.064$	130 (1)	6.02 (114) (9) (7)	−0.293	0.189 (21.540).	1114
T1 : 955340 T2 : 935596	0.9244 (0.9)	$y = y' = 0.043$ $x = x' = -0.047$	132 (2)	5.66 (105) (16) (11)	0.09	0.188 (22.141)	1052
T1 : 955340 T2 : 915455	0.7786 (0.72)	$y = y' = 0.099$ $x = x' = -0.078$	80 (1)	10.8 (56) (9) (15)	0.16	0.272 (18.706)	1052
T1 : 955340 T2 : 915503	0.8207 (0.766)	$y = y' = 0.089$ $x = x' = -0.069$	100 (0)	8.16 (76) (9) (15)	0.035	0.23 (19.838)	1052
T1 : 955340 T2 : 915614	0.7268 (0.66)	$y = y' = 0.078$ $x = x' = -0.077$	88 (1)	9.52 (73) (7) (10)	−0.718	0.213 (16.327)	1052
T1 : 948069 T2 : 955510	0.92072 (0.905)	$y = y' = 0.04$ $x = x' = -0.038$	131 (0)	6.38 (96) (20) (15)	0.231	0,167 (18.349)	1114
T1 : 948069 T2 : 924802	1.1353 (1.188)	$y = y' = 0.065$ $x = x' = -0.073$	96 (0)	8.82 (68) (12) (16)	0.28	0.232 (19.125)	1114
T1 : 915455 T2 : 915503	1.05410 (1.064)	$y = y' = 0.04$ $x = x' = -0.049$	95 (0)	9.07 (66) (15) (14)	0.877	0.141 (11.402)	1114

La valeur des profits ou pertes de l'opérateur est recensée dans l'avant-dernière colonne. La première donnée indique la valeur de la moyenne des gains réalisés grâce à des transactions impliquant un titre *T1* et α titres *T2* (soit un investissement virtuel d'environ 100 FF en moyenne). Le chiffre entre parenthèses indique le total des gains sur la période. Chaque gain est actualisé à la date de début de simulation.

Le nombre de jours pendant lesquels le filtre a été appliqué est indiqué dans la dernière colonne. Quel que soit le couple de titres retenu, la simulation s'arrête au 22 janvier 1990. En revanche, la prise en compte de titres émis après le premier janvier 1987 conduit à des écarts dans le nombre de jours de simulation. Comme le gain total est actualisé au premier jour de simulation, il est évidemment moins important si la simulation est réalisée sur un intervalle de temps restreint.

4.4. Interprétation et remarques finales

Les résultats de la simulation montrent que la politique d'arbitrage spéculatif est rémunératrice. Sur l'ensemble des relations testées, aucune n'est globalement perdante. La colonne gain moyen indique systématiquement des grandeurs positives correspondant à une réalisation de profits sur le marché.

Ceci peut être expliqué simplement. La procédure d'intervention permet de bénéficier des écarts de cours en minimisant les frais d'intervention. Le principe de compensation des paiements permet de réduire au maximum la valeur des fonds nets investis, le coût d'opportunité du placement est donc restreint. Les seuls frais financiers auxquels sont confrontés les intervenants correspondent à la valeur du coût de refinancement *RF* représentatif de l'emprunt des actifs sur le marché du réméré. Or, ces coûts sont pris en compte dès la construction du modèle. La maximisation de l'espérance de profit correspond également à la minimisation de ces frais. Les *bornes de réservation* optimales intègrent donc l'influence de ces coûts et permettent de réaliser des transactions successives rapides afin de minimiser les frais de refinancement.

On observe, en effet, que la durée moyenne des positions est voisine d'une semaine. Le nombre de positions dont la durée est inférieure à la semaine est largement dominant. Pour toutes ces transactions, la valeur des coûts est alors marginale en regard des profits réalisés sur la valeur des écarts. Il faut néanmoins remarquer la présence d'un certain nombre de positions dont la conservation s'étale sur une période plus longue (sur plus de 4 000 opérations réalisées, 26 ont une longévité supérieure à 90 jours, 39 sont établies sur une période comprise entre deux et trois mois). Les opérations d'arbitrage spéculatif sont alors perdantes, les coûts de refinancement dépassent la valeur de la plus-value réalisée sur le marché.

Ces opérations sont généralement regroupées sur quelques couples de titres pour lesquels la dispersion du rapport P_1/P_2 autour du paramètre α est importante. L'autocorrélation des écarts implique alors une persistance dans le temps du signe de ε_t.

Le temps moyen nécessaire à la liquidation de la position est alors accru. Il faut, en outre, remarquer que la période de simulation intègre les chocs monétaires et financiers des mois d'octobre 1987 et 1989. Durant ces périodes agitées, la rigueur financière se relâche et les prix sont susceptibles d'enregistrer des écarts importants et durables. La durée moyenne des positions augmente alors et leur rentabilité diminue.

Un autre élément important de la politique doit être signalé. Un aspect intéressant de la statégie développée ci-dessus consiste à mettre en place une procédure d'intervention qui ne génère pas de sortie de fonds à l'origine de la position. Suivant la construction du modèle, la prise de position spéculative permet une compensation théorique des flux de paiements, la valeur des seuils doit permettre de recevoir un flux de paiement net positif lors de la prise de position. Dans ce cas l'investissement est réalisé sans mise de fonds initiale. La valeur des coupons courus des actifs considérés contrarie cependant le résultat positif de la compensation des paiements. Du fait de la gestion des coupons par le marché, la prise de position peut générer des flux positifs ou négatifs. Le flux est positif si la valeur des actifs vendus est supérieure à la valeur des actifs achetés. Il est négatif dans le cas inverse. La colonne INVESTISSEMENT MOYEN indique la valeur moyenne de la recette de l'opérateur lors de la constitution du portefeuille. Le tableau montre l'existence de relations pour lesquelles la valeur de l'investissement moyen est positif. Pour ces couples de titres, la constitution du portefeuille ne génère, en moyenne, aucune sortie de fonds. Les paiements réalisés par l'opérateur interviennent alors uniquement lors de la clôture de la position. Or, en général, ces paiements sont inférieurs aux sommes perçues initialement. Cette politique conduit donc à la réalisation d'une plus-value sans pour autant nécessiter un investissement initial. Ceci correspond alors à un taux de rendement infini.

Enfin, la simulation montre l'existence de disparités entre les différents marchés nationaux. Ces disparités se caractérisent par une plus ou moins grande rigueur dans la fixation relative du prix des actifs. Sur un marché très suivi par les opérateurs, les variations du rapport P_1/P_2 autour du paramètre α sont très faibles et les erreurs ε_t correspondent mieux à leurs caractéristiques théoriques de perturbations aléatoires. Le modèle génère alors plus de transactions mais les opérations sont moins rémunératrices en moyenne.

Le marché allemand est une illustration typique d'un marché très surveillé. Les *bornes de réservation* optimales sont resserrées et le gain moyen des opérations est faible. En revanche le nombre d'opérations réalisées est voisin de celui des autres marchés malgré des mesures effectuées sur un intervalle de temps nettement plus court. Par opposition, le marché canadien apparaît peu arbitré. Les gains de chaque opération sont importants. La durée moyenne des positions est plus longue et le nombre des opérations s'étalant sur plus de deux semaines est atypique par rapport aux autres marchés.

Dans les deux cas, la politique génère des profits significatifs. Si le marché allemand est plus précis, il reste inefficient au sens faible, l'utilisation des chroniques de prix permet la mise en place de politiques rémunératrices.

Annexe : Implémentation

La mise en place du modèle suppose l'existence d'une relation stable entre le prix de deux obligations. Une fois cette relation établie la comparaison du cours des titres permet de faire apparaître des écarts de cours à partir desquels l'activité d'arbitrage spéculatif va être construite. La simulation requiert donc cinq éléments essentiels du point de vue du calcul numérique :

1) la détermination de la condition d'absence d'arbitrage,
2) la vérification de stationnarité de la loi de distribution des résidus,
3) l'estimation de cette même loi de distribution,
4) le calcul des valeurs de réservation optimales,
5) la mesure des cash flows.

Cette section expose les différentes méthodes utilisées successivement dans l'élaboration de la simulation. Elle propose également une méthode de sélection des titres sur lesquels portera la simulation.

A.1. Détermination de la condition d'absence d'opportunité d'arbitrage

Déterminer la relation d'absence d'arbitrage consiste à définir le paramètre α qui unit le prix de deux obligations. Sur le marché obligataire, ce coefficient ne peut être donné par le rapport des revenus distribués par chaque titre. Du fait de leur fiscalité ou de leur plus grande souplesse de gestion, le marché favorise les titres à faible coupon (Cf. Litzenberger & Rolfo [1984]). Le paramètre α ne peut être obtenu par le rapport simple des revenus nominaux.

Une mesure empirique de α peut cependant être obtenue en calculant la moyenne du rapport des prix (pied de coupon) des deux actifs. Considérons deux obligations dont on observe les prix $P_1(t)$ et $P_2(t)$ sur n périodes, le coefficient qui unit empiriquement le prix des actifs est donné par la formule :

$$\alpha = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^{n} P_1(i)/P_2(i)$$

Cette procédure permet alors de porter un premier jugement sur l'applicabilité de la politique d'intervention. Le modèle suppose, en effet, que la relation entre les prix des deux actifs soit stable. Pour garantir cette stabilité, nous avons pratiqué sur le modèle un test d'hypothèse de la forme :

$$P_1(t)/P_2(t) = at + \alpha + \eta_t \quad \text{avec} \quad \begin{cases} H1 : & a = 0 \\ H2 : & a \neq 0 \end{cases}$$

La simulation rejette alors tous les couples de titres pour lesquels l'hypothèse $H2$ peut être rejetée avec un seuil de risque usuel de 5 %. Grâce à la détermination du paramètre α, la série des résidus peut être obtenue simplement. Il reste à vérifier que ces résidus présentent des caractéristiques acceptables.

A.2. Stationnarité de la relation entre les prix des obligations

Le modèle d'arbitrage spéculatif repose sur une hypothèse de blancheur du bruit ε_t. Sa validité suppose la stationnarité du processus $\{\varepsilon_t\}_{t=0}^{\infty}$ et l'absence d'autocorrélation des ε_t. Le calcul des autocorrélogrammes permet alors d'accepter, ou de rejeter, une série de résidus en fonction de ses propriétés statistiques. Seules ont été conservées les séries de ε_t dont les autocorrélations avec un décalage de deux périodes peuvent être négligées au seuil de risque de 5 %. Le calcul des corrélogrammes permet également d'éliminer toutes les relations qui ne respectent pas le critère de stationnarité (Cf. Pindyck & Rubinfeld [1981]).

A.3. Détermination empirique de la distribution de probabilités de ε_t

La mesure des distributions de probabilités est essentielle dans la détermination des *bornes de réservation.* L'utilisation des lois traditionnelles est interdite pour approximer la distribution des ε_t du fait de l'existence de queues de distribution empiriques importantes. L'évaluation des distributions de probabilités est obtenue par la procédure numérique suivante (Cf. Bosq & Lecoutre [1987]) :

Soit n la taille de l'échantillon, et $\overline{\varepsilon}_n$ la moyenne simple des résidus, la distribution de probabilités empirique $f_n(\varepsilon)$ est donnée par l'équation :

$$f_n(\varepsilon) = \frac{1}{nh_n} \sum_{i=1}^{n} K\left[\frac{\varepsilon - \varepsilon_i}{h_n}\right] \quad \text{avec :} \quad \begin{cases} K[t] = \dfrac{1}{\sqrt{2\Pi}}\, e^{\frac{-t^2}{2}} \\ h_n \approx \dfrac{S_n}{n^{1/5}} \\ S_n^2 = \dfrac{1}{n-1} \displaystyle\sum_{i=1}^{n} \left(\varepsilon - \overline{\varepsilon}_n\right)^2 \end{cases}$$

Considérons alors deux obligations distinctes, les procédures que nous venons de décrire permettent : de définir une relation linéaire entre le prix des deux titres, de vérifier la stationnarité de la relation et de mesurer la possibilité d'application de la politique optimale, et enfin de déterminer la distribution des résidus sur lesquels porte la politique de quasi arbitrage. Pour chaque couple d'obligations, la procédure permet donc de mesurer l'applicabilité du test et de retenir ou de rejeter le couple du panel de relations.

BIBLIOGRAPHIE

BOSQ D. & LECOUTRE J.-P. (1987) *Théorie de l'estimation fonctionnelle,* Economica.

HEY J. (1979) *Uncertainty in Microeconomics,* Martin Robertson.

LEROY S. (1989) "Efficient Capital Market and Martingales", *Journal of Economic Literature,* 1583-1621.

LIPPMAN S. & MCCALL J. (1976) "The Economics of Job Search : A Survey. Part 1 : Optimal Job Search Policies", *Economic Inquiry,* 347-368.

LITZENBERGER R. & ROLFO J. (1984) "Arbitrage Pricing, Transaction Costs and Taxation of Capital Gains", *Journal of Financial Economics,* 23-44.

MCKENNA C. (1986) *Uncertainty and the Labour Market,* Harvester Press.

MCCULLOCH J. (1975) "The Tax Ajusted Yield Curve", *Journal of Finance,* 811-830.

PINDYCK R. & RUBINFELD D. (1981) *Econometric Models and Economic Forecasts,* MacGraw Hill.

VARIAN H. (1987) "The Arbitrage Principle in Financial Economics", *Journal of Economic Perspectives,* 55-72.

WILLIAMS J. (1938) *The Theory of Investment Value,* Cambridge, Harvard University Press.