

PAUL DAMIANI

La grande pyramide : observatoire astronomique

Journal de la société statistique de Paris, tome 132, n° 3 (1991),
p. 93-106

http://www.numdam.org/item?id=JSFS_1991__132_3_93_0

© Société de statistique de Paris, 1991, tous droits réservés.

L'accès aux archives de la revue « Journal de la société statistique de Paris » (<http://publications-sfds.math.cnrs.fr/index.php/J-SFdS>) implique l'accord avec les conditions générales d'utilisation (<http://www.numdam.org/conditions>). Toute utilisation commerciale ou impression systématique est constitutive d'une infraction pénale. Toute copie ou impression de ce fichier doit contenir la présente mention de copyright.

NUMDAM

Article numérisé dans le cadre du programme
Numérisation de documents anciens mathématiques
<http://www.numdam.org/>

LA GRANDE PYRAMIDE : OBSERVATOIRE ASTRONOMIQUE

Paul DAMIANI

*Ancien secrétaire général des Sociétés de statistique
de Paris et de France*

RÉSUMÉ

Dans cet article, nous montrons que la pyramide de CHÉOPS, ou grande pyramide, servait de cadran solaire géant. Le creusement des faces, ainsi que la présence d'un gnomon au sommet de la pyramide, permettaient, en particulier, de signaler les équinoxes, les solstices et deux dates importantes dans les croyances de l'ancienne Egypte.

ABSTRACT

In this paper, we show that the pyramid of CHEOPS, or great pyramid, was a giant sun-dial. The hollowness of the faces and the gnomon at the top of the pyramid allow to signalize, in particular, equinoxes, solstices and two important dates in the religion of the Ancient Egypt.

INTRODUCTION

La pyramide de CHÉOPS, appelée « la grande pyramide », était une des sept merveilles du monde.

On pense qu'elle avait une triple fonction.

C'était, tout d'abord, un tombeau. Mais on n'a pas trouvé trace d'un sarcophage.

On peut considérer qu'elle était destinée aux rites de résurrection du pharaon. A la mort du roi, avait lieu, dans cet édifice, le transfert du « kâ » divin entre le roi mort et son successeur, qui subissait une deuxième naissance au cours d'un séjour dans la pyramide.

C'était, enfin, un observatoire astronomique.

C'est ce dernier aspect que nous allons développer dans cette étude.

Pour alléger la présentation des résultats, nous avons adopté une échelle des temps algébrique, exprimée en années : les dates sont positives ou négatives suivant qu'elles se situent après ou avant J.-C., la date 0 correspondant au début de l'an I de l'ère chrétienne. Les mesures des angles en degrés et les

mesures des heures sont données avec des subdivisions décimales. Enfin, on a donné, en annexe, un rappel de notions astronomiques.

DONNÉES GÉNÉRALES

CHÉOPS

La chronologie de l'ancienne Egypte est basée sur la liste de Manéthon qui comprend plusieurs centaines de noms de rois, regroupés en trente dynasties. D'après le tableau de P. Montet, CHÉOPS était le deuxième roi de la IV^e dynastie. On ne sait pratiquement rien sur ce pharaon.

CHÉOPS est le nom grec donné par Hérodote. Selon A. Pochan, son nom hiéroglyphique complet était « Khnoum-Khoufou » (« Khnoum me protège »). Le cartouche le plus souvent utilisé pour le représenter était « Khoufoui » (« il me protège »). CHÉOPS aurait introduit le culte du dieu solaire à tête de bélier Khnoum.

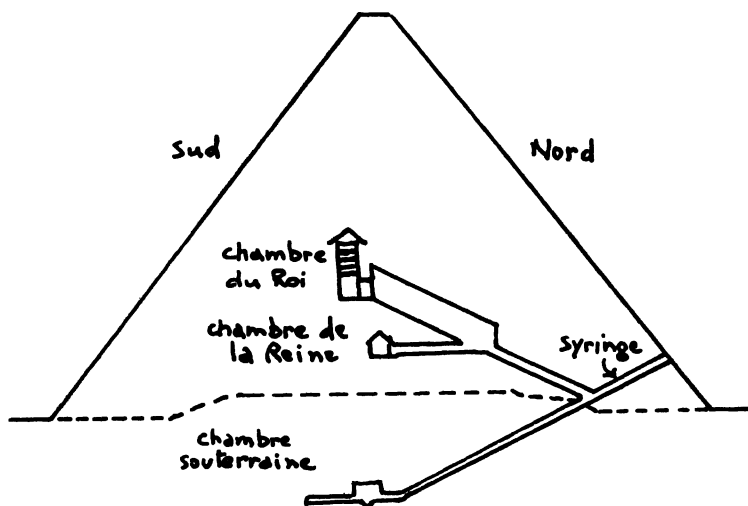
D'après la plupart des égyptologues, CHÉOPS aurait régné vers -2600, mais certains proposent des dates beaucoup plus anciennes.

La grande pyramide (voir fig. 1)

Situation géographique

La grande pyramide est située sur le plateau de Guizeh, à quelques kilomètres au sud du Caire, sous la latitude nord : $\varphi = 30^\circ$.

FIGURE 1
Coupe nord-sud de la grande pyramide



Sur ce plateau, se trouvent également les pyramides de CHÉPHREN et MYKÉRINOS, ainsi que le Sphinx.

Forme extérieure

La grande pyramide a une base carrée reposant sur un socle dont les côtés sont orientés vers les points cardinaux, avec une erreur moyenne de $5/100^{\circ}$ de degré.

La pyramide se termine par une plate-forme.

D'après A. Pochan, ses faces sont creusées au centre.

Elle était recouverte d'un parement en pierres, portant des inscriptions hiéroglyphiques. Ce revêtement a été démantelé par Saladin, vers 1170.

Au nord de la pyramide, se trouve une esplanade nivelée, bordée par une tranchée de 2m de profondeur, parallèle au côté nord de la base, à 91,4 m de ce côté.

Dimensions

Les dimensions citées sont tirées du livre de A. Pochan. Elles proviennent des mesures effectuées par le Survey d'Egypte et par différents archéologues modernes :

- côté du rebord du socle : $a = 231,1$ m,
- angle des faces avec le plan horizontal : $\alpha = 51,9^{\circ}$,
- hauteur de la plate-forme : par suite de l'érosion, les mesures sont moins précises ; elles varient entre 138,3 m et 139,4 m.

On en déduit les valeurs suivantes :

- hauteur théorique, si la pyramide n'était pas tronquée :

$$h = \frac{a}{2} \operatorname{tg} \alpha = 147,1 \text{ m}$$

- angle des arêtes avec le plan horizontal, α' tel que :

$$\operatorname{tg} \alpha' = \frac{h\sqrt{2}}{a}, \text{ d'où : } \alpha' = 42^{\circ}$$

On remarque que la pente des faces est elle que :

$$\operatorname{cotg} \alpha = \frac{5,5}{7}$$

L'unité de mesure étant la coudée composée de 7 palmes, on peut écrire : $\operatorname{cotg} \alpha = 11$ palmes/2 coudées.

Structure interne

La grande pyramide comprend trois chambres :

- une chambre souterraine, à 30,7 m sous la base,
- une chambre médiane, dite « de la Reine », à 21,7 m au-dessus de la base,
- une chambre supérieure, dite « du Roi », à 43,0 m au-dessus de la base.

On accède à l'intérieur de la pyramide par un couloir descendant, appelé « syringe ». L'entrée de ce couloir se trouve sur la face nord, décalée de l'apothème, vers l'est, de 7,3 m ; elle est approximativement à la hauteur de la chambre médiane.

RÔLE DE CADRAN SOLAIRE DE LA GRANDE PYRAMIDE

Nous allons montrer que la grande pyramide était un cadran solaire géant permettant, en particulier, de signaler les équinoxes, les solstices, ainsi que certaines dates représentatives dans les croyances de l'époque.

Elle pouvait jouer ce rôle grâce à sa forme extérieure : creusement des faces et présence d'un gnomon sur la plate-forme.

1. Creusement des faces*Phénomène de l'éclair*

Chaque face de la pyramide; d'après A. Pochan, est constituée de deux triangles passant chacun par une arête et se coupant dans le plan médiateur du côté correspondant de la base.

Soit S le sommet théorique, AB un des côtés de la base, O le centre de la base, M le milieu de AB . La face SAB se compose des deux triangles SAH , SBH . Le point H , intersection des traces AH et BH , se trouve sur OM et on a : $MH = 0,92$ m. (voir fig. 2)

On en déduit la valeur de l'angle : $\varepsilon = \widehat{BAH} = \widehat{ABH} = 0,46^\circ$.

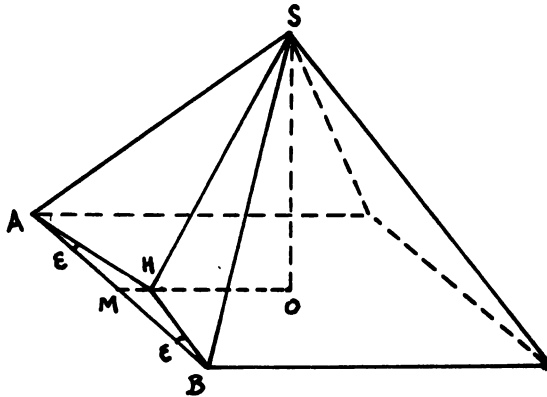
Ce creusement des faces produit le phénomène lumineux suivant, appelé « éclair » par A. Pochan. Quand la trajectoire du Soleil coupe le plan de la face SAB , l'ombre portée par une arête, SA par exemple, balaie rapidement le triangle opposé SBH , qui s'éclaire ou s'assombrit au fur et à mesure, suivant que le Soleil est dans sa phase ascendante ou descendante.

Le phénomène est complet si l'ombre portée du sommet, quand la trajectoire du Soleil coupe le plan de la face SAB , est extérieure au côté AB .

Heure de l'éclair

Appelons δ la déclinaison du plan de la trajectoire apparente diurne du Soleil, u l'angle horaire donnant la position du Soleil sur sa trajectoire, H l'heure correspondante.

FIGURE 2
Structure d'une des faces de la pyramide



Nous compterons u en degrés à partir du demi-plan méridien nord, positivement dans le sens du mouvement apparent. Nous avons alors : $H = \frac{12}{180} u$, en heures.

Quand le Soleil se trouve dans le plan d'une face, nous trouvons les relations suivantes, avec : $\alpha = 51,9^\circ$ et $\varphi = 30^\circ$.

- Face sud : $\cos u = -\text{tg} \delta \text{tg} (\alpha - \varphi)$ (1)
ou : $\cos u = -0,4010 \text{tg} \delta$

- Face nord : $\cos u = \text{tg} \delta \text{tg} (\alpha + \varphi)$ (2)
ou : $\cos u = 6,9827 \text{tg} \delta$

- Face ouest : $\text{tg} \delta \text{tg} \varphi = \cos u + \sin u \frac{\text{tg} \alpha}{\cos \varphi}$ (3)
ou : $\text{tg} \delta = 3,0794 \sin (34,22 + u)$

- Face est : $\text{tg} \delta \text{tg} \varphi = \cos u - \sin u \frac{\text{tg} \alpha}{\cos \varphi}$ (4)
ou : $\text{tg} \delta = 3,0794 \sin (34,22 - u)$

On passe de l'équation (1) à l'équation (2) et de l'équation (3) à l'équation (4) en changeant α en $-\alpha$.

L'équation (1) donne deux solutions : u_{11} et $u_{12} = 360 - u_{11}$, d'où : H_{11} et $H_{12} = 24 - H_{11}$.

L'équation (2) fournit également deux solutions : u_{21} et $u_{22} = 360 - u_{21}$, d'où : H_{21} et $H_{22} = 24 - H_{21}$.

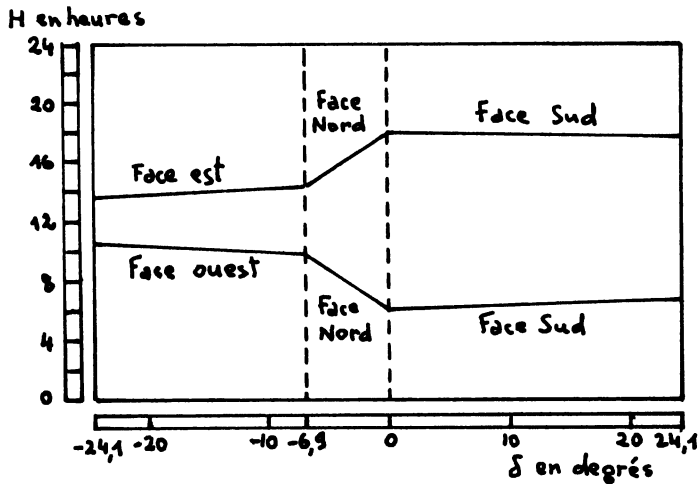
L'équation (3) a une solution u_3, H_3 . La solution de l'équation (4) est telle que : $u_4 = 360 - u_3, H_4 = 24 - H_3$.

On trouvera, dans le tableau I ci-après, les valeurs de H en fonction de la déclinaison δ de la trajectoire du Soleil, pour l'éclairage de chacune des faces. La figure 3 illustre ces résultats.

TABLEAU I
*Heure de l'éclair à différents jours de l'année,
pour chacune des faces*

Déclinaison δ en degrés	Dates	Face sud		Face nord		Face ouest	Face est
		H_{11} heures	H_{12} heures	H_{21} heures	H_{22} heures	H_3 heures	H_4 heures
24,1	Solstice d'été	6,7	17,3	–	–	–	–
0	Equinoxes	6	18	6	18	–	–
-6,92	t_1, t_2	–	–	9,9	14,1	9,9	14,1
-24,1	Solstice d'hiver	–	–	–	–	10,2	13,8

FIGURE 3
*Heure de l'éclair, pour chaque face,
suivant la déclinaison de la trajectoire du Soleil*



- Pour la face sud, l'éclair se produit de l'équinoxe de printemps à l'équinoxe d'automne. Aux équinoxes, il survient au lever et au coucher du Soleil.
- Pour la face nord, le phénomène a lieu d'une date t_1 à l'équinoxe de printemps et de l'équinoxe d'automne à une date t_2 .

Les dates t_1 et t_2 sont telles que le Soleil se trouve dans la direction des arêtes nord-ouest et nord-est respectivement.

Les valeurs de l'angle horaire u , correspondant à ces dates, s'obtiennent en résolvant, pour t_1 , le système des équations (2) et (3) et, pour t_2 , le système des équations (2) et (4).

Nous trouvons, pour le premier système :

$$u_1 = 148,0^\circ, \quad \text{et} : H_1 = 9,9 \text{ h}$$

et pour le deuxième système :

$$u_2 = 212,0^\circ, \quad \text{et} : H_2 = 14,1 \text{ h}$$

Pour les deux systèmes d'équations, on a :

$$\delta = -6,92^\circ, \quad \theta = 107,2^\circ, \quad J = 109 \text{ jours}$$

où θ est l'angle définissant la position du Soleil sur l'écliptique et J le nombre de jours séparant cette position de celle du Soleil au solstice d'été (voir annexe 2).

En reportant ce nombre J de jours de part et d'autre du solstice d'été, nous obtenons les dates suivantes :

$$t_1 = 4 \text{ mars}, \quad t_2 = 8 \text{ octobre}$$

– Pour les faces ouest et est, le phénomène, s'observe de la date t_2 à la date t_1 , c'est-à-dire du 8 octobre au 4 mars.

Nous remarquerons qu'il y a coïncidence des éclairs sur les faces sud et nord aux équinoxes. Cette simultanéité s'observe sur les faces nord et est et sur les faces nord et ouest, le 4 mars et le 8 octobre.

2. Rôle du gnomon

D'après A. Pochan, la pyramide de CHÉOPS était appelée « l'horizon lumineux de Khoufou ». En caractères hiéroglyphiques, son nom était suivi du signe propre aux temples solaires, représentant une pyramide à plate-forme surmontée d'un petit obélisque.

Nous pouvons donc supposer que la grande pyramide surmontée de son gnomon avait cette forme.

A l'aide de son gnomon, la grande pyramide jouait le rôle d'un cadran solaire. Nous allons voir que pour que les indications données couvrent l'année entière, il fallait que l'ombre portée soit repérée non seulement sur l'esplanade nord, mais également sur la face nord de la pyramide.

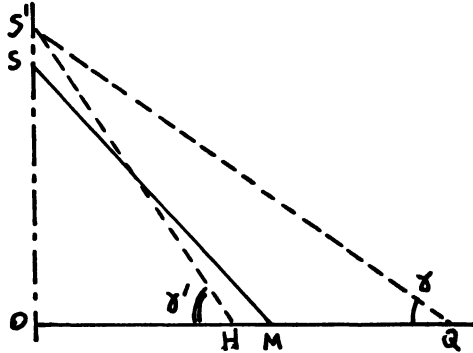
Hauteur du gnomon

Nous pensons que le fossé parallèle au côté nord de la base, à 91,4 m de ce côté, a été creusé intentionnellement pour marquer l'ombre portée maximum du gnomon.

Appelons S le sommet théorique de la pyramide, S' le sommet du gnomon, O le centre de la base, M le milieu du côté nord de la base, γ l'angle des rayons solaires avec le plan horizontal, Q l'ombre portée de S' (voir fig. 4).

FIGURE 4

Ombre portée maximum et ombre portée au pied de la pyramide



On pose :

$$OS = h, OS' = h', OM = \frac{a}{2}$$

On a :

$$MQ = h' \cotg \gamma - \frac{a}{2} \quad (5)$$

L'ombre portée du gnomon est maximum, à midi, au solstice d'hiver.

On a alors (voir annexe 2) :

$$\delta = -\omega, \gamma = 35,9^\circ$$

Avec : $MQ = 91,4$, l'équation (5) donne pour le sommet du gnomon :

$$h' = 150,0 \text{ m}$$

Ombre portée au pied de la pyramide

Si on appelle H le point d'intersection sur OM des deux triangles composant la face nord, on a :

$$OH = OM - 0,92 = 114,6 \text{ m}$$

L'ombre portée à midi atteint le point H , si l'angle γ' des rayons solaires est tel que : $\text{tg } \gamma' = \frac{OS'}{OH}$ (voir fig. 4).

Il vient : $\gamma' = 52,6^\circ$

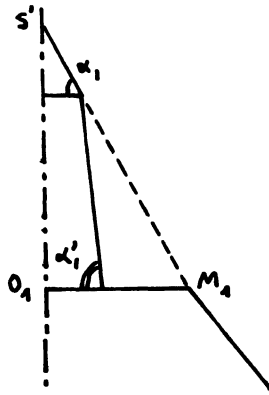
On en déduit la déclinaison δ' de la trajectoire diurne du Soleil, l'angle θ' donnant la position du Soleil sur l'écliptique et le nombre de jours J' correspondant, θ' et J' étant comptés à partir du solstice d'été (voir annexe 2). On trouve : $\delta' = -7,4^\circ$, $\theta' = 108,4^\circ$, $J' = 110$ jours.

L'ombre portée du gnomon atteint donc la base de la pyramide, à midi, le 3 mars et le 9 octobre.

Autrement dit, si on utilise seulement l'esplanade, on ne dispose que d'un calendrier, incomplet, allant du 9 octobre au 3 mars.

Forme du gnomon (voir fig. 5)

FIGURE 5
Demi-coupe nord du haut de la pyramide



Le gnomon avait vraisemblablement la forme d'un obélisque, c'est-à-dire d'un tronc pyramidal, à faces presque verticales, surmonté d'un pyramidion. Ces deux volumes devaient avoir, comme bases, des carrés dont les côtés étaient parallèles à ceux de la grande pyramide.

Appelons α_1 et α'_1 les angles des faces du pyramidion et du tronc pyramidal avec le plan horizontal.

Le gnomon signalera les équinoxes et le solstice d'été, si ces angles ont les valeurs suivantes (voir annexe 2) :

- pour le pyramidion : $\alpha_1 = 60^\circ$, angle des rayons solaires, à midi, aux équinoxes,
- pour le tronc pyramidal : $\alpha'_1 = 84,1^\circ$, angle des rayons solaires, à midi, au solstice d'été.

Dans ce cas, la face nord du pyramidion s'éclairera à l'équinoxe de printemps et s'obscurcira à l'équinoxe d'automne. D'autre part, la face nord du tronc pyramidal s'éclairera au solstice d'été.

Nous pensons, de plus, que, pour les équinoxes, l'ombre portée du gnomon devait atteindre le côté nord de la plate-forme de la grande pyramide.

Appelons O_1 le centre, M_1 le milieu du côté nord de la plate-forme.

$$\text{On a : } \operatorname{tg} \alpha_1 = \frac{O_1 S'}{O_1 M_1}$$

Soit h_1 la hauteur de la plate-forme, on a :

$$\begin{aligned} O_1 S' &= h' - h_1 \\ O_1 M_1 &= \frac{a}{2} \frac{h - h_1}{h} \end{aligned}$$

L'ombre arrive au bord de la plate-forme, si la hauteur de cete plate-forme est :

$$h_1 = 139,1 \text{ m}$$

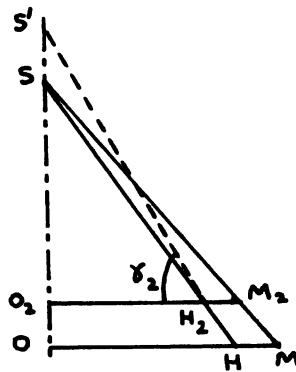
Cette hauteur est compatible avec les mesures faites par les égyptologues.

Ombre à l'entrée de la syringe

Nous allons calculer à quelle date l'ombre portée, à midi, atteint la hauteur de l'entrée de la syringe. Par suite de l'écart de la syringe avec le plan médiateur du côté nord, cette ombre portée ne touchera l'entrée de la syringe que quelques instants après-midi.

Soit γ_2 l'angle des rayons solaires partant du sommet S' du gnomon pour aboutir à H_2 , milieu du côté corrigé du creusement des faces (voir fig. 6).

FIGURE 6
Ombre portée à l'entrée de la syringe



$$\text{On a : } \operatorname{tg} \gamma_2 = \frac{O_2 S'}{O_2 H_2}$$

où O_2 est le centre de la section horizontale passant par l'entrée.

Si on appelle h_2 la hauteur de l'entrée, on trouve :

$$O_2S' = h' - h_2$$

$$O_2H_2 = OH \frac{h - h_2}{h}$$

Par suite de l'imprécision des mesures de hauteur, nous pouvons adopter, pour hauteur de l'entrée, une valeur $h_2 = 22,2$ m, légèrement supérieure à la valeur de 21,7 m, donnée comme hauteur de la chambre médiane.

On trouve alors :

$$\gamma_2 = 52,72^\circ, \quad \delta_2 = 52 - 72 - 60 = -7,28^\circ$$

$$\theta_2 = 107,9, \quad J_2 = 109 \text{ jours} \quad (\text{voir annexe 2})$$

Autrement dit, l'ombre portée du gnomon atteint l'entrée de la syringe le 4 mars et le 8 octobre, c'est-à-dire aux dates t_1 et t_2 trouvées précédemment dans le cas de l'éclairement des faces.

Signification des dates du 4 mars et du 8 octobre

Nous pensons que les dates du 4 mars et du 8 octobre, signalées à la fois par l'éclair lumineux et l'ombre portée du gnomon, devaient avoir une importance particulière dans le culte des morts et dans les rites de résurrection de l'ancienne Egypte. C'est cette hypothèse que nous essaierons de développer dans un article ultérieur.

CONCLUSION

Nous avons montré que le creusement des faces faisait apparaître un phénomène lumineux rapide, visible toute l'année. Ce phénomène avait lieu simultanément sur deux faces, aux équinoxes et aux dates du 4 mars et du 8 octobre.

Nous avons calculé, d'autre part, la hauteur du gnomon surmontant la pyramide, en supposant que son ombre portée, au solstice d'hiver, à midi, atteignait le fossé bordant l'esplanade au nord de l'édifice. En admettant que la face nord complétait l'esplanade pour servir de cadran solaire, nous en avons déduit la forme du gnomon et nous avons montré qu'il signalait les équinoxes et le solstice d'été. Enfin, nous avons trouvé que l'ombre du gnomon atteignait l'entrée de la syringe le 4 mars et le 8 octobre.

RÉFÉRENCES

DAUMAS François (1982) *Les dieux de l'Egypte*, Que sais-je? n° 1194, Presses Universitaires de France, 4^e édition.

- KOLPAKCHY Grégoire (1973) *Livre des morts des anciens Egyptiens*, Omnium littéraire.
- MICHALOWSKI K. (1968) *L'art de l'Ancienne Egypte*, Editions d'art Lucien Mazenod.
- MONTET Pierre (1979) *L'Egypte éternelle*, Nouvelles éditions Marabout.
- POCHAN André (1971) *L'énigme de la grande pyramide*, Robert Laffont.
- VERCOUTTER Jean (1973) *L'Egypte ancienne*, Que sais-je ? n° 246, Presses Universitaires de France, 7^e édition.
- Le monde égyptien : les pharaons. Le temps des pyramides. L'univers des formes.* NRF, Gallimard, 1973.

ANNEXE

1. Rappel de notions d'astronomie*Définitions*

L'*équateur céleste* est le grand cercle perpendiculaire à l'axe de rotation de la Terre, appelé *ligne des pôles* ou *axe du monde*.

La *latitude* φ d'un lieu donné sur Terre est égale à la distance angulaire entre le pôle nord et l'horizon, comptée à partir de l'horizon.

Le *zénith* d'un lieu est le point le plus haut de la voûte céleste éloigné de 90° de l'horizon ; le *nadir* est le point le plus bas.

Le *plan méridien* d'un lieu est le plan définissant un grand cercle passant par l'axe du monde et le zénith.

Pour un astre donné, le cercle horaire est le grand cercle passant par l'axe du monde et l'astre. La *déclinaison* δ de l'astre est l'angle de l'équateur céleste avec la direction de l'astre, comptée à partir de l'équateur, positivement pour l'hémisphère nord, négativement pour l'hémisphère sud. L'*angle horaire* d'un astre est l'angle formé par le méridien de l'observateur et le cercle horaire.

Mouvement annuel apparent du Soleil

En un an, la Terre décrit autour du Soleil une orbite dont le plan fait un angle : $\omega = 23,5^\circ$ avec l'équateur. La valeur de cet angle présente de légères oscillations dans le temps, elle était égale à $24,1^\circ$, en -2600 .

Le Soleil paraît se déplacer sur un grand cercle appelé *écliptique*.

Les points d'intersection de l'écliptique avec l'équateur correspondent à l'équinoxe de printemps (point vernal) le 21 mars, et à l'équinoxe d'automne, le 23 septembre. Les points de l'écliptique les plus éloignés de l'équateur correspondent au solstice d'été (21 juin) et au solstice d'hiver (22 décembre).

2. Mouvement diurne apparent du Soleil

La position P du Soleil sur l'écliptique, un jour de l'année, peut être définie par : $\theta = \widehat{P_0OP}$, où P_0 est la position du Soleil au solstice d'été, O le centre de l'écliptique.

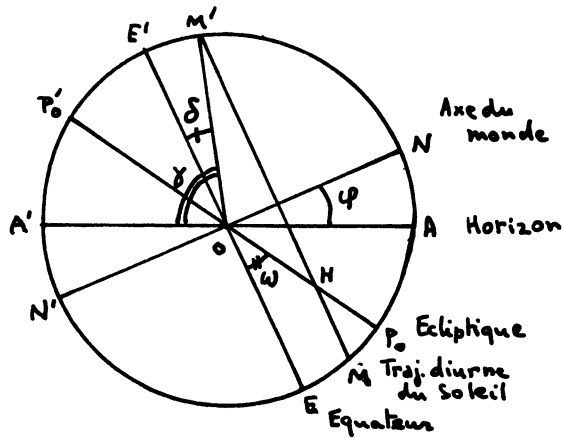
A l'angle θ en degrés, correspond le nombre J de jours compté à partir du solstice d'été : $J = \frac{365}{360} \theta$.

Dans la figure 7, on a représenté la projection, sur le plan méridien, du cercle équatorial FE' , de l'écliptique $P_0P'_0$, de la trajectoire diurne du Soleil MM' .

En appelant δ la déclinaison de la trajectoire diurne du Soleil, on a la relation :

$$\sin \delta = \cos \theta \sin \omega \quad (6)$$

FIGURE 7
*Projection sur le plan méridien
 de la trajectoire apparente diurne du Soleil*



où ω est l'angle de l'écliptique avec l'équateur.

La distance angulaire maximum du Soleil, dans sa trajectoire diurne, est :
 $\gamma = \widehat{H'OM'}$.

On trouve :

$$\gamma = 90 + \delta - \varphi \quad (7)$$

où φ est la latitude du lieu d'observation.

Les valeurs de γ , correspondant à des dates remarquables, sont les suivantes, pour : $\varphi = 30^\circ$ et $\omega = 24,1^\circ$:

- aux équinoxes : $\theta = 90^\circ$,
 d'où : $\delta = 0, \gamma = 60^\circ$
- au solstice d'été : $\theta = 0^\circ$,
 d'où : $\delta = \omega, \gamma = 84,1^\circ$
- au solstice d'hiver : $\theta = 180^\circ$,
 d'où : $\delta = -\omega, \gamma = 35,9^\circ$