

GEORGES PRAT

**Notes de lecture sur F.R. Macaulay (1938) :  
dynamique des marchés financiers**

*Journal de la société statistique de Paris*, tome 131, n° 3-4 (1990),  
p. 57-68

[http://www.numdam.org/item?id=JSFS\\_1990\\_\\_131\\_3-4\\_57\\_0](http://www.numdam.org/item?id=JSFS_1990__131_3-4_57_0)

© Société de statistique de Paris, 1990, tous droits réservés.

L'accès aux archives de la revue « Journal de la société statistique de Paris » (<http://publications-sfds.math.cnrs.fr/index.php/J-SFdS>) implique l'accord avec les conditions générales d'utilisation (<http://www.numdam.org/conditions>). Toute utilisation commerciale ou impression systématique est constitutive d'une infraction pénale. Toute copie ou impression de ce fichier doit contenir la présente mention de copyright.

NUMDAM

Article numérisé dans le cadre du programme  
Numérisation de documents anciens mathématiques  
<http://www.numdam.org/>

# NOTES DE LECTURE SUR F.R. MACAULAY (1938) : DYNAMIQUE DES MARCHÉS FINANCIERS

Georges PRAT  
Directeur de Recherche au CNRS \*

En 1938, Frederick R. Macaulay a publié un ouvrage préfacé par son ami Wesley C. Mitchell intitulé « *Some Theoretical Problems Suggested by the Movements of Interest Rates, Bond Yields and Stock Prices in the United States Since 1856* »<sup>1</sup>. Ce livre, qui est un produit du National Bureau of Economic Research (NBER), se situe respectivement huit ans et six ans après la parution des ouvrages d'Irving Fisher « *The theory of Interest* » (1930) et « *Booms and Depressions* » (1932), et deux années seulement après la parution de la « *General Theory* » de Keynes (1936). En fait, le livre de Macaulay est certainement le point culminant de son œuvre, les publications de l'auteur étant non seulement peu nombreuses mais encore réservées au NBER, du moins à ma connaissance<sup>2</sup>.

Avec Burns, Mitchell, Moore, Shiskin, ..., Macaulay peut être regardé comme l'un des pionniers du NBER, cette organisation ayant poursuivi en les développant les travaux de l'Institut Harvard<sup>3</sup> sur les cycles économiques (Business Cycles) et les interdépendances entre les différents indicateurs<sup>4</sup>. Dans ce contexte, le travail de Macaulay constitue une étude générale sur les taux d'intérêt en liaison avec le cours des actions, le niveau général des prix et l'activité économique aux Etats-Unis entre 1856 et 1936.

A mon avis, l'ouvrage de Macaulay possède deux principales caractéristiques :

– il présente de nombreuses réflexions, méthodes ou résultats qui sont **très novateurs**, notamment en ce qui concerne l'analyse des taux d'intérêt ;

---

\*. L'auteur est responsable du Centre d'Economie monétaire Appliquée de l'Université de Paris X-Nanterre. Le CEMA est une des équipes de l'Institut d'Economie Appliquée et d'Econométrie (URA 1239 du CNRS).

1. L'éditeur est le NBER, New York, 1938, 240 p, et 351 p d'Appendices numériques ! C'est au Professeur Maurice Allais que je dois d'avoir découvert ce remarquable ouvrage.

2. Avant la rédaction de son livre, Macaulay a contribué à un ouvrage collectif du NBER intitulé « *Income in the United States* », avec Mitchell, King et Knauth (1921 : summary, 152 p ; 1922 : Detail, 440 p.). En outre, il a publié un ouvrage méthodologique sur les séries temporelles « *The Smoothing of Time Series* » (1931, 172 p.). Après la publication de son livre de 1938, il ne semble pas que l'auteur ait réalisé des publications marquantes.

3. Dès 1919, l'Institut Harvard avait proposé une méthode d'analyse des fluctuations conjoncturelles comprenant trois variables : un indice A de « spéculation » (cours des actions), un indice B du marché des biens et services (indice des prix de gros) et un indice C du marché de l'argent (taux d'intérêt monétaire).

4. A l'époque, Macaulay était membre du « Research Staff » NBER, dont le directeur était Mitchell.

– en contraste, l'exposé ne possède pas toujours toute la clarté souhaitable, ce qui rend sa lecture souvent difficile.

Alors que la seconde caractéristique permet de comprendre pourquoi cet ouvrage (non traduit) reste dans son ensemble peu et mal connu par les économistes actuels<sup>5</sup>, la première implique qu'il mériterait d'être plus et mieux connu par ces derniers. Puisse cette note contribuer à montrer la grande valeur scientifique du livre de Macaulay, dont les enseignements restent très actuels.

Outre l'introduction (présentée comme le chapitre I), l'ouvrage comporte six chapitres dont les titres sont les suivants :

II – Le concept de taux d'intérêt de long terme.

III – De quelques difficultés théoriques et empiriques liées à la comparaison des taux d'intérêt de long terme à des dates différentes (et particulièrement à des dates très éloignées).

IV – La relation des fluctuations du rendement des obligations par rapport aux rangs des obligations – « Economic Drift »<sup>6</sup>.

V – Rendements des obligations, « Economic Drift » et cours des actions courantes.

VI – Les taux d'intérêt et le niveau général des prix.

VII – Avances ou retards temporels et prévision.

Enfin, on trouve cinq Appendices (A, B, C, D, E) dont le plus important est celui donnant les séries numériques relatives aux indicateurs de base et aux résultats des calculs. Ces données ont été élaborées avec une grande minutie et restent encore très précieuses<sup>7</sup>. Commentons brièvement le contenu de ces chapitres.

Dans le *chapitre II*, l'auteur présente le nouveau concept financier de « **duration d'une obligation** », qu'il oppose à celui de maturité (ou échéance), seule mesure jusqu'ici de la durée de vie d'une créance. La « duration » est la moyenne pondérée des échéances afférentes à chacun des paiements futurs liés à la détention de l'obligation (coupon et remboursement du capital), le coefficient de pondération de chaque paiement étant égal au rapport entre la valeur actualisée du paiement considéré et le cours du titre (lequel s'égalise à la valeur actualisée de toutes des recettes attendues)<sup>8</sup>. En fait, depuis une quinzaine d'années, les financiers ont redécouvert la « duration »

5. Avec une exception notoire : les financiers connaissent bien le concept de « duration » d'une obligation inventé par Macaulay.

6. Je n'ai pu trouver une traduction satisfaisante de cette expression.

7. Pour ne prendre qu'un exemple, dans le cadre de leur ouvrage « *Monetary Trends in the United States and the United Kingdom* » (The University of Chicago Press, 1982) Friedman et Schwartz utilisent les données de Macaulay pour estimer les « Yield Curves » caractérisant la structure par terme des taux d'intérêt avant 1900.

8. Voir p. 48 où l'auteur donne pour la première fois la formule permettant de calculer la duration  $D$  d'une obligation ( $n$  : maturité résiduelle;  $I$  : coupon annuel;  $F$  : valeur faciale

de Macaulay, laquelle joue actuellement un rôle important dans la gestion financière du risque de taux<sup>9</sup>. La « duration » constitue la seule invention de Macaulay ayant eu un impact important sur la science financière actuelle. Pourtant, les apports contenus dans les chapitres qui suivent paraissent **au moins aussi importants** que l'invention de la duration.

Les Chapitres III, IV et V s'enchaînent et forment un tout indissociable; les applications empiriques portent sur le secteur des chemins de fer, très représentatif des fluctuations économiques au cours de la période considérée<sup>10</sup>.

Le *Chapitre III* pose le problème de la **comparaison du rendement d'une même obligation à deux instants différents**. L'idée essentielle est que la qualité (grade factor) d'une obligation donnée (ou encore son rang) se modifie généralement au cours du temps, de sorte qu'une obligation considérée comme étant de premier rang aujourd'hui peut devenir de dernier rang demain en raison de la dégradation relative soit du secteur d'activité à laquelle elle appartient soit de la société émettrice<sup>11</sup>. Il en résulte une difficulté essentielle car, entre aujourd'hui et demain, l'évolution du rendement d'une obligation ne reflètera pas uniquement l'évolution du « phénomène intérêt », puisque l'actif financier s'est lui même modifié au cours du temps. L'« **Economic Drift** » représente cette déformation dans le temps de la structure du rang des obligations, laquelle est étudiée dans le chapitre IV.

Les Chapitres IV et V représentent la partie la plus originale, la plus complexe et la plus méconnue de l'œuvre de Macaulay<sup>12</sup>.

---

du titre;  $R = 1 + r$ , avec  $r =$  taux de rendement actuariel) :

$$D = \frac{\frac{I}{R} + 2\frac{I}{R^2} + 3\frac{I}{R^3} + \dots + n\frac{I}{R^n} + n\frac{F}{R^n}}{\frac{I}{R} + \frac{I}{R^2} + \frac{I}{R^3} + \dots + \frac{I}{R^n} + \frac{F}{R^n}}$$

où le dénominateur n'est autre que l'expression du prix de l'obligation. Macaulay montre à l'aide d'un exemple que la « duration » d'une obligation peut augmenter alors même que sa maturité diminue (p. 51). L'invention de la duration n'est donc pas un détail.

9. En particulier, la sensibilité du cours d'une obligation par rapport à une variation du taux d'intérêt est mathématiquement proportionnelle à la « duration » (le coefficient de proportionnalité est négatif et sa valeur absolue varie inversement par rapport au taux actuariel). Actuellement, on ne compte plus les travaux en finance utilisant la duration.

10. Ces trois chapitres sont sans doute les plus difficiles à comprendre. Il faut passer un nombre d'heures considérable pour comprendre les calculs effectués par Macaulay et saisir les interprétations données, qui sont très éparpillées dans l'ouvrage.

11. Macaulay admet que la question de la diminution de la maturité résiduelle d'une obligation au cours du temps peut être résolue en enchaînant les rendements des nouvelles obligations (*the more junior*) aux rendements des obligations plus anciennes (*the more senior*) de la même société.

12. Les détails relatifs aux chapitres IV et V sont présentés dans deux de mes publications :

– *La Bourse et la Conjoncture Economique*, (Economica, 1982) voir chapitre IV « Le risque financier général et le cours moyen des actions », pp. 69-105.

– « Une analyse de la modification des arbitrages des investisseurs sur le marché financier en fonction de l'importance du risque général », *JSSP*, N° 1 1984

Le *Chapitre IV* propose une méthode ingénieuse pour mesurer « l'Economic Drift », c'est-à-dire pour quantifier la modification au cours du temps de la structure de l'ensemble des obligations suivant leurs rangs. L'idée fondamentale est que les rangs relatifs entre les obligations d'un même échantillon se modifient au cours du temps, ce phénomène devant être distingué du mouvement général en hausse ou en baisse affectant dans la même proportion tous les taux de rendement. Le problème naît du fait que l'évolution de cette structure par rangs affecte la moyenne générale des rendements actuariels, cette dernière étant souvent considérée comme un indicateur représentatif « du » taux d'intérêt. Dans le but de séparer, dans l'évolution « du » taux d'intérêt à long terme, la part qui revient à la modification des rangs (« Economic Drift ») de celle qui revient au « phénomène intérêt » proprement dit, Macaulay invente un instrument, la **Ligne Sigma** (« Sigma Line »).

Une Ligne Sigma représente la droite ajustant un diagramme de dispersion sur lequel les logarithmes (décimaux) des rendements d'un échantillon d'obligations à une date donnée ( $t$ ) sont portés sur l'axe des abscisses (variables  $x$ ), et les logarithmes des rendements à la date suivante ( $t + 1$ ) sur l'axe des ordonnées (variable  $y$ ). Compte-tenu de la méthode d'ajustement retenue<sup>13</sup>, la pente d'une Ligne Sigma est égale au rapport entre l'écart-type de  $y$  et l'écart-type de  $x$ <sup>14</sup>. En fait, la pente de la Ligne Sigma permet de mesurer la variation de « Economic Drift » d'une période à l'autre<sup>15</sup>. Par conséquent, comme Macaulay veut mesurer l'évolution du niveau de ce phénomène, il lui suffit de calculer le « Produit Cumulé des Pentes des Lignes Sigma » (l'indice  $p$ ) sur la période étudiée. La variable  $p$  reportée sur le graphique ci-joint représente ce

---

N.D.L.R. Cet article a reçu le Prix Bourdin de la Société de Statistique au titre du meilleur article publié dans le *Journal* en 1984-86.

13. Cette méthode n'est pas les Moindres Carrés Ordinaires. En effet, la méthode suivie par Macaulay consiste à minimiser la somme des carrés des écarts verticaux et horizontaux à la Ligne Sigma, après avoir pondéré ces écarts respectivement par les écarts-types de  $x$  et de  $y$ . Les raisons essentielles de ce choix sont d'une part que  $x$  ne peut être regardé comme une cause de  $y$  pas plus que  $y$  peut être regardé comme une cause de  $x$ , et d'autre part que les erreurs sont d'autant plus grandes que les écarts-types de  $x$  et  $y$  sont grands.

14. Ainsi, une Ligne Sigma a pour expression :

$$x = \frac{\sigma_y}{\sigma_x} y + c, \quad \text{avec} \quad c = \bar{y} - \frac{\sigma_y}{\sigma_x} \bar{x}$$

où  $\sigma_x$  et  $\sigma_y$  représentent respectivement les écarts-types de  $x$  et  $y$ ,  $\bar{x}$  et  $\bar{y}$  représentent leurs moyennes.

15. En effet, « Lorsque la pente d'une Ligne Sigma est inférieure à l'unité, les obligations à fort rendement et de bas rang... sont plus actives que les obligations à bas rendement et de rang élevé. Elles ont soit des rendements qui augmentent moins rapidement que ceux des obligations de rang plus élevé, soit des rendements qui diminuent moins rapidement, ou même, dans certaines circonstances exceptionnelles, des rendements qui baissent alors que ceux des obligations à rendement plus bas augmentent » (p. 159). En fait, lorsque la pente est supérieure à l'unité, cette condition traduit une préférence accrue des investisseurs pour les obligations jugées les plus sûres, tandis que lorsque la pente est inférieure à l'unité, les investisseurs modifient leurs choix en fonction des obligations plus risquées mais offrant des rendements plus élevés.

produit cumulé<sup>16</sup>. Macaulay utilise ensuite l'indice  $p$  pour calculer « l'indice sigma » (« sigma index »<sup>17</sup>) représentant le rendement général des obligations duquel « l'Economic Drift » a été retiré, ce qui permet d'isoler le « phénomène intérêt » (en d'autres termes, « l'indice sigma », constitue une mesure empirique du taux d'intérêt sans risque, tant évoqué dans la littérature). Après avoir montré que le rendement des obligations duquel « l'Economic Drift » a été retiré correspond bien au rendement des obligations de hauts rangs, Macaulay en déduit qu'il y a là la preuve que l'indice  $p$  est une mesure valable de « l'Economic Drift ». Le produit cumulé  $p$  peut s'interpréter comme reflétant principalement le risque général ressenti par les investisseurs sur le marché des obligations<sup>18</sup>. Ajoutons que j'ai pu montrer que le logarithme du rapport entre le rendement des obligations de tous rangs et le rendement des obligations de plus hauts rangs est fortement corrélé avec l'indice  $p$  construit par Macaulay. Ce dernier résultat est intéressant car non seulement il permet d'établir un lien entre l'approche de pionnier de Macaulay et les analyses plus récentes fondées sur les primes de risque des taux de long terme, mais encore permet de confirmer d'une manière simple les résultats de Macaulay pour d'autres pays et d'autres périodes<sup>19</sup>.

16. L'indice  $p$  a ainsi pour expression (formule non donnée par Macaulay, mais permettant de retrouver ses résultats, comme le montre l'Appendice donné ci-après) :

$$p(t) = p(t_0 + n) = \frac{\sigma(t+1)}{\sigma(t_0)} \times \frac{\sigma(t+2)}{\sigma^*(t_0+1)} \times \dots \times \frac{\sigma(t+n)}{\sigma^*(t_0+n-1)}$$

où  $t_0$  correspond à l'année de début de calcul, et où  $n = t - t_0$ . Si  $\sigma(t_0 + 1)$  représente, par exemple, l'écart-type observé en Janvier 1870 de l'échantillon retenu pour la période Janvier 1869-Décembre 1869, alors  $\sigma^*(t_0 + 1)$  représente l'écart-type en Janvier 1870 de l'échantillon retenu pour la période Janvier 1870-Décembre 1870. On voit donc que tous les rapports  $\sigma(t_0 + i) / \sigma^*(t_0 + i - 1)$  sont calculés à partir d'un même échantillon d'obligations. Il en résulte que l'indice  $p(t)$  est automatiquement corrigé de tous biais pouvant résulter des modifications dans la composition des échantillons au cours du temps (i.e.  $p$  n'est pas affecté par ce que Macaulay nomme le « biais mathématique » (« Mathematical Drift ») qui faut donc radicalement distinguer de « l'Economic Drift ».

17. La formule de cet indice *sigma* n'est pas donnée afin de ne pas alourdir indûment ce texte de présentation synthétique. Le lecteur intéressé s'adressera directement à l'auteur.

18. En effet, Macaulay écrit :

*« Il est bien exact que le manque de confiance provoqué par une récession des affaires tend à accroître la demande relative d'obligations de plus haut rang et à abaisser la demande relative d'obligations de plus bas rang ... La relation entre le rendement des investissements de rang le plus haut et le ... rendement des autres investissements est toujours importante ... Habituellement, les gens prennent des risques dans l'espoir d'obtenir des gains plus importants qu'ils ne pourraient obtenir avec des investissements considérés comme absolument sûrs (p. 40) ... [cependant] une différence entre les rendements de deux obligations peut résulter autant d'une différence entre les marchés des deux obligations que d'une différence entre les degrés de confiance du public concernant les paiements futurs promis (p. 120) ».*

Cependant, comme la pente d'une Ligne Sigma est par construction un phénomène moyen, on peut penser que les différences entre les marchés (émissions, étroitesse, nature des opérateurs...) sont pratiquement gommées par une pente, et ceci *a fortiori* pour le produit cumulé des pentes.

19. Voir Prat, *La Bourse et la Conjoncture Economique*, op. cit chapitre IV, pp. 84-102.

D'une manière générale, l'apport de Macaulay concernant « l'Economic Drift » peut être apprécié par rapport à ce que soulignait Keynes dans la Théorie Générale : « l'état de confiance, *comme disent les hommes d'affaires, est une chose à laquelle ils prêtent toujours l'attention la plus stricte et la plus vigilante. Mais les économistes ne l'ont pas analysé avec soin, et se sont contentés le plus souvent d'en discuter en termes généraux ...* »<sup>20</sup>. On constate donc que deux années seulement après la parution de la *Théorie Générale*, Macaulay a apporté une réponse opérationnelle aux préoccupations de Keynes.

Le *Chapitre V* montre que les évolutions du cours des actions et de « l'Economic Drift » présentent des ressemblances très frappantes, la corrélation entre les deux grandeurs étant négative (voir le graphique ci-joint). Ce résultat constitue sans doute le « joyau » de l'ouvrage de Macaulay. L'hypothèse de départ de Macaulay n'est guère ici très originale : le cours des actions est supposé être le résultat d'une actualisation des bénéfices anticipés, ces anticipations (facteur de tendance) étant affectées d'une forte incertitude (facteur conjoncturel).

Dans ce contexte, les résultats illustrés par le graphique ci-joint montrent l'importance de la prime de risque contenue dans le taux d'actualisation pour rendre compte des fluctuations conjoncturelles du cours des actions, et c'est là l'apport de Macaulay<sup>21</sup>. En outre, cette corrélation montre que, lorsque l'incertitude générale ressentie sur le marché financier augmente, les investisseurs manifestent une préférence accrue pour les titres les plus sûrs (obligations de plus hauts rangs), tandis que lorsque l'incertitude diminue, les individus manifestent dans leur ensemble une préférence accrue pour les titres à la fois les plus risqués et les plus rémunérateurs (obligations de bas rangs et actions). Par conséquent, l'hypothèse simple et naturelle suivant laquelle les investisseurs chercheraient à maintenir stable le risque total de leurs portefeuilles lorsque le risque de marché augmente (en diminuant les parts des actifs très risqués) pourrait suffire pour rendre compte des résultats obtenus par Macaulay<sup>22</sup>.

Dans le *Chapitre VI*, Macaulay critique le modèle d'Irving Fisher concernant l'influence des variations passées de prix sur le niveau des taux d'intérêt<sup>23</sup>, ce modèle reposant pour la première fois sur la prise en compte de retards échelonnés (distributed lags). La critique sans doute la plus percutante

20. *Théorie Générale* Payot, Paris, 1969, pp. 163-64.

21. Ce résultat étaye l'interprétation de l'Economic Drift en termes de risque financier général.

22. Voir Prat, « Une Analyse de la Modification des Arbitrages des Investisseurs sur le Marché Financier en Fonction de l'Importance du Risque Général », *JSSP*, N° 1 1984, où la Seconde Partie donne une interprétation du résultat de Macaulay dans le cadre de la théorie moderne des choix de portefeuille en situation d'incertitude.

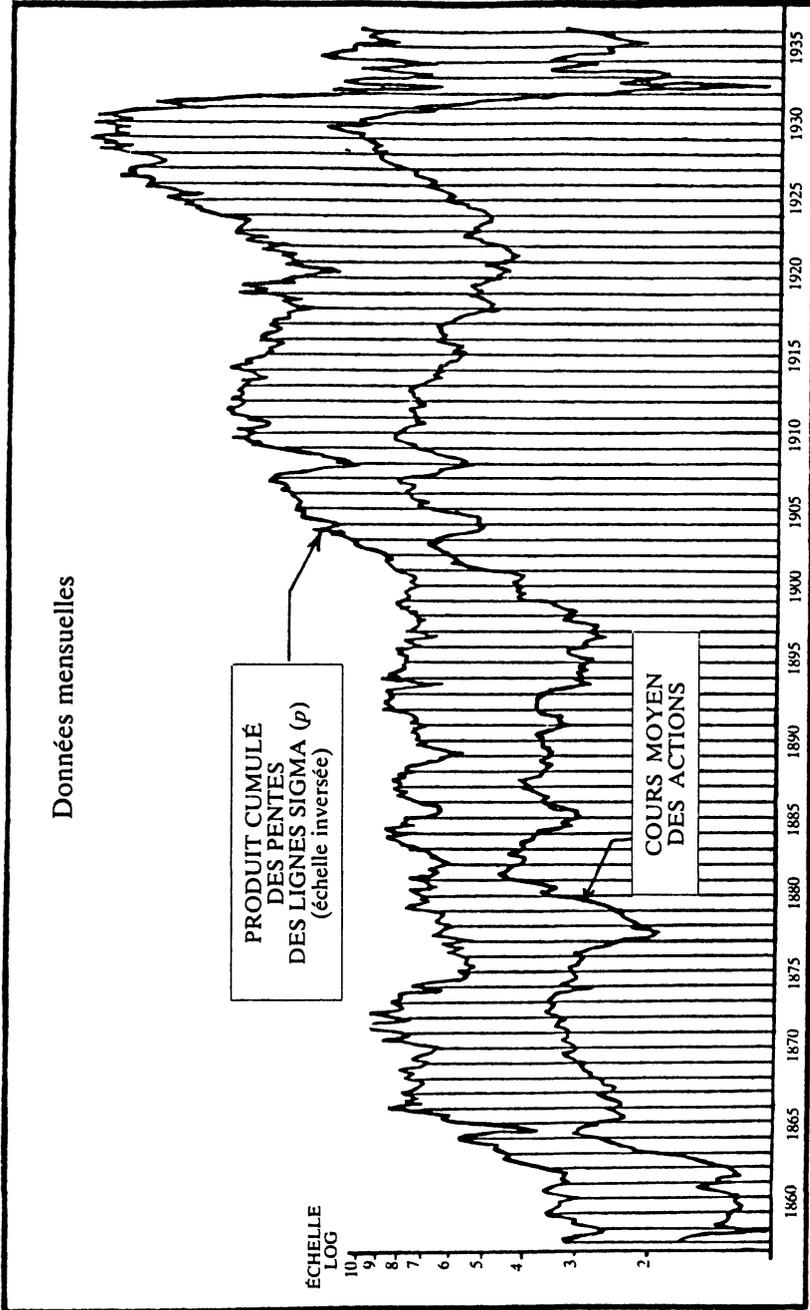
23. Voir les deux ouvrages de Fisher « *The Rate of Interest* » (1907) et « *The Theory of Interest* » (1930).

GRAPHIQUE

*Produit cumulé des pentes des Lignes Sigma (« Economic Drift ») et cours des actions*

Etats-Unis : 1857-1936 – Secteur des Chemins de Fer

*L'échelle du produit cumulé est inversée*



(et semble-t-il assez peu connue<sup>24</sup>) est liée au fait que les retards trouvés par Fisher sont très longs (de 30 à 120 années!); en effet, étant donné que les coefficients de pondération des valeurs passées du taux d'inflation sont supposés décroître suivant une loi arithmétique<sup>25</sup> chaque coefficient sera peu différent du précédent et du suivant en raison de la longueur des retards, de sorte que les moyennes pondérées calculées par Fisher sont **nécessairement** caractérisées par des évolutions proches du logarithme de l'indice des prix. On retrouverait donc un résultat trivial : la corrélation bien connue entre le **niveau** des taux d'intérêt et le **niveau** général des prix (« paradoxe de Gibson » suivant la célèbre expression de Keynes)<sup>26</sup>. Cette critique de Macaulay est d'autant plus pertinente que les corrélations entre les niveaux du taux d'intérêt et de l'indice des prix sont généralement plus élevées que les corrélations entre le niveau du taux d'intérêt et la moyenne pondérée des taux d'inflation passés calculée d'après le modèle de Fisher (laquelle contient pourtant un paramètre arbitraire supplémentaire avec la longueur du retard). Mais cette critique de Macaulay (qui pourrait d'ailleurs s'appliquer à d'autres modèles) ne vaut plus lorsque les retards sont courts, ce que montrent le plus souvent les analyses modernes sur la période d'après la Seconde Guerre.

Enfin, le *Chapitre VII* présente une **analyse comparée des fluctuations conjoncturelles**<sup>27</sup> **d'un grand nombre d'indicateurs économiques** représentant le cours des actions, les taux d'intérêt à court et long terme, la production réelle, les prix et la dépense nominale. L'auteur dégage les **séquences temporelles typiques suivantes** : 1) les taux d'intérêt de court terme baissent (augmentent), 2) les taux d'intérêt de long terme baissent (augmentent), 3) le cours des actions augmente (baisse), 4) la production réelle augmente (baisse), 5) la dépense nominale globale augmente (baisse), 6) le niveau général des prix augmente (baisse), 7) le taux d'intérêt de court terme augmente (baisse), etc...<sup>28</sup>. Cependant, il s'agit ici de décalages temporels **moyens**, et Macaulay insiste à juste titre sur le fait que ces décalages sont eux-mêmes des variables fréquentielles, c'est-à-dire qu'ils varient au cours du temps sinon en signe du moins en durée.

---

24. Voir cependant J.J. Durand, *La Dynamique des Taux d'Intérêt à Court Terme*, Thèse d'Etat, Université de Paris-X-Nanterre, Mai 1977, 573 p. (cf Partie I, Titre I, Chapitre III, pp. 241 et s.). En outre, dans son ouvrage « *Market Volatility* » (MIT, 1989), R. Shiller fait aussi état de la critique de Macaulay à propos de son analyse du paradoxe de Gibson (voir le chapitre 14 de l'ouvrage de Shiller).

25. Ce type de pondération n'est plus utilisé aujourd'hui. Le modèle adaptatif de formation des anticipations implique une décroissance non plus arithmétique des coefficients, mais une décroissance géométrique, ce qui est à la fois plus facile à mettre en œuvre et plus aisé à interpréter.

26. Sur un plan plus économique, Macaulay critique vivement l'hypothèse suivant laquelle les prêteurs et emprunteurs auraient la capacité de prévoir le futur, même si les anticipations sont imparfaites, ce que suppose l'approche de Fisher (voir pp. 190 et s.).

27. Ecart à une moyenne mobile calculée sur 43 mois (les logarithmes des variables étant considérés).

28. Ces séquences ont été confirmées après la Seconde Guerre et pour d'autres pays (voir Prat, *La Bourse et la Conjoncture Economique*, *Economica*, 1982, Chapitre X, pp. 241-46).

Voilà donc résumée ce qui me semble être la « substantifique moëlle » des différents chapitres de l'ouvrage de Macaulay ; la difficulté de lecture n'a d'égal que le caractère ingénieux et novateur de l'œuvre. Est-il nécessaire d'ajouter que ces quelques lignes ne sauraient traduire toute la richesses de l'ouvrage ? C'est dire que la lecture de ce dernier vaut la peine d'être entreprise par les économistes s'intéressant à la dynamique des marchés financiers en particulier, et aux fluctuations économiques conjoncturelles en général. Je crois aussi que **les spécialistes de l'histoire de la pensée économique devraient accorder à F.R. Macaulay une place dans leurs écrits**. J'espère que ces brefs commentaires, quelque peu décousus – comme l'ouvrage de Macaulay – éveilleront néanmoins leur curiosité.

## APPENDICE

Guide concernant les étapes du calcul  
du Produit Cumulé des Pentes des Lignes Sigma

En fait, Macaulay calcule la *somme cumulée*  $\Sigma$  des *logarithmes décimaux des pentes*  $\sigma_y/\sigma_x$  des *lignes Sigma* <sup>1</sup>. Cette somme se trouve dans l'Appendice de son livre, aux pages A 113-A 130, Table 6, colonne 2.

## 1. PREMIÈRE ÉTAPE : CALCUL DES ÉCARTS-TYPES

Les écarts-types entre les *logarithmes décimaux* des différents rendements des obligations sont donnés dans l'Appendice de l'ouvrage, Table 8, aux pages A 134-A 138, aux colonnes 6 et 7.

Sur cette table, on remarque que *chaque mois est répété deux fois* <sup>2</sup>, le plus souvent avec des écarts-types égaux, mais parfois avec de légères différences. Par exemple, on peut remarquer que les écarts-types donnés pour le mois d'avril 1857 (lignes 1 et 2) sont identiques. (=0.05520). Cela signifie que la composition de l'échantillon pour la période Avril – Juillet 1857 est restée la même que pour la période Janvier 1857 – Avril 1857. En fait, *au cours d'une même année, Macaulay garde toujours le même échantillon; c'est toujours au début de l'année que l'auteur opère des substitutions dans l'échantillon, s'il y a lieu.*

C'est pourquoi, on peut observer que le premier écart-type donné pour janvier 1858 est de 0.06620 (4ème ligne) et le second pour cette même date est de 0.06473 (5ème ligne). Cette différence résulte du fait que l'échantillon utilisé n'est pas identique dans les deux calculs. Ces substitutions effectuées peuvent être analysées à la page A-34, qui donne les rendements des deux échantillons.

## 2. CALCUL DES PENTES SUCCESSIVES DES LIGNES SIGMA

*Sur chaque ligne de la Table 8, l'échantillon est donc le même aux deux dates considérées, et Macaulay calcule le rapport entre les deux écarts-types observés aux deux dates ( $\sigma_y/\sigma_x^* = \sigma_{x(t+1)}/\sigma_{x(t)}^*$ ).*

---

1. Une fois la *somme*  $\Sigma$  connue, le *produit* cumulé s'en déduit naturellement par la formule  $p(t) = 10^{\Sigma(t)}$ . Le graphique joint représente  $\log p(t) = \Sigma(t)$ .

2. On trouve la présentation suivante :

- Janvier 1857 – Avril 1857
- Avril 1857 – Juillet 1857
- Juillet 1857 – Octobre 1857
- etc...

Ces rapports, qui sont les pentes des Lignes Sigma successives, sont donnés dans la table 8, dans la dernière colonne. Par exemple, entre janvier 1857 ( $\sigma_x^* = 0.05577$ ) et avril 1857 ( $\sigma_y = 0.05520$ ), la pente de la Ligne Sigma vaut ( $\sigma_y/\sigma_x^* = 0.05520/0.05577 = 0.9871$ ).

### 3. LA SOMME CUMULÉE DES LOGARITHMES DÉCIMAUX DES PENTES

Après avoir calculé toutes les pentes des Lignes Sigma pour les dates adjacentes (chaque pente étant calculée avec un même échantillon), Macaulay calcule la somme cumulée des logarithmes décimaux des pentes telle que<sup>1</sup> :

$$\log_{10} p(t_0 + i + 1) = \sum (t_0 + i + 1) = \sum_{i=1}^N \log_{10} \frac{\sigma_x(t_0 + i + 1)}{\sigma_x^*(t_0 + i)}$$

J'ai recalculé la somme cumulée pour la période 1857 – 1862 (voir tableau ci-après, colonne 4). La colonne 5, qui donne les résultats de Macaulay, permet de constater que les écarts entre les deux calculs restent faibles (les calculs de Macaulay ont été effectués à partir de tables, tandis que les miens ont été réalisés avec une calculatrice).

---

1. Le Graphique joint est obtenu à partir des pentes calculées entre les *mois adjacents* entre janvier 1857 et janvier 1936.

*Calcul du produit cumulé des pentes de lignes sigma*

Dates	Pentes des Lignes Sigma $\frac{\sigma x(t+1)}{\sigma^*_{x(t)}}$ (1)	$\text{Log}_{10} \frac{\sigma x(t+1)}{\sigma^*_{x(t)}}$  log <sub>10</sub> des pentes (2)	Calcul Prat Somme cumulée des log <sub>10</sub> des pentes $\sum$ (2)	Calcul Macaulay Somme cumulée des log <sub>10</sub> des pentes $\sum$ (3)
1857 avril	0.98971	-0.00449	1.99551	1.99551
juillet	1.10343	+0.04274	0.03825	0.03825
octobre	1.13578	+0.05529	0.09355	0.09254
1858 janvier	0.95694	-0.01912	0.07443	0.07342
avril	0.86929	-0.06084	0.01360	0.01258
juillet	1.04290	+0.01824	0.03184	0.02982
octobre	0.86841	-0.06128	1.97056	1.96854
1859 janvier	0.96271	-0.01650	1.95406	1.95204
avril	1.03809	+0.01624	1.97029	1.96828
juillet	1.03835	+0.01634	1.98664	1.98462
octobre	0.99859	-0.00061	1.98603	1.98401
1860 janvier	1.12296	+0.05036	0.03639	0.03437
avril	0.86331	-0.06383	1.97256	1.97054
juillet	0.94705	-0.02363	1.94893	1.94691
octobre	1.05514	+0.02331	1.97224	1.97022
1861 janvier	1.07388	+0.03096	0.00320	0.00118
avril	0.96565	-0.01518	1.98802	1.98600
juillet	1.04302	+0.01829	0.00631	0.00429
octobre	0.96985	-0.01333	1.99301	1.99099
1862 janvier	0.89056	-0.05034	1.94268	1.94065
avril	0.91055	-0.04070	1.90198	1.89995
juillet	0.90788	-0.04197	1.86001	1.85798
octobre	1.01591	+0.00686	1.86686	1.86484

Source : Macaulay, p. A-134, col 7;

(2) = calculs Prat; (3) = Macaulay p. A-114, col. 2.