

JOURNAL DE LA SOCIÉTÉ STATISTIQUE DE PARIS

OLEG ARKHIPOFF

Pour une théorie générale de l'agrégation

Journal de la société statistique de Paris, tome 127, n° 1 (1986), p. 27-43

http://www.numdam.org/item?id=JSFS_1986__127_1_27_0

© Société de statistique de Paris, 1986, tous droits réservés.

L'accès aux archives de la revue « Journal de la société statistique de Paris » (<http://publications-sfds.math.cnrs.fr/index.php/J-SFdS>) implique l'accord avec les conditions générales d'utilisation (<http://www.numdam.org/conditions>). Toute utilisation commerciale ou impression systématique est constitutive d'une infraction pénale. Toute copie ou impression de ce fichier doit contenir la présente mention de copyright.

NUMDAM

Article numérisé dans le cadre du programme
Numérisation de documents anciens mathématiques
<http://www.numdam.org/>

II

ARTICLES

POUR UNE THÉORIE GÉNÉRALE DE L'AGRÉGATION

(Deuxième partie)

Oleg ARKHIPOFF

Administrateur de l'Institut national de la statistique et des études économiques

Dans cette seconde et dernière partie de l'étude, on s'intéresse plus spécialement aux modes de scrutin neutres, dont les modes de scrutin majoritaires, particulièrement importants pour la pratique. Pour ces modes de scrutin, on donne toute une série de résultats accompagnés des conditions nécessaires et suffisantes d'agrégation F -cohérente. On termine sur une réflexion d'ensemble sur ce que devrait être une théorie générale de l'agrégation.

Mots-clés : scrutins majoritaires; paradoxes dans les scrutins; théorèmes d'impossibilité; paradigme; programme de recherche scientifique; consensus; régression à l'infini.

Towards a Theory of Aggregation (Second Part)

In this second and last part of the paper, one is more chiefly concerned with neutral voting rules and particularly with majority voting rules, so important in practice. Quite a series of results is given for these voting rules, with the corresponding necessary and sufficient conditions for coherent aggregation. At last, an overview follows about what a general aggregation theory should be.

Key words : Majority Voting Rules; Voting Paradoxes; Impossibility Aggregation Theorems; Paradigm; Scientific Research Programme; Consensus; Infinite Regress.

Chapitre 5

AGRÉGATIONS F -COHÉRENTES : THÉORÈMES GÉNÉRAUX — NEUTRALITÉ

1 — Notations et définitions préliminaires

Rappelons tout d'abord les notations suivantes

$$s(F) = \left\{ i; i \in N \ \& \ F(t_i(s)) = 1 \right\} ,$$

$$S(F) = \left\{ s; s \in T \ \& \ s(F) = N \right\} ,$$

$$L(F, r) = (\forall s) (s \in S(F) \Rightarrow F(r(s)) = 1),$$

cette relation logique étant évidemment la condition nécessaire et suffisante d'agrégation F -cohérente pour $r \in \mathcal{C}$.

Mutatis mutandis, dans un λ -schéma :

$$\begin{aligned} s_\lambda(F_\alpha) &= \{ i; i \in N \ \& \ F_\alpha(t_i^*(s_\lambda)) = 1 \}, \\ S(F_\alpha) &= \{ s_\lambda; s_\lambda \in T^\lambda \ \& \ s_\lambda(F_\alpha) = N \}, \\ L(F_\alpha, r_\lambda) &= (\forall s_\lambda) (s_\lambda \in S(F_\alpha) \Rightarrow F_\alpha(r_\lambda(s_\lambda)) = 1), \end{aligned}$$

avec $\lambda = \gamma(\alpha)$, $r_\lambda \in \mathcal{C}^\lambda$, étant entendu que, sauf mention expresse du contraire, s_λ est un élément quelconque de T^λ et r_λ un élément quelconque de \mathcal{C}^λ .

La figure 5 permet de situer tout cela.

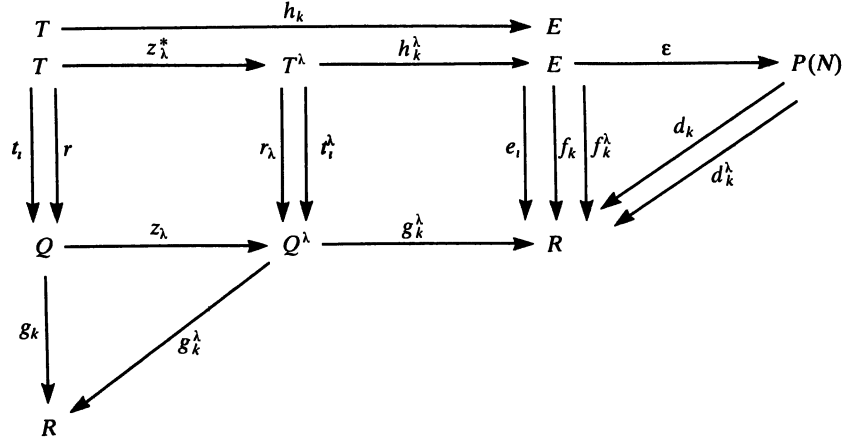


FIG. 5. — Passage du M -schéma à un λ -schéma
(voir la première partie de l'Étude)

Soit une rationalité F quelconque écrite sous forme normale conjonctive $F = \bigwedge F_\alpha$, $\alpha \in A$; $\gamma(\alpha) = \lambda$, $\gamma(A) = H$, où tout facteur F_α est de l'un des types F1 à F8 définis au chap. 3 § 2 (nous dirons pour abrégé que F_α est écrit sous forme normale).

Pour fixer les idées, supposons $F_\alpha = q_1 + q_2 + \bar{q}_3 + \bar{q}_4$. Nous dirons que q_k apparaît sous forme affirmative dans F_α , si elle est identique à q_1 ou à q_2 ; on exprimera cette situation en écrivant indifféremment :

$$q_k \in F_\alpha, \text{ ou } t(\alpha, q_k) = 1, \text{ ou encore « } k^+ \text{ ».}$$

De même, si $q_k = q_3$ ou bien q_4 , on dira que q_k apparaît sous forme négative dans F_α ; et on écrira :

$$\bar{q}_k \in F_\alpha, \text{ ou } t(\alpha, q_k) = 0, \text{ ou encore « } k^- \text{ ».}$$

Cela étant, nous dirons qu'une question $q \in M$ est *monomorphe* (dans F), si, quels que soient $\alpha, \alpha' \in A$, $t(\alpha, q) = t(\alpha', q)$.

Nous dirons que F_α possède une question *spécifique* (relativement à F) si

$$(\exists q) (q \in \gamma(\alpha) \ \& \ (\forall \alpha') (\alpha' \neq \alpha \Rightarrow q \notin \gamma(\alpha'))),$$

c'est-à-dire que q ne figure que dans F_α . Bien entendu, une question spécifique est monomorphe.

Introduisons les conditions suivantes sur F :

$$\begin{aligned} \Psi_0(F) & \quad (\forall q) (q \text{ monomorphe dans } F), \\ \Psi_1(F) & \quad (\forall \alpha) (\exists q) (q \text{ spécifique dans } \alpha), \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \Psi_2(F) & \quad (\forall \alpha) (\forall \alpha') (\alpha \neq \alpha' \Rightarrow (\exists q) (q \in \gamma(\alpha) \& q \notin \gamma(\alpha') \& q \text{ monorphe}), \\ \Psi(F) & \quad (\forall \alpha) (\forall s_0) (s_0 \in S(F_\alpha) \Rightarrow (\exists s) (s \in S(F) \& z_{\gamma(\alpha)}^*(s) = s_0)). \end{aligned}$$

Théorème 10 : $\Psi_0(F) \Rightarrow \Psi_2(F)$, $\Psi_1(F) \Rightarrow \Psi_2(F)$, $\Psi_2(F) \Rightarrow \Psi(F)$.

** La première partie du théorème repose sur la convention de simplicité dans l'écriture de F : on n'a jamais F_α implique $F_{\alpha'}$, dès que $\alpha \neq \alpha'$. La seconde partie est immédiate. La troisième partie est basée sur la possibilité de construire un m-uple $\langle p_1, \dots, p_k, \dots, p_m \rangle$, où tout α distinct de α_0 contient au moins une question telle que, selon qu'elle est affirmative ou négative dans F_α , on ait $\varepsilon(p_k) = N$ ou $\varepsilon(p_k) = \emptyset$. Puis on applique le théorème 11 qui suit (et qui est indépendant du théorème 10). **

Ainsi $\Psi_0(F)$, $\Psi_1(F)$ et $\Psi_2(F)$ sont des réalisations particulières de la condition générale $\Psi(F)$. Cette condition générale peut s'interpréter géométriquement comme suit : $S(F)$ peut être mis en correspondance biunivoque avec un sous-ensemble du produit cartésien $\prod S(F_\alpha)$, $\alpha \in A$. Si $\Psi(F)$, $S(F)$ est étiré parallèlement à la diagonale de cet espace cartésien.

2 — Résultats préliminaires

On a les théorèmes suivants qui nous seront utiles dans tout ce qui suit :

Théorème 11 : Soit $F = \prod F_\alpha$, $\alpha \in A$. Alors

$$\begin{aligned} s(F) & = \cap z_{\gamma(\alpha)}^*(s)(F_\alpha), s \in T, \alpha \in A; \\ s \in S(F) & \text{ ssi } (\forall \alpha) (z_{\gamma(\alpha)}^*(s) \in S(F_\alpha)), \end{aligned}$$

avec, toujours, quels que soient $s \in T$ et $\alpha \in A$;

$$S(F) \subset \prod S(F_\alpha), \alpha \in A.$$

** Par définition, $i \in s(F)$ équivaut à $F(t_i(s)) = 1$ et $s \in S(F)$ équivaut à $s(F) = N$. **

Théorème 12 : Si $F = \sum F_\alpha$, $\alpha \in A$, alors $s(F) = \cup z_{\gamma(\alpha)}^*(s)(F_\alpha)$, quel que soit $s \in T$.
Si $F = \text{non } F'$, $s(F) = s(F')^C$.

** *Mutatis mutandis*, démonstration analogue à celle du théorème 11. **

Un corollaire utile est le suivant, avec, pour fixer les idées, $F_\alpha = q_1 + q_2 + \bar{q}_3 + \bar{q}_4$:

$$s(F_\alpha) = s(q_1) \cup s(q_2) \cup s(q_3)^C \cup s(q_4)^C.$$

3 — Condition suffisante générale d'agrégation F-cohérente

Dans tout ce qui suit, nous supposons la condition PU , c'est-à-dire que tout $s \in S(F)$, logiquement possible eu égard à F , est « admissible ».

Théorème 13 (Condition suffisante d'agrégation F-cohérente) :

Soit $F = \prod F_\alpha$, $\alpha \in A$, les F_α pouvant être ou non écrits sous forme normale. On a sous la condition $PS(r, \gamma(A))$, quel que soit $r \in \mathcal{C}$, $\prod L(F_\alpha, \text{ass}_{\gamma(\alpha)}(r)) \Rightarrow L(F, r)$, $\alpha \in A$.

La condition PU n'intervient pas dans ce théorème dont la démonstration ne présente aucune difficulté.

4 — Condition nécessaire et suffisante générale d'agrégation F-cohérente

Nous venons de voir une condition suffisante de F -agrégation cohérente extrêmement générale. La réciproque, c'est-à-dire la condition nécessaire, est plus délicate.

Théorème 14 (condition nécessaire d'agrégation F -cohérente) :

Soit $F = \bigtimes F_\alpha$, $\alpha \in A$ (avec $B(\gamma(A))$), telle que $\Psi(F)$, les F_α étant écrits sous forme normale.

Alors, sous les conditions PU et $PS(r, \gamma(A))$, $L(F, r) \Rightarrow \bigtimes_{\alpha \in A} L(F_\alpha, ass_{\gamma(\alpha)}(r))$, quel que soit $r \in \mathcal{C}$,

** Supposons *non* $\bigtimes L(F_\alpha, ass_{\gamma(\alpha)}(r))$. Soit un quelconque α tel que *non* $L(F_\alpha, ass_{\gamma(\alpha)}(r))$. Existe donc un $s_0 \in S(F_\alpha)$ et $F_\alpha(r_{\gamma(\alpha)}(s_0)) = 0$; donc de par $\Psi(F)$ existe un $s \in S(F)$ tel que $z_{\gamma(\alpha)}(s) = s_0$, donc $F(r(s)) = 0$, donc *non* $L(F, r)$. **

Corollaire (condition nécessaire et suffisante d'agrégation F -cohérente) : Soit F écrite sous forme normale conjonctive $F = \bigtimes F_\alpha$, $\alpha \in A$, ($B(\gamma(A))$), telle que $\Psi(F)$. Alors, sous les conditions PU et $PS(r, \gamma(A))$, $L(F, r) \Leftrightarrow \bigtimes_{\alpha \in A} L(F_\alpha, ass_{\gamma(\alpha)}(r))$, pour tout $r \in \mathcal{C}$.

On notera le résultat particulier suivant :

Théorème 15 : Si F est un préordre total R défini sur un ensemble X d'alternatives x, y, z, \dots (et, plus généralement, si F est transitive), alors est vérifiée $\Psi(F)$.

5 — Cas particuliers

Pour terminer examinons le cas où F ne vérifie pas la condition $\Psi(F)$. Il nous faut alors, dans l'étude de la condition nécessaire, considérer les sous-classes \mathcal{C}_i de \mathcal{C} définies par : quel que soit α , avec $A_i \subset A$, \mathcal{C}_i est le sous-ensemble des r , tels que

$$\begin{aligned} \alpha \in A_i & \quad \text{non } L(F_\alpha, ass_{\gamma(\alpha)}(r)), \\ \alpha \notin A_i & \quad L(F_\alpha, ass_{\gamma(\alpha)}(r)). \end{aligned}$$

les A_i constituant une partition de A (au sens large, car on peut avoir pour un i_0 , $A_{i_0} = \emptyset$).

Théorème 16 : Si $F = \bigtimes F_\alpha$, $\alpha \in A$ et *non* $L(F_\alpha, ass_{\gamma(\alpha)}(r))$, avec, toujours $PS(r, \gamma(A))$, $B(\gamma(A))$ et PU :

$$L(F, r) = \sum_i \bigtimes_{\alpha \notin A_i} L(F_\alpha, ass_{\gamma(\alpha)}(r)).$$

** En l'absence de la condition $\Psi(F)$, le comportement de *non* $\bigtimes L(F_\alpha, ass_{\gamma(\alpha)}(r))$ devient fonction de r quant aux α mis en cause, d'où l'introduction des classes A_i et \mathcal{C}_i . C'est ce qui explique que la forme des r - F -cohérents varie selon la classe \mathcal{C}_i auxquelles ces r appartiennent. **

Le point remarquable est que, dans tous les cas, un r - F -cohérent est toujours assujéti à une condition $\bigtimes_{\alpha \in A_i} L(F_\alpha, ass_{\gamma(\alpha)}(r))$, avec, pour certains F très particuliers, $L(F, r) = r \in \mathcal{C}$.

6 — Conditions de souveraineté

La notion de souveraineté recouvre cette idée que, pour une question donnée, voire pour toutes les questions, il existe au moins un scrutin susceptible d'amener la réponse $g_k r(s) = 1$, et un autre, $g_k r(s) = 0$. Cette idée peut s'exprimer de plusieurs façons (Dans tout cela $R = \{0, 1\}$).

Posons

$SV1(r)$	$(D') \neq \emptyset$ (il existe au moins un non-dictatorial),
$SV2(r)$	$(D) \neq \emptyset$ (il existe au moins un dictatorial),
$SV(r)$	$SV1(r) \& SV2(r)$,
$P1(r)$	\emptyset est non dictatorial, $\emptyset \in (D')$,
$P2(r)$	N est dictatorial, $N \in (D)$,
$PP(r)$	$P1(r) \& P2(r)$.

Nous écrirons souvent, pour abrégé, $SV1$ pour $SV1(r)$, $SV2$ pour $SV2(r)$, etc.
 Nous verrons plus loin deux autres conditions de souveraineté

$$\begin{aligned} R(0, 1) & \quad \emptyset \notin (D), & \text{(plus précisément : } R(0, 1; r)), \\ R(1, 0) & \quad N \notin (D'), & \text{(plus précisément : } R(1, 0; r)). \end{aligned}$$

Cela pour mémoire.

Si r vérifie SV , nous dirons que r est *souverain*. Nous désignerons par \mathcal{C}^* , \mathcal{S}^* , \mathcal{A}^* , etc., respectivement, la classe des modes de scrutin souverains, celle des modes simples souverains, celle des modes neutres souverains, etc.

7 — Théorèmes de (semi-)neutralité

Nous allons voir maintenant que la résolution d'un problème d'agrégation F -cohérente au moyen de modes de scrutin simples $r \in \mathcal{S}$ implique souvent comme *condition nécessaire* la condition de neutralité $PN(r)$.

Théorème 17 : Soit une relation F assujettie à la condition $\Psi(F)$ et écrite sous forme normale conjonctive $F = \bigwedge F_\alpha$, $\alpha \in A$. Soit un mode de scrutin simple r , assujetti à la condition SV ($r \in \mathcal{S}^*$). S'il existe un facteur F_α du type $F3$, $F4$, $F5$ ou $F8$, alors $L(F, r)$ implique les deux propriétés suivantes :

$$\begin{aligned} V k^+ - nd & \Rightarrow V k'^- - nd, \\ V k^- - d & \Rightarrow V k'^+ - d, \end{aligned}$$

quels que soient $k, k' \in \gamma(\alpha)$. Le théorème reste vrai sous la seule condition $SV1$ si F_α est du type $F3$ ou $F5$, — sous la seule condition $SV2$ si F_α est du type $F3$ ou $F4$, — et sans condition de souveraineté particulière, si F_α est du type $F3$.

** Supposons, par exemple, qu'on rencontre $F_\alpha = q_1 + q_2 + \bar{q}_3 + \bar{q}_4$. Supposons $V 1 - nd$. Considérons l'ensemble T_0 des $s_0 \in S(F)$ tels que

$$\varepsilon h_1(s_0) = V, \quad \varepsilon h_2(s_0) = V' \in (D'), \quad \varepsilon h_3(s_0) = V, \quad \varepsilon h_4(s_0) = W, \quad W \in (D).$$

De par $\Psi(F)$, $T_0 \neq \emptyset$ et $L(F, r)$ implique $F(r(s_0)) = 1$. Soit un quelconque $s \in T$, tel que $\varepsilon h_3(s) = V$. $PS(r)$ implique $g_3 r(s_0) = g_3 r(s) = 0$, donc $V 3 - nd$. Etc. **

Un théorème similaire, d'un énoncé un peu plus complexe, montre que l'on a également, pour certaines occurrences de F_α , sous la condition SV (également modulable pour certains F_α) :

$$V k^+ - nd \Rightarrow V^C k'^+ - d \text{ et } V k^- - d \Rightarrow V^C k'^- - nd, \text{ quels que soient } k, k' \in \gamma(\alpha), k \neq k'.$$

Bref, dès que F est tant soit peu « riche » et « variée » en facteurs F_α , on atteint rapidement une quasi-neutralisation des modes de scrutin, laquelle devient une neutralisation $PN(r)$, si F est « symétrique », si par exemple est vérifié la condition

$$\Xi(F) \quad (\forall k) (\exists \alpha) (\exists \alpha') (q_k \in F_\alpha \ \& \ \bar{q}_k \in F_{\alpha'}),$$

les F_α et $F_{\alpha'}$ remplissant les conditions du théorème 17.

Nous n'insisterons pas davantage sur cet aspect des choses, notre but étant seulement de montrer que se situant au départ dans (\mathcal{S}^*) , on constate souvent qu'il est *nécessaire* d'opérer dans \mathcal{A}^* . D'où l'intérêt stratégique de la classe \mathcal{A}^* .

Le théorème 17 se généralise, pour des rationalités F convenables, $F = \bigwedge F_\alpha$, $\alpha \in A$, sous des conditions $PS(r, H)$, $H \subset \gamma(A)$, appropriées : la démonstration reste la même dans ses grandes lignes : on postule dans \mathcal{C} cette fois $V k - d$ (par exemple) et on cherche à déterminer la dictatorialité de V pour une certaine classe de scrutin $s_0 \in T_0$ et pour une certaine question $q_{k'} \neq q_k$. Tout tourne ensuite autour de la possibilité ou non de trouver un $\lambda \in H$, où, quel que soit $s \in T$, $\varepsilon h_{k'}(s) = V$, on puisse trouver un

$s_0 \in T_0$ tel que $z_\lambda^*(s) = z_\lambda^*(s_0)$. Quand cela est possible, la condition $PS(r, H)$ n'est en général pas loin d'impliquer $PS(r)$. On n'insistera pas davantage ici sur ce point, puisque nous ne nous intéressons pas spécialement à la problématique arrowienne (dans cet essai).

Chapitre 6

RÉSULTATS GÉNÉRAUX DANS LE CONTEXTE DES MODES DE SCRUTIN NEUTRES SOUVERAINS (CAS DE LA BIVALENCE)

Le chapitre 5 montre qu'en présence de la condition de souveraineté SV , il faut s'attendre à trouver comme condition nécessaire d'agrégation F -cohérente la condition de neutralité $PN(r)$. Certes, la condition SV est posée *a priori, ex nihilo*; mais on se rend bien vite compte que la négation partielle ou totale de SV conduit souvent à des cas triviaux ou « étranges ». La classe \mathcal{N}^* des modes de scrutin neutres souverains est donc déjà intéressante pour cette seule raison. Elle est aussi intéressante d'un point de vue pratique, puisque bon nombre de modes de scrutin usuels sont de ce type. Bien plus, si nous désignons par \mathcal{M}^* la classe des modes de scrutin neutres souverains assujettis à la condition PM (voir plus loin), scrutins que nous dénommerons *majoritaires* pour faire court, la plupart des scrutins effectifs entrent dans cette catégorie $\mathcal{M}^* \subset \mathcal{N}^*$; et en particulier, nous y trouvons les modes de scrutin que nous qualifierons de *S-majoritaires*, c'est-à-dire ceux où un ensemble d'électeurs V est dictatorial dès que $|V| \geq S$ (S étant un seuil $0 < S \leq n$).

Pour toutes ces raisons, nous consacrerons ce dernier chapitre à l'étude de l'agrégation F -cohérente, dans les contextes \mathcal{N}^* ou \mathcal{M}^* , pour $R = \{0, 1\}$.

1 — Les relations $RRR(k, k')$, $RR(k, k')$, $R(k, k')$

Nous commencerons par rechercher les conditions nécessaires et suffisantes d'agrégation F -cohérentes, $L(F, r)$, pour des rationalités du type $F = q_1 + \dots + q_k + \bar{q}'_1 + \dots + \bar{q}'_{k'}$, $k, k' \geq 0, k + k' \geq 1$, avec évidemment $k + k' = l$ ou $k + k' = m$ selon le cas. Comme à l'accoutumée toutes les questions figurant dans F sont distinctes; mais la nécessité d'alléger les notations implique un certain abus (de notation) sans conséquence : il est entendu que l'indice « 1 » de q_1 , par exemple, est différent de l'indice « 1 » de q'_1 .

Cela dit, pour un quelconque $r \in \mathcal{C}$ introduisons la condition $RRR(k, k'; r)$ — abrégée le plus souvent en $RRR(k, k')$:

$RRR(k, k')$ On ne peut trouver un scrutin $s \in T$ (le cas échéant T^λ) et des ensembles V_1, \dots, V_k et $W_1, \dots, W_{k'}$, distincts ou non, tels que

$$\begin{aligned} & V_1 \cup \dots \cup V_k \cup W_1^c \cup \dots \cup W_{k'}^c = N \quad \& \\ & \& \varepsilon h_1(s) = V_1 \quad \& g_1 r(s) = 0 \quad \& \\ & \& \dots \quad \& \dots \quad \& \\ & \& \varepsilon h_k(s) = V_k \quad \& g_k r(s) = 0 \quad \& \\ & \& \varepsilon h_1(s) = W_1 \quad \& g_1 r(s) = 1 \quad \& \\ & \& \dots \quad \& \dots \quad \& \\ & \& \varepsilon h_{k'}(s) = W_{k'} \quad \& g_{k'} r(s) = 1 \quad \& \end{aligned}$$

(rappelons, une fois de plus, que par abus de notations l'indice « 1 » correspondant à la première ligne (V_1), par exemple, est différent de celui dénoté également par « 1 » de la $k + 1^{\text{ème}}$ ligne correspondant à W_1 . Etc.).

Posons $\Pi (V_1, \dots, V_k; W_1, \dots, W_{k'})$, ou plus simplement Π , pour dénoter la relation :

$$V_1 \cup \dots \cup V_k \cup W_1^C \cup \dots \cup W_{k'}^C = N.$$

Introduisons encore, toujours pour un $r \in \mathcal{C}$ quelconque, les relations :

$RR(k, k')$ On ne peut trouver k ensembles V_1, \dots, V_k et k' ensembles $W_1, \dots, W_{k'}$, distincts ou non, tels que

$$\Pi \ \& \ V_1 \ q_1 - nd \ \& \ \dots \ \& \ V_k \ q_k - nd \ \& \ W_1 \ q'_1 - d \ \& \ \dots \ \& \ W_{k'} \ q_{k'} - d.$$

$R(k, k')$ On ne peut trouver k ensembles V_1, \dots, V_k et k' ensembles $W_1, \dots, W_{k'}$, distincts ou non, tels que

$$\Pi \ \& \ V_1 \ nd \ \& \ \dots \ \& \ V_k \ nd \ \& \ W_1 \ d \ \& \ \dots \ \& \ W_{k'} \ d.$$

Dans ces conditions, énonçons

Théorème 18 : Soit $F = q_1 + \dots + q_k + \bar{q}'_1 + \dots + \bar{q}'_{k'}$, $k, k' \geq 0$, $k + k' \geq 1$.

Quel que soit $r \in \mathcal{C}$, $L(F, r)$ ssi $RRR(k, k')$.

Le théorème est central, bien que sa démonstration soit immédiate (pour démontrer la condition nécessaire, on commencera pas supposer *non* $RRR(k, k')$). En effet, la condition $RRR(k, k')$ n'a pas été choisie au hasard, à partir de considérations éthiques, par exemple, mais en conséquence. Le théorème qui suit développe ce théorème de base :

Théorème 19 : Pour un $r \in \mathcal{C}$ quelconque, $R(k, k') \Rightarrow RR(k, k') \Rightarrow RRR(k, k')$; de plus :

$$PS(r) \Rightarrow (RRR(k, k', r) \Leftrightarrow RR(k, k', r)),$$

$$PN(r) \Rightarrow (RRR(k, k', r) \Leftrightarrow R(k, k', r)),$$

en rappelant que $PN(r)$ présuppose la condition $PS(r)$.

** La démonstration de ce théorème repose sur le théorème 5 et sur des résultats classiques relatifs aux quantificateurs [11], p. EI.35, proposition C 35, et p. EI.31, proposition C 23 et p. EI.34, proposition C 31. **

Ces deux théorèmes nous permettent de dresser le tableau suivant :

Si F est égale à :	$L(F, r)$		
	$r \in \mathcal{C}$	$r \in \mathcal{P}$	$r \in \mathcal{A}$
$F1 \ q$	$RRR(1,0)$	$RR(1,0)$	$R(1,0)$
$F2 \ \bar{q}$	$RRR(0,1)$	$RR(0,1)$	$R(0,1)$
$F3 \ q + \bar{q}'$	$RRR(1,1)$	$RR(1,1)$	$R(1,1)$
$F4 \ q + \bar{q}'_1 + \dots + \bar{q}'_k$	$RRR(1,k)$	$RR(1,k)$	$R(1,k)$
$F5 \ q_1 + \dots + q_k + \bar{q}'$	$RRR(k,1)$	$RR(k,1)$	$R(k,1)$
$F6 \ q_1 + \dots + q_k$	$RRR(k,0)$	$RR(k,0)$	$R(k,0)$
$F7 \ \bar{q}'_1 + \dots + \bar{q}'_k$	$RRR(0,k)$	$RR(0,k)$	$R(0,k)$
$F8 \ q_1 + \dots + q_k + \bar{q}'_1 + \dots + \bar{q}'_{k'}$	$RRR(k, k')$	$RR(k, k')$	$R(k, k')$

avec $k, k' \geq 2$

Nous avons ainsi directement les conditions nécessaires et suffisantes d'agrégation F -cohérente pour des rationalités écrites sous formes polynomiales simples ($F = F1$ à $F8$). Dans le cas général où $F = \bigvee_{\alpha \in A} F_{\alpha}$, $\alpha \in A$, F_{α} étant écrit sous forme normale ($F_{\alpha} = F1$ à $F8$), si F remplit les conditions du théorème 14, on a la condition $L(F, r)$ en effectuant les produits logiques des $L(F_{\alpha}, ass_{\gamma(\alpha)}(r))$ composantes (sinon on a seulement, par ce procédé, la condition suffisante, cf. théorème 13). On notera que, dans ce cas (notamment pour $r \in \mathcal{C}$), les conditions $RRR(k, k')$ portent sur des ensembles λ de questions différents (et les notations doivent être précisées davantage dans l'écriture desdites relations pour éviter toute ambiguïté).

2 — Propriétés générales des relations $R(k, k')$

Ainsi, la recherche des conditions d'agrégation F -cohérente passe par l'étude des conjonctions logiques de conditions $RRR(k, k')$, l'essentiel étant maintenant de simplifier si possible de tels produits logiques, puis de les interpréter.

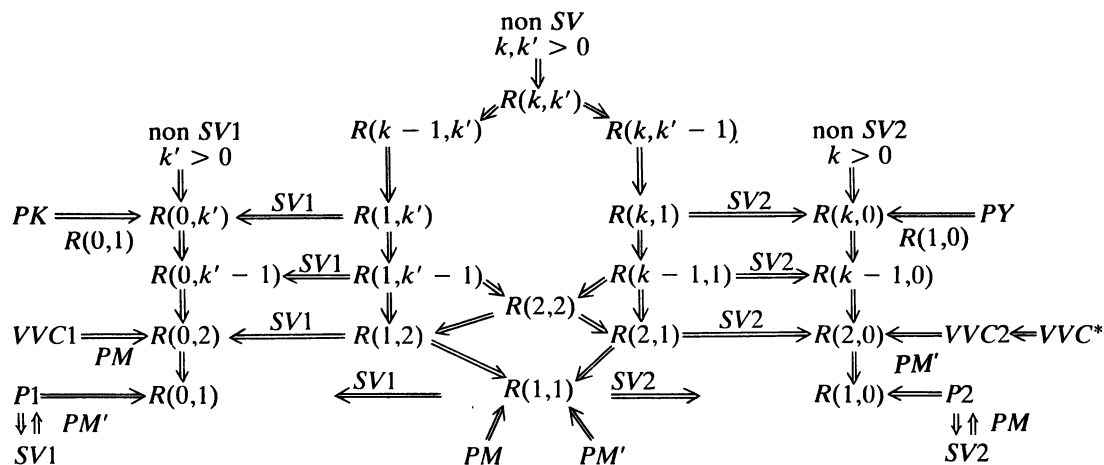
La formule classique $(A \Rightarrow B) \Rightarrow (A \& B \Leftrightarrow A)$ souligne l'importance du théorème suivant

Théorème 20 : Quel que soit $r \in \mathcal{E}$, on a

$$\begin{aligned} R(k+1, k') \Rightarrow R(k, k'), & \quad R(k+1, 0) \Rightarrow R(k, 0) \\ R(k, k'+1) \Rightarrow R(k, k'), & \quad R(0, k+1) \Rightarrow R(0, k) \\ SV1 \& R(k, k') \Rightarrow R(0, k'), & \quad SV2 \& R(k, k') \Rightarrow R(k, 0); \end{aligned}$$

cela, pour tous $k, k' \geq 1$.

La démonstration de ce théorème repose sur la clause selon laquelle les ensembles V_i et W_j peuvent être distincts ou non. Moyennant la condition SV , le théorème 20 est valable pour $RRR(k, k')$ et $RR(k, k')$. La figure 6 visualise le théorème 20, les flèches représentant les implications.



N.B. : $R(0, k') = PJ(k')$, $R(k, 0) = PC(k)$.

FIG. 6. — Propriétés générales des relations $R(k, k')$ dans \mathcal{E}

Remarques : Il peut être intéressant de remarquer, de façon très générale, que *non SV* implique $R(k, k')$, $k', k' > 0$, — *non SV1* implique $R(0, k)$, $k > 0$, — et *non SV2* implique $R(k, 0)$, $k > 0$.

3 — Interprétation des relations $R(k, k')$

Introduisons des relations qui vont nous servir à interpréter les relations $R(k, k')$, en commençant par les relations de souveraineté déjà vues.

SV1	$(D') \neq \emptyset$	(il existe un non-dictatorial),
SV2	$(D) \neq \emptyset$	(il existe un dictatorial),
SV	SV1 & SV2,	
P1	$\emptyset \in (D')$	(l'ensemble vide est nd),
P2	$N \in (D)$	(l'ensemble plein est d),
PP	P1 & P2,	

$PJ(k)$	L'intersection de k dictatoriaux, distincts ou non, est toujours non vide, — $PJ = PJ(2)$,
$PC(k)$	La réunion de k non dictatoriaux, distincts ou non, est toujours différente de N , $PC = PC(2)$,
JC	PJ & PC ,
$VVC1$	$V \in (D) \Rightarrow V^c \in (D')$,
$VVC2$	$V \in (D') \Rightarrow V^c \in (D)$,
VVC	$VVC1$ & $VVC2$,
VVC^*	$V \notin (D)$ implique $V^c \in (D)$,
PM	$V \subset W$ & $V \in (D) \Rightarrow W \in (D)$,
PM'	$V \subset W$ & $W \in (D') \Rightarrow V \in (D')$,
$PK(k)$	L'intersection de k dictatoriaux, distincts ou non, est toujours dictatoriale, $PK = PK(2)$,
$PY(k)$	La réunion de k non-dictatoriaux, distincts ou non, est toujours non-dictatoriale, $PY = PY(2)$,
T	Il existe un dictateur,
$T!$	Il existe un et un seul dictateur,
NG	Il n'existe pas de directoire,
PZ	$T!$ & NG .

Enfin,

DF	(D) constitue un filtre. C'est-à-dire : $R(0,1)$ & $P2$ & PM & PK ,
UF	(D) constitue un ultrafiltre. Ce qui équivaut à : DF & VVC^* ,
ID	(D') constitue un idéal. C'est-à-dire : $R(1,0)$ & $P1$ & PM' & PY .

Toutes ces relations ont un sens même pour des $r \in \mathcal{C}$ quelconques. Elles sont extrêmement parlantes, mais il faut bien voir qu'elles ne prennent tout leur sens et leur puissance que dans le contexte \mathcal{M}^* des modes de scrutin neutres souverains, assujettis à PM , comme nous le verrons.

Remarques : La définition de DF est celle de Bourbaki. Certains auteurs omettent dans la définition de DF la condition $P2$, ce qui a pour effet de faire de toute famille vide $(D) = \emptyset$ un filtre. Même remarque pour l'idéal, quand on omet la condition $P1$.

Le dictateur unique i de la condition PZ peut à bon droit être qualifié de **dictateur absolu**. En effet, c'est le vote de ce dictateur qui détermine dans tous les cas l'issue du scrutin (qui n'est autre que le vote de ce dictateur, indépendamment du vote des autres électeurs).

Cela étant, dans \mathcal{N} , deviennent vraies les propriétés suivantes, pour $k, k' \geq 2$,

$$R(1,k) \Rightarrow R(1,k+1), \quad R(k,1) \Rightarrow R(k+1,1), \\ R(k,k') \Rightarrow R(k,k'+1) \text{ \& } R(k+1,k'),$$

c'est-à-dire qu'on observe une simplification notable des résultats du théorème 20, puisque, maintenant (c'est-à-dire dans \mathcal{N}), quels que soient $k, k' \geq 2$:

$$R(1,k) = R(1,2), \quad R(k,1) = R(2,1), \quad R(k,k') = R(2,2).$$

De plus, dans \mathcal{C} (et *a fortiori* dans \mathcal{N}) :

$$PK(k) = PK, \quad PY(k) = PY, \quad k \geq 2.$$

L'autre résultat essentiel est que, dans \mathcal{N} :

$$R(1,1) = PM = PM'$$

(dans \mathcal{C} , on a seulement PM ou $PM' \Rightarrow R(1,1)$), et, en outre,

$$R(0,1) = P1, \quad R(1,0) = P2.$$

Si l'on note que de façon générale (c'est-à-dire dans \mathcal{E} et *a fortiori* dans \mathcal{N}) :

$$R(0,k) = PJ(k) \quad \text{et} \quad R(k,0) = PC(k), \quad k \geq 2$$

(et même pour $k = 1$, si l'on convient de poser $R(0,1) = PJ(1)$ et $R(1,0) = PC(1)$) la signification des $R(k,k')$ devient dans \mathcal{N} déjà très claire.

De plus, on a dans \mathcal{N} :

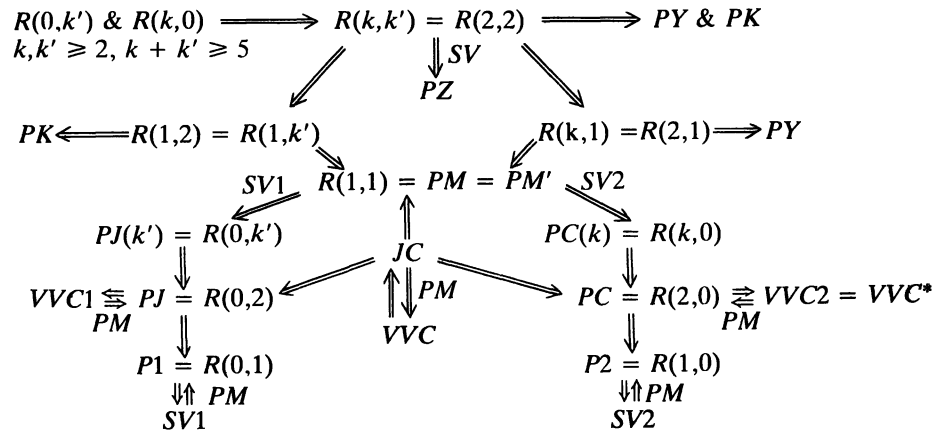
$$\begin{aligned} R(k,0) \ \& \ R(0,k') \Rightarrow R(2,2) \quad k, k' \geq 2, \quad k + k' \geq 5, \\ R(1,2) \Rightarrow PK \quad \text{et} \quad R(2,1) \Rightarrow PY, \\ PJ \Rightarrow VVC1 \quad \text{et} \quad PC \Rightarrow VVC2, \\ JC \Rightarrow VVC \ \& \ PM \ \& \ PP, \\ R(0,1) \Rightarrow SV1 \quad \text{et} \quad R(1,0) \Rightarrow SV2, \end{aligned}$$

et comme, dans \mathcal{E} , VVC^* implique $VVC2$ et que, dans \mathcal{N} , $VVC2$ implique VVC^* , il s'ensuit que, dans \mathcal{N} , VVC^* équivaut à $VVC2$.

De façon très générale (dans \mathcal{E}) :

$$PK \ \& \ R(0,1) \Rightarrow PJ(k), \quad k \geq 1, \quad PY \ \& \ R(1,0) \Rightarrow PC(k), \quad k \geq 1).$$

La figure 7 résume tous ces résultats.



N.B. — Dans \mathcal{N} est vraie la relation $SV1$ ou $SV2$.

FIG. 7. — Propriétés générales des relations $R(k,k')$ dans \mathcal{N}

Mais, comme nous l'avons déjà dit, la signification des $R(k,k')$ ne devient complète que dans \mathcal{N}^* , c'est-à-dire pour des modes de scrutin neutres (donc simples), souverains (SV) et assujettis au principe majoritaire PM (lequel principe ne prend toute sa force que dans \mathcal{N}).

Donnons encore et d'abord quelques propriétés en vrac :

$$\begin{aligned} \text{dans } \mathcal{E} : \quad PK \ \& \ (PM \ \text{ou} \ PM') \Rightarrow R(1,k), \quad k \geq 2 \\ PY \ \& \ (PM \ \text{ou} \ PM') \Rightarrow R(k,1), \quad k \geq 2 \\ UF \Rightarrow PK \ \& \ PC \ \& \ PJ(k) \ \& \ PP, \quad k \geq 1 \\ UF \Rightarrow R(k,k'), \quad k + k' > 0 \\ PZ \ \& \ PM \Rightarrow UF, \\ VVC1 \ \& \ PM \Rightarrow PJ, \\ VVC2 \ \& \ PM' \Rightarrow PC, \\ VVC \ \& \ PM \ \& \ PM' \Rightarrow JC. \end{aligned}$$

dans \mathcal{N} : $R(k,0) \& R(0,k') \Rightarrow R(k,k')$, $k,k' \geq 2, k+k' \geq 5$
 $R(k,0) \& R(0,k') \Rightarrow PK \& PY$, $k,k' \geq 2, k+k' \geq 5$
 $R(k,k') \& SV \Rightarrow PZ$,
 $R(0,1) \& R(1,0) \& PY \& PK \Rightarrow PZ$,
 $PK \& PY \& PM \Rightarrow R(k,k')$, $k,k' \geq 1$
 $PZ \& PM \Rightarrow PY \& PK$,
 $SV1 \& R(1,2) \& PC(k) \Rightarrow PY \& PK$, $k \geq 3$
 $SV2 \& R(2,1) \& PJ(k) \Rightarrow PY \& PK$, $k \geq 3$.

Alors, dans \mathcal{M}^* , PZ équivaut à $PY \& PK$, à $PJ(k) \& PC(k')$ pour $k,k' \geq 2$ et $k+k' \geq 5$, à $PK \& PC$, à $PY \& PJ$ et, surtout, à $R(2,2)$. PZ est alors à juste titre *la condition du dictateur absolu*. C'est aussi un ultrafiltre (on notera ici que dans \mathcal{E} , si (D) constitue un ultrafiltre, alors sous la condition n fini, (D) vérifie PZ).

La suite d'équivalences qui vient d'être donnée pour PZ souligne le fait suivant : dans \mathcal{M}^* , si $F = \bigcup F_\alpha$ est tant soit peu complexe, c'est-à-dire si les F_α sont variés, la condition composée $L(F,r)$ à de bonnes chances d'être la condition PZ du dictateur absolu, c'est-à-dire qu'on aboutit alors à ce qu'on appelle une totale « impossibilité d'agréger », cela d'un point de vue « démocratique ».

PK équivaut à $R(1,2)$ et PY à $R(2,1)$. De plus, PY équivaut à $T \& NG$.

Les conditions PK et PY , toujours dans \mathcal{M}^* , quoique plus acceptables que la condition PZ du dictateur absolu, restent néanmoins très « probables » et très « dictatoriales ». De toute façon, dès qu'on s'adresse aux modes de scrutin neutres, on doit nécessairement définir les modes de scrutin en termes exclusifs d'ensembles dictatoriaux. Pour effacer le caractère déplaisant de l'ensemble dictatorial par l'arbitraire qui s'en dégage, il faut s'arranger pour que tout le monde puisse faire partie de tels ensembles. C'est-à-dire qu'il faut que tous les électeurs soient traités symétriquement, sur un même pied d'égalité : c'est introduire la condition PA d'*anonymat* qui s'exprime comme suit, dans \mathcal{N} , — la dictatorialité d'un ensemble est seulement fonction du nombre des électeurs qui le composent. On a alors affaire à des scrutins S -majoritaires qui se trouvent être des scrutins \mathcal{M}^* (voir la fin de ce chapitre).

Enfin $P1$ se confond avec $SV1$ et $P2$ avec $SV2$.

La figure 8 résume tout ce qui vient d'être dit.

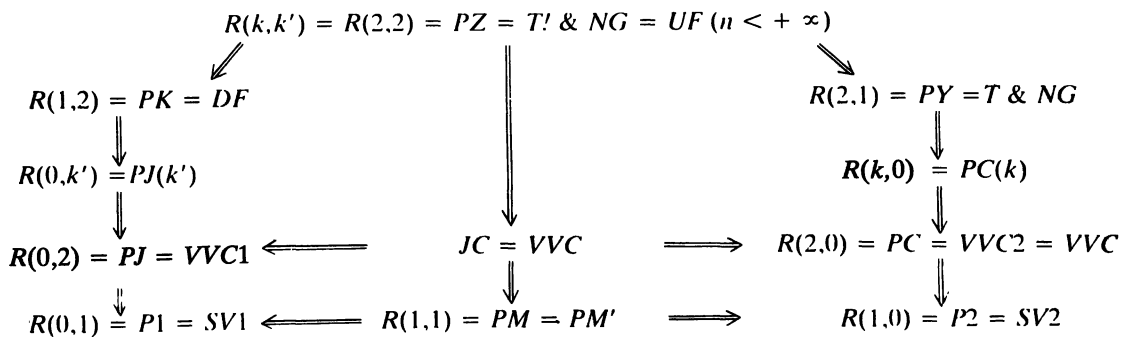


FIG. 8. — Propriétés générales des relations $R(k, k')$ dans \mathcal{M}^*

4 — Conditions nécessaires et suffisantes d'agrégation F-cohérentes dans \mathcal{M}^* et \mathcal{N}^*

Rappelons que \mathcal{N}^* désigne la classe des modes de scrutin simples assujettis aux conditions $PN(r)$ et $SV(r)$ et \mathcal{M}^* celle des modes de scrutin neutres souverains assujettis, de plus, au principe majoritaire $PM(r)$; et tout mode de scrutin $r \in \mathcal{M}^*$ sera dit, en abrégant, *mode de scrutin majoritaire*.

Théorème 21 : Si F est une relation quelconque assujettie à la condition $\Psi(F)$, un mode de scrutin neutre souverain, $r \in \mathcal{N}^*$, F -cohérent est nécessairement de l'un des quatorze types suivants : PZ , PK , PY , JC , PM , $PJ(k)$, $PC(k)$, $P1$, $P2$, PP , $PJ(k) \& PP$, $PC(k) \& PP$, $PJ(k)$, & PM , $PC(k) \& PM$, avec $k \geq 2$ (pour mémoire : sous la condition PU , et hormis les cas triviaux $F1$ et $F2$ où $L(F,r) = r \in \mathcal{N}^*$).

** Le théorème repose essentiellement sur le fait que $R(k,k')$ implique $R(1,1)$, c'est-à-dire PM (ou PM') dans \mathcal{N} ; et *a fortiori* dans \mathcal{N}^* . **

On notera que dans \mathcal{N} est nécessairement vraie $SV1$ ou $SV2$.

Si F ne vérifie pas $\Psi(F)$, on peut avoir, en sus des relations ci-dessus, $L(F,r) = PK$ ou PY , $L(F,r) = PK$ ou $PC(k)$, etc., voire même $L(F,r) = r \in \mathcal{N}^*$.

En tout état de cause, un mode de scrutin F -cohérent est nécessairement de l'un des quatorze types énoncés dans le théorème 21, dès que $L(F,r) \neq r \in \mathcal{N}^*$.

Énonçons enfin :

Théorème 22 : Si F est une relation quelconque assujettie à la condition $\Psi(F)$ un mode de scrutin majoritaire quelconque ($r \in \mathcal{M}^*$) F -cohérent est nécessairement de l'un des six types suivants : PZ , PK , PY , $PJ(k)$, $PC(k)$ et JC , $k \geq 2$ (hormis les cas triviaux où $L(F,r) = r \in \mathcal{M}^*$, c'est-à-dire les cas nécessitant $P1$, $P2$ ou PM automatiquement vérifiés dans \mathcal{M}^*) — pour mémoire, sous la condition PU .

Quand $\Psi(F)$ n'est pas vérifiée, les remarques faites pour le théorème précédent restent valables *mutatis mutandis*.

Les modes de scrutin S -majoritaires évoqués au début de ce chapitre forment une classe que nous dénoterons par

$$\mathcal{A}^* = \left\{ r; r \in \mathcal{N}^* \& (V \in (D) \text{ ssi } |V| \geq S) \& 0 < S \leq n \right\}.$$

On vérifiera aisément que ces modes de scrutin vérifient bien PM (même si $S = 0$) et PP (seulement $P2$ si $S = 0$). Donc on a bien $\mathcal{A}^* \subset \mathcal{M}^*$.

Voici les performances de ces modes de scrutin (cf. [3], pp. 89 sq.) : ils vérifient

— PZ ssi $n = 1 \& S = 1$,

— PK ssi $S = n$,

— PY ssi $S = 1$,

— $PJ(m)$ ssi $S > \frac{m+1}{m} n$, (avec $n = mp + r$, $0 \leq r < m$),

— $PC(m)$ ssi $S \leq p$ (pour $n = mp$),

— $PC(m)$ ssi $S \leq p + 1$ (pour $n = 2p + r$, $0 < r < m$),

— JC ssi $n = 2p + 1 \& S = p + 1$ (scrutin à la majorité simple, pour un nombre impair d'électeurs). Ce qui montre que JC ne se confond nullement avec PZ , comme on le pense quelquefois.

CONCLUSION

Le schéma de Condorcet dans la théorie générale de l'agrégation

Le schéma de Condorcet, qui vient d'être ainsi explicité et développé dans ses grandes lignes, fournit un formalisme logique commun à une multitude de problèmes particuliers, en apparence parfois indépendants des uns des autres. Bon nombre de résultats publiés dans la littérature trouvent dans ce schéma leur place exacte (mais la revue de ces travaux n'est pas le but du présent travail). Ainsi, le

schéma des élections particulières constitue une pièce maîtresse d'une théorie générale du passage de l'individuel au collectif, d'une théorie de l'agrégation dont l'urgence se fait sentir chaque jour davantage.

Toutefois la théorie reste à faire; et la présente étude ne prétend aucunement être exhaustive, de nombreux axes de recherche importants restant à explorer. En particulier, nous n'avons rien dit, ici, du passage d'un schéma à un autre, *quand on considère des valences différentes*.

Mais il y a plus. Tout d'abord, ici (et ailleurs) la problématique de l'agrégation reste posée en termes exclusivement *statiques*. Or, dans la vie courante, par exemple en matière politique, les phénomènes d'agrégation ne prennent leur pleine signification que dans une perspective *dynamique*, et s'interprètent plus comme une recherche de consensus autour des éléments sur lesquels porte le débat collectif, — un consensus primordial, plus profond, étant acquis (ou censé l'être) sur la texture du contexte où s'inscrit ledit débat (*l'affectio societatis*, la volonté d'appartenir à une même communauté, la volonté de discuter ensemble et d'aboutir). Dans de telles circonstances, les scrutins effectifs n'apparaissent plus que comme des manifestations, des indications ponctuant un processus collectif, dont il importe alors, et surtout, de savoir s'il convergera ou non. Et il tombe sous le sens que dans une telle perspective, les imperfections des scrutins et les éventuelles anomalies dans l'issue de ceux-ci ne sont que des péripéties qu'il faut relativiser. Il n'y a plus ici d'« impossibilités » d'agrégation mais seulement des imperfections auxquelles on peut toujours remédier.

On peut encore se demander si, même envisagée en termes statiques, la problématique de l'agrégation s'analyse inéluctablement comme un mode de scrutin lato sensu, c'est-à-dire, comme on l'a vu, le passage F d'un « scrutin » σ à un « agrégat » ω . Il n'en est vraisemblablement rien, puisque, quand on considère le phénomène de l'agrégation sémantique (le sens collectif véhiculé par une langue), les choses semblent se présenter tout autrement. Très brièvement, on peut dire que ce sens collectif ne vaut que par et par rapport à une communauté linguistique plus ou moins cohérente, plus ou moins fortement *structurée*. Ceux qui ignorent la structure sémantique commune ou refusent de s'y couler s'excluent *ipso facto* et d'eux-mêmes de la communauté. Peut-être qu'ici nous retrouverons le concept de *paradigme* au sens qu'en donne Thomas S. Kuhn, ou bien encore celui de *Cité scientifique* bachelardienne.

Cette structure commune est certainement difficile à isoler et peut appartenir à différents types. En particulier, elle peut exhiber diverses espèces de consensus, comme nous avons essayé de le montrer in [5]. Cette structure n'est jamais figée mais évolue en même temps qu'évolue la communauté linguistique porteuse. Et nous retrouverons la dimension temporelle des phénomènes d'agrégation. Nous avons évoqué Kuhn, il y a un instant; nous pourrions maintenant évoquer le concept évolutif de *Programme de recherche scientifique* d'Imre Lakatos, avec cette analogie tentante qui consiste à mettre en parallèle le *noyau dur* d'un Programme avec ce que nous avons appelé *l'affectio societatis*.

Des paradoxes bien réels dans les scrutins (ce sont alors des nuisances effectives)

Mais revenons au schéma de Condorcet, à une problématique statique où se détermine à partir d'un scrutin effectif une issue également concrète. Et demandons-nous à quoi peut bien servir une théorie générale de l'agrégation : « Encore des paradoxes et des théorèmes d'impossibilité ... » diront vraisemblablement ici certains. Une première réponse à cette objection courante est une constatation, celle de l'existence bien réelle de ces paradoxes, lesquels révèlent des nuisances concrètes, tangibles : inintelligibilité de tels résultats contradictoires lors de telle ou telle enquête d'opinion publiée dans les gazettes; — délibérations confuses dans telle ou telle assemblée votant sur diverses questions inscrites à l'ordre du jour, débouchant sur des impossibilités de décision, sur des « indécisions », voire (ce qui est plus insidieux) sur des décisions échelonnées dans le temps et se contredisant entre elles; — irritation devant la « stupidité » de règlements incohérents. Etc. Ce qu'il faut bien voir, c'est une nécessité, à chaque fois,

de procéder à une étude attentive des agrégations mises en œuvre explicitement ou implicitement. Ce sont des problèmes bien concrets dont il convient de prendre conscience.

Un objectif *pratique* de la Théorie de l'agrégation est donc *l'étude systématique des modes de scrutin et de leurs performances* : il n'existe pas de mode de scrutin idéal et universel, mais des modes de scrutin particuliers propres à certaines tâches et inadéquats à d'autres. C'est la raison pour laquelle nous nous sommes attardés sur la classe des modes de scrutin neutres, notamment majoritaires. Car, évidemment, ce sont principalement ceux-là qui sont utilisés dans la pratique. Et, dans cet ordre d'idée, des modes de scrutin aussi courants que la méthode des rangs de Borda, voire le banal calcul d'une moyenne, peuvent s'analyser, dans un M-schéma approprié, l'ensemble R des valences étant convenablement choisi, comme les modes de scrutin simples au sens de la présente terminologie.

Des paradoxes, eux fictifs (seulement des maladroites théoriques?)

Un paradoxe agrégatif peut s'observer concrètement, quand sont effectifs et le scrutin et les règles qui vont en déterminer l'issue. Cela est évident.

Ce qui vient juste d'être évoqué nous conduit à cet autre objet de la Théorie de l'agrégation, un but disons plus « théorique », qui est de produire une justification idéale d'un agrégat ω , comme, par exemple la mesure du « bien-être national », la « volonté générale », « l'intérêt général » — et autres expressions aussi banales qu'*indéfinies*.

Ici la donnée effective est l'agrégat et son mode de détermination connu (par exemple un calcul) ou inconnu (ou mal connu : par exemple « le prix du marché »). Voulant « justifier » cet agrégat, il est naturel et tentant d'y voir le résultat d'un scrutin déterminé selon des règles acceptables.

Ici, l'on observe deux attitudes, deux philosophies du réel collectif radicalement distinctes. La première pose l'existence en soi de l'agrégat ω ; certes cet agrégat n'est pas connu *a priori*, mais on est assuré de sa nature C , et on ne doute pas un seul instant qu'il existe ($\omega \in C$). Le parallèle avec le problème météorologique de l'existence de la valeur vraie d'une grandeur s'impose de lui-même.

L'autre approche est constructiviste : le collectif n'existe pas *a priori*, mais *se définit* par la donnée d'un schéma d'agrégation qu'il faut reconnaître et assumer : sont données d'avance et la forme de la question, donc du scrutin σ (ici C^n), et la forme de la réponse (ici C); — et est donnée d'avance le mode de passage F de la réponse collective concrète qu'est le scrutin effectif à l'agrégat ω . On n'échappe pas également à cette conclusion certainement importante que, si incohérence il y a, cette incohérence n'existe que par le schéma d'agrégation adopté. Il en est d'ailleurs de même dans le cas précédent des paradoxes-nuisances effectifs; mais ici le paradoxe est fictif, car il ne vaut que par la nature du schéma justificatif théorique adopté. Ici, on peut, peut-être, à bon droit s'écrier : encore des paradoxes, des théorèmes d'impossibilité!

La recherche de « théorèmes d'impossibilité » pour elle-même est évidemment critiquable (et a été critiquée à juste titre). En revanche, l'analyse systématique d'un schéma d'agrégation donné, dans toutes ses conséquences, est nécessaire, quand bien même elle serait ingrate et fastidieuse : il n'existe pas de théorèmes d'impossibilité, de théorèmes négatifs en soi, mais seulement des jugements de valeur à leur propos.

Depuis Condorcet et Arrow nous avons appris qu'il était hautement périlleux d'agréger sans précaution ou bien qu'il était parfois apparemment impossible de le faire, dès qu'on faisait attention à ce qu'on entreprenait. Quel est donc alors l'intérêt de se lancer dans de pareilles entreprises, quel est l'intérêt de prétendre justifier la signification d'un agrégat, notamment pour qui adopte un point de vue constructiviste? Pour essayer de répondre à cette interrogation somme toute très légitime, on commencera par remarquer qu'un même agrégat, en général, peut être compatible avec *plusieurs* schémas de justification (et aussi être « déterminé » selon *plusieurs* modèles « explicatifs » : car il se peut que le mode de calcul ou de détermination de l'agrégat ne soit qu'un des éléments du schéma justificatif). Nous avons

parlé de « remarque », mais peut-être qu'il aurait mieux valu parler d'« hypothèse », car tout cela mérite d'être davantage précisé et, surtout, démontré. Quoi qu'il en soit, à partir de là, la recherche d'un bon schéma justificatif peut conduire soit à la conclusion que l'agrégat supposé exister en soi n'existe pas ou, plutôt, n'est pas de la sorte idéale qu'on imaginait, soit, surtout, conduire à une révision raisonnée, lucide, du mode de calcul de l'agrégat. C'est déjà un résultat appréciable.

Quant à l'utilité même d'une « bonne » justification de l'agrégat, elle est évidente quand on considère que cette sorte d'agrégat est généralement l'objet du débat collectif; et qu'il est alors avantageux d'obtenir un certain consensus de base sur la signification de ces agrégats. Il en est ainsi, pour reprendre un exemple déjà cité, quand on discute du bien-être national et choses analogues.

Dans le même ordre d'idée, mais avec des préoccupations se situant dans le prolongement d'axes de recherche déjà un peu différents, on peut s'arrêter un instant sur l'ambiguïté, l'ambivalence de ce qu'on entend par « décision collective », selon qu'on met l'accent sur « décision » ou sur « collectif ». On peut en effet opposer la vraie décision (collective) à la décision que l'on qualifiera ici d'agrégée. La fixation d'un prix administré — un tarif public par exemple — et la détermination d'un prix sur un marché peuvent illustrer avantageusement cette dualité. C'est aussi l'opposition familière à certains économistes entre le plan et l'« anarchie » du marché concurrentiel. On retrouve encore la même dualité chez Henri Duprat, lequel oppose ce qu'il appelle les grands projets, qui sont, dit-il, des « affaires d'État » aux « choix collectifs » (1).

Dans le premier cas, une décision « collective » est effectivement prise, décision, qui est datée et attribuable, formellement, à une certaine organisation (2), voire à un individu précis, — et qui va ensuite développer tous ses effets. Ces effets résultent bien d'une décision, que nous appellerons ici *décision collective*. Une telle décision résulte d'une procédure bien identifiable (en principe).

Dans le second cas le collectif est dilué; et les effets ou, plutôt, la poussière des micro-décisions indirectement observables par leurs effets, constituent la donnée concrète première. Ce que nous qualifierons de *décision agrégée* est de l'ordre d'un agrégat. Et ce n'est que par une vue de l'esprit, qu'on attribue les effets statistiquement observés à une « décision » collective qui est, en quelque sorte, *a posteriori*. Ici, le préalable est un problème d'observation statistique correct, c'est-à-dire effectuée au « niveau de pertinence » idoine (1).

Du bon et du mauvais usage de la régression à l'infini

Dans tout cela, on ne peut manquer, à un moment ou à un autre poser la question : *le mode de scrutin doit-il à son tour faire l'objet d'un scrutin?* On sent aussitôt le danger d'une régression à l'infini ou, si l'on écrase les différents niveaux du discours les uns sur les autres, le danger du paradoxe du menteur. Il serait étrange, dans une conclusion, de commencer à examiner en détail ce problème de la Théorie de l'agrégation. Bornons-nous donc plutôt à donner un paradoxe amusant (d'ailleurs très général). Par exemple, en utilisant le traditionnel scrutin à l'unanimité, mettons aux voix la proposition « il n'y a pas unanimité des électeurs ». L'issue des scrutins est cocasse, hormis le cas où tous répondent par non. Les êtres collectifs mentent parfois, eux aussi! Mais, négligeant maintenant la boutade, ce qu'il convient de souligner à ce dernier propos est que le « mensonge » est ici inscrit dans la nature des choses, c'est-à-dire inhérent au mode de scrutin constituant l'être collectif en question. Ici, la réflexion sur le collectif éclaire peut-être celle sur l'individuel.

En fait, l'appel à la « régression à l'infini » reste toujours un procédé contestable, quand il n'est que l'expression d'une sorte de paresse de l'esprit, d'une dérobade, voire d'un refus de discuter. Bien au contraire, il est peut-être parfois souhaitable d'adopter ce que nous croyons être l'idée directrice cen-

(1) « Préviation et évaluations technologiques : quelles statistiques? *Courrier des statistiques*, n° 36, octobre 1985, I.N.S.E.E., Paris.

(2) Cf. A. Downs "Inside Bureaucracy" Little, Brown 1967 (notamment les chapitres 14 et 15). R.G.S. Brown "The Administrative Process in Britain", Methuen 1970. Voir aussi : « Qu'est-ce que la recherche en gestion? » M. Berry, J.-C. Moisson et C. Riveline in *Informatique et Gestion*, n° 108 et 109, 1979.

trale de l'œuvre de Karl Popper : certes, tout n'est qu'en dernière analyse que convention et hypothèse; mais il faut discuter rationnellement, c'est-à-dire se mettre d'abord d'accord sur un minimum de telles conventions et hypothèses et puis voir après ce qui va en découler. Pour, ensuite et le cas échéant, reconsidérer en connaissance de cause ce dont on est parti : si l'on n'espère à aucun moment d'atteindre à l'Absolu, on gagne dans la discussion en clarté et efficacité.

Sociologie et théorie de l'agrégation

Le sociologue ne peut rester indifférent à la théorie de l'agrégation, pas plus que le théoricien de l'agrégation ne peut éviter d'entrer, à un moment ou à un autre, dans des considérations sociologiques. On fait intervenir généralement plusieurs critères (qui ne sont certainement pas indépendants les uns des autres), quand on se propose de produire une typologie des sociétés (foules, groupes, bandes, ...) : les normes et les croyances, la ou les finalité(s), le nombre des individus membres, etc.

Le mode d'organisation, groupal par exemple, peut s'analyser selon différents plans, le plan de la circulation de l'information, celui des concepts groupaux (sémantique groupale), celui de la prise de décision collective. On pourrait peut-être ici émettre une hypothèse de travail : un groupe tendrait spontanément par approximations successives, voire de façon volontariste, vers une structure décisionnelle permettant la rationalité, la cohérence des décisions collectives. Si une telle hypothèse était plus ou moins vérifiée, dans certains cas spécifiques, il serait intéressant de rechercher les isomorphies qui pourraient exister entre les structures groupales et les modes d'agrégation, c'est-à-dire les conditions d'agrégation cohérentes.

La taille du groupe, c'est-à-dire son effectif, revêt une importance certaine en sociologie, où il est classique de distinguer le petit groupe (groupe restreint ou primaire) du grand (groupe secondaire ou organisation). Cette importance est particulièrement justifiée sur le plan communicationnel, puisque, dans les petits groupes, les communications sont naturellement et facilement bilatérales lors du débat collectif, alors que cela devient très rapidement impossible dès que l'effectif s'accroît et qu'on n'arrive plus bien à distinguer l'autre des « autres » : la communication collective devient vite complexe et doit se hiérarchiser nécessairement sous peine de brouhaha.

L'importance de la taille est donc bien reconnue par les sociologues. Il n'en est pas de même, en l'état actuel des choses, dans la théorie de l'agrégation. Certes, l'effectif intervient indirectement, en filigrane chez des auteurs, tels que Vickrey, Satterthwaite ou Gibbard, qui étudient le théorème d'Arrow dans le contexte de la théorie des jeux. Il intervient aussi chez quelques auteurs qui étudient les électors variables; et, également de façon déjà plus remarquable (quoique indirectement) chez les auteurs qui analysent un mode de scrutin en modes de scrutin partiels (théorie des « comités », chez Robert Bartoszynski, par exemple). Mais en dehors de ces études particulières, l'effectif n'attire généralement attention que d'un point de vue strictement mathématique, au titre de « cas de dégénérescence », lors de très petits effectifs ou dans l'hypothèse d'un nombre infini d'électeurs par exemple : on est très loin de la sociologie, dans cette sorte de préoccupations, qui restent purement théoriques, purement formelles ⁽¹⁾.

Cette situation, éminemment transitoire, où l'on observe une certaine étanchéité entre la théorie sociologique et celle de l'agrégation, ne disparaîtra que lorsque les auteurs distingueront nettement entre les schémas agrégatifs simplement théoriques et ceux qui supposent (ou impliquent concrètement) leur mise en œuvre effective.

⁽¹⁾ Nous avons développé davantage cette question des effectifs en relation avec la théorie de l'agrégation, dans une communication « L'économie nationale, un au-delà des sciences de gestion? », au Séminaire « Méthodologie fondamentale en sciences de gestion » organisé par l'Institut de Socio-Économie des Entreprises et des Organisations (I.S.E.O.R.) et la Fondation Nationale pour l'Enseignement de la Gestion des Entreprises (F.N.E.G.E.), à l'Université de Lyon-2, les 13 et 14 novembre 1985. Dans la même communication, sont donnés d'autres types de phénomènes d'agrégation, tel celui observé dans l'agrégation de comptabilités individuelles à partie double (à paraître dans les Actes de ce Colloque en 1986).

RÉFÉRENCES

(des première et deuxième parties)

- [1] ARKHIPOFF O. — Le problème de l'agrégation dans la mesure de la qualité de vie : reformulation et généralisation du Théorème d'Arrow — *Revue de Science Financière*, tome LXVI, n° 4, 1974 (pp. 879 à 934). Librairie Générale de Droit et de Jurisprudence, Paris.
- [2] ARKHIPOFF O. — Reformulation du Théorème d'Arrow et généralisations — *Annales de l'I.N.S.E.E.*, n° 18, 1975 (pp. 3 à 44). I.N.S.E.E., Paris.
- [3] ARKHIPOFF O. — Peut-on mesurer le bien-être national? — *Les Collections de l'I.N.S.E.E.*, série C, n° 41, mars 1976. I.N.S.E.E., Paris.
- [4] ARKHIPOFF O. — Problems in Welfare Measurement — *Review of Income and Wealth*, series 23, n° 2, 1977 (pp. 173 à 190).
- [5] ARKHIPOFF O. — Pour une analyse conceptuelle de l'économie politique; ou un essai de sémantique rationnelle — *Revue de Science Financière*, tome LXIX, n° 4, 1977 (pp. 939 à 974). L.G.D.J., Paris.
- [6] ARKHIPOFF O. — Introduction à l'axiomatique des procédures d'agrégation (2 tomes) — I.N.S.E.E., Paris 1978 et 1979.
- [7] ARKHIPOFF O. — An Introduction to the Axiomatics of Procedures of Aggregation — *Mathematical Social Sciences*, tome 1, 1980 (pp. 69 à 83).
- [8] ARROW K.J. — *Social Choice and Individual Values* — Cowles Commission for Research in Economics; Economic Monograph n° 12; Wiley & Sons 1951.
- [9] ARROW K.J. — *Social Choice and Individual Values* — John Wiley & Sons 1963.
- [10] DE BORDA C. — Mémoire sur les élections au scrutin — (communication à l'Académie du 16 juin 1770). *Histoire de l'Académie des Sciences de Paris pour 1781, Paris 1784* (pp. 657 à 665).
- [11] BOURBAKI N. — *Théorie des ensembles* — Hermann, Paris 1970.
- [12] Marquis de CONDORCET. — *Essai sur l'application de l'analyse à la probabilité des décisions rendues à la pluralité des voix* — Paris 1785.
- [13] GUILBAUD G. — Les théories de l'intérêt général et le problème logique de l'agrégation — *Économie Appliquée*, tome 5, n° 4, 1952 (pp. 501 à 584) P.U.F., Paris.
- [14] GUILBAUD G. — *Éléments de la théorie des jeux* — Dunod, Paris 1968.
- [15] JAFFARD F., POITOU G. — *Introduction aux catégories et aux problèmes universels* — Ediscience, Paris 1971.
- [16] MAY K.O. — A Set of Independent Necessary and Sufficient Conditions for Simple Majority Decision — *Econometrica*, tome 20, 1952 (pp. 680 à 684).
- [17] MITCHELL B. — *Theory of Categories* — Academic Press, New York 1965.
- [18] NOVIKOV P.S. — *Introduction à la logique mathématique* — Dunod, Paris 1964.
- [19] PONASSÉ D. — *Logique mathématique* — O.C.D.L., Paris 1972.
- [20] SEN A.K. — *Collective Choice and Social Welfare* — North Holland 1979.