JOURNAL DE LA SOCIÉTÉ STATISTIQUE DE PARIS

MAURICE DUMAS

Tribune. A propos de la communication de Maurice Allais : « Fréquence, probabilité et hasard »

Journal de la société statistique de Paris, tome 125, n° 1 (1984), p. 51-54
<http://www.numdam.org/item?id=JSFS_1984__125_1_51_0>

III

TRIBUNE

A PROPOS DE LA COMMUNICATION DE MAURICE ALLAIS : « FRÉQUENCE, PROBABILITÉ ET HASARD »

COTES ET LOIS DE LHOSTE

Maurice DUMAS, *ancien président des Sociétés de statistique*

1. *« Fréquence, probabilité et hasard »* [1]

Monsieur Maurice Allais a retenu ces trois mots comme titres à la fois d'une étude et d'une communication à la Société de statistique de Paris. Son sujet est d'un intérêt primordial; il a été traité de façon magistrale; il suscite tout naturellement quelques remarques, telles les trois qui me sont venues à l'esprit, et que je crois utile d'exposer en peu de mots ici.

2. *Première remarque*

Ma première remarque est d'ordre sémantique. L'auteur répartit en quatre classes les notions couvertes aujourd'hui par le mot probabilité, et les désigne respectivement ainsi : *Fréquence mathématique... Fréquence empirique ... Probabilité objective* et *Coefficient de vraisemblance.*

Ces expressions peuvent-elles être appelées à être adoptées immédiatement? L'auteur lui-même en doute, puisqu'il écrit, en fin de sa Section 8 : « Il faut reconnaître qu'il nous est maintenant quelque peu difficile de renoncer à des habitudes invétérées de langage et de pensée... » Au mieux donc, une période transitoire est à envisager; c'est de cette période que je m'occupe ici, pour ce qui concerne les désignations retenues par l'auteur.

Sur les deux premières, je ne vois guère à dire que ceci, que ce qui ressortit aux fréquences mathématiques, continuera sans doute longtemps à être développé sous le vocable de « Calcul des probabilités », et que dans l'immédiat, les deux autres désignations doivent tenir compte de ce fait probable.

Précisément, à propos de ces deux dernières classes, l'auteur note (Section 4) que pour l'une comme pour l'autre, « il s'agit d'une prévision sur l'avenir dont le caractère est essentiellement subjectif ». Or, l'expression « probabilité objective » restera trompeuse tant que le mot probabilité fera partie d'une autre expression usuelle, telle : Calcul des probabilités.

N'y a-t-il pas mieux à retenir?

3. *Les cotes*

N'est-ce pas le moment de se souvenir qu'il y a presque cent ans, un auteur a introduit le mot « cote » dans notre discipline. Il s'agit de celui qui est devenu le Général Estienne; il a donné les grandes lignes d'un « Calcul des cotes » [2] ayant sa place à côté du calcul des probabilités.

Le mot cote, emprunté au langage des courses de chevaux, a pour lui d'évoquer remarquablement bien que ses résultats ont un caractère subjectif.

Par exemple, le mot cote employé isolément pourrait être réservé à ce qui ressortit au coefficient de vraisemblance de M. Allais, quitte à préciser en cas de besoin « cote de vraisemblance », ... ou « cote au jugé », ou...; quant à probabilité objective, elle pourrait être remplacée par « Cote intrinsèque », en attendant que « Cote objective » puisse être employée sans risque de confusion.

4. *Probabilités a priori*

4.1. Mes deuxième et troisième remarques mettent en cause des probabilités a priori; leur exposé nécessite quelques indications préliminaires.

4.2. Les statisticiens n'hésitent plus guère actuellement à faire usage de lois de probabilité virtuelles (ou : lois impropres); il s'agit de lois de la variable x, de densité de probabilité $f(x)$, telles que la somme $\int f(x)\, dx$ étendue à tout l'intervalle de variations de x soit infiniment grande; une loi de probabilité virtuelle ne peut donc pas être normée.

4.3. Certaines lois virtuelles peuvent tenir lieu de loi de probabilité a priori. Il y a même ceci qu'*en cas de connaissance nulle, SEULE une loi virtuelle est susceptible de convenir.* « Quand en effet on retient une loi réelle pour jouer un tel rôle (de probabilité a priori), on se trouve dans la situation d'assimiler dans les calculs, la connaissance nulle à une connaissance très précise facilement imaginable, à savoir, celle que représente ladite loi réelle. Il y a alors là une contradiction qui ne peut qu'apparaître inacceptable, à partir du moment où elle a été dégagée. » [3]

5. *Lois de Lhoste*

En 1923, E. Lhoste [4] a attiré l'attention sur un *ensemble COHÉRENT de trois lois virtuelles* jouant éventuellement le rôle de loi de probabilité a priori en cas de connaissance nulle; ce sont :
— Cas d'un paramètre d'intervalle de variations illimité dans les deux sens, tel la moyenne m d'une loi de Laplace-Gauss : loi caractérisée par dm.
— Cas d'un paramètre limité seulement, inférieurement, par 0, tel le module de précision h, ou l'écart-type σ, d'une loi de L.G. : loi caractérisée par dh/h, ou par $d\sigma/\sigma$.
— Cas d'un paramètre limité par 0 et 1, tel le paramètre p d'une loi binomiale : loi caractérisée par $dp/p\,(1-p)$.

Bien des auteurs ont eu recours à la loi caractérisée par dm, sans toujours faire remarquer qu'il s'agissait d'une loi virtuelle; je pense avoir été le premier, en 1937, à avoir développé la loi caractérisée par dh/h, et avoir été le seul jusqu'à présent sans doute, à avoir développé la loi caractérisée par $dp/p\,(1-p)$. Je n'ai rencontré aucune difficulté mathématique dans mes calculs, et les résultats me sont toujours apparus comme satisfaisants.

6. *Deuxième remarque*

Ma deuxième remarque sur le travail de M. Allais a pour point de départ la question qu'il pose dans sa Section 6, à propos du principe de Bayes : « Si l'on n'a aucune information sur la probabilité a priori, est-il pourtant légitime de considérer toutes les valeurs comprises entre 0 et 1 comme également probables? »

Ces quelques mots éveillent, j'en suis sûr, dans l'esprit de presque tous les lecteurs, le cas où, travaillant sur le paramètre p de la loi binomiale, on adopte en cas de connaissance nulle, la loi caractérisée par dp. Ainsi : « On fait généralement l'hypothèse $f\,(\mathrm{p}) = 1$, faute d'autre renseignement », écrit H. Poincaré. Ceux qui agissent de même sont donc en compagnie flatteuse, mais il faut bien reconnaître que H. Poincaré ne s'engage pas véritablement dans *cette voie qui a mon désaccord le plus complet :* la loi correspondant à $f\,(p) = 1$, représente le cas réel où l'on a déjà comme résultats un tirage blanc sur 2; il s'agit d'une loi réelle qui donc, d'après ce qui a été dit en 4, 3, ne saurait convenir en cas de connaissance nulle.

Par contre, l'accord doit se faire sur la loi caractérisée par $dp/p\,(1-p)$, qui est la loi virtuelle retenue par Lhoste, et d'après laquelle *toutes les valeurs comprises entre 0 et 1 ont des probabilités nulles* — donc : *toutes égales entre elles* —, aux seules exceptions des limites 0 et 1. Avec cette loi, le raisonnement de M. Allais demeure entièrement valable.

7. *Troisième remarque*

Ma dernière remarque a pour prétexte cette phrase de la Section 6 de l'auteur : « Il est de toute façon quelque peu étrange que personne ne paraît remarquer que si on admet le principe de Laplace, le principe de R.A. Fisher revient mathématiquement à admettre la validité du principe de Bayes. »

Allant plus loin, on peut montrer qu'en retenant les lois de Lhoste comme lois de probabilité a priori, les deux principes conduisent aux mêmes formules mathématiques. C'est ce que j'ai fait dans un mémoire dont le titre est parlant : « Sur une loi de probabilité a priori conduisant aux arguments fiduciaires de Fisher » (La Revue scientifique, n° 3264, 1er janvier 1947). Ce sont les lois caractérisées respectivement par dm et dh/h, que j'ai fait intervenir dans mes calculs.

Je me souviens avoir pu faire allusion à cette concordance des formules devant R.A. Fisher luimême, à l'Institut Henri-Poincaré en 1946 sauf erreur; cela a tout juste attiré, au-dessus de la fine barbiche poivre et sel de l'éminent visiteur, un mince sourire qui ne signifiait certainement pas une approbation sans réserve. Mais, avais-je été assez clair dans mes propos?

8. *Bibliographie commentée*

[1] *Fréquence, probabilité et hasard,* par *Maurice Allais,* directeur de recherches au C.N.R.S., professeur à l'École Nationale Supérieure des Mines de Paris. Journal de la Société de Statistique de Paris, 124e année, n° 2, 2e trimestre 1983.
— Ce mémoire a fait l'objet d'une communication, le 16 mars 1983, devant les Sociétés de Statistique de Paris et de France; il était aussi destiné à être publié, entre autres, dans le volume : « Foundations of Utility and Risk Theory with Applications », B. Stigum et F. Wenstop, édit., Reidel, Dordrecht, 1983.

[2] *Essais sur l'art de conjecturer,* par *J.E. Estienne.* Revue d'artillerie, tomes 61 et 62, 1903; repris dans l'ouvrage « *Loisirs d'artilleur* », Berger-Levrault, éditeur, 1906.
— L'auteur ayant plus spécialement en vue la recette des lots d'éléments, a employé l'expression, très parlante, de « marque de fabrique » pour tenir lieu de « probabilité a priori ».

[3] *Lois de probabilité a priori de Lhoste,* par *Maurice Dumas.* Sciences et Techniques de l'Armement, Mémorial de l'artillerie française, 4e fascicule de 1982.
— Un tiré à part de ce mémoire peut être demandé à l'auteur, 10, bd Jourdan, 75014 Paris.

[4] *Le calcul des probabilités appliqué à l'artillerie,* par *Edmond Lhoste.* Revue d'artillerie, Berger-Levrault, éditeur, mai à août 1923.
— Pour arriver à ses lois, Lhoste raisonne notamment sur h et sur σ de la loi de L.G., et part de cette remarque qu'à tout intervalle $(h_1; h_2)$ de l'axe des h, correspond, d'après la relation $\sigma h \sqrt{2} = 1$; un intervalle (σ_1, σ_2) de l'axe des σ; et que chacun de ces intervalles contient nécessairement une même quantité d'information ou, ce qui revient au même, une même quantité d'indétermination.

NOTE

Georges BERNARD, *maître de recherche au C.N.R.S. (E.R.)*

La probabilité formelle est le fruit d'un raisonnement à l'aide de la théorie mathématique dite « de probabilité ».

Lorsque, dans *l'une* des méthodes de cette théorie on déduit de la considération de fréquences de résultats donnés (par exemple dits « favorables ») lors d'événements répétés (par exemple de tirages de boules d'une urne) la probabilité, elle est la limite de ces fréquences lorsque le nombre d'événements répétés augmente au-delà de tout nombre donné. Cette théorie comporte des corps formels, tel le théorème central limite.

Dans ce cas la probabilité est de nature différente de celle des fréquences, de la même manière que l'intégrale est de nature différente de celle de la somme de différences finies petites.

Cette méthode n'est pas toujours possible ni même concevable, puisqu'elle postule la possibilité et l'existence d'événements répétés, dont résultent des fréquences. Dans un autre édifice formel qui ne subit pas cette contrainte, la probabilité est définie à partir d'une axiomatique de partitions d'ensembles, de raisonnements topologiques sur une telle axiomatique. C'est par exemple l'approche de Kolmogorov.

Dans un autre édifice encore, lui aussi affranchi de la contrainte de la répétition d'événements et en particulier applicable aux événements uniques, la probabilité est déduite de paris subjectifs, d'estimations quantifiées de la possibilité, de la plausibilité d'arrivée de tels événements, par définition futurs. Ces estimations sont fondées sur la connaissance d'états du monde possibles, connaissance technologique, sociale, économique, biologique, etc.

Toutes ces définitions, différentes, mais quantifiées de la même manière, servent à interpréter, à expliquer, donc à contrôler et à prévoir une espèce de phénomènes naturels qui s'appelle dans le langage ordinaire le hasard. Il s'agit d'états réels sans cause ou, ce qui est équivalent, dus à une infinité de causes.

« Naturels » désigne dans cette définition des états, des phénomènes, des événements totalement extérieurs à l'homme. Exemple : la radioactivité « naturelle ».

Aucune hypothèse n'est nécessaire pour opérer sur le hasard.