Journal de la société statistique de Paris

Maurice Allais

# Fréquence, probabilité et hasard

*Journal de la société statistique de Paris*, tome 124, nº 2 (1983), p. 70-102
<http://www.numdam.org/item?id=JSFS_1983__124_2_70_0>

I

# COMMUNICATION

# FRÉQUENCE, PROBABILITÉ ET HASARD *

Maurice ALLAIS
*Directeur de recherche au C.N.R.S.*
*Professeur à l'École Nationale Supérieure des Mines de Paris*

*Les seules difficultés véritables auxquelles se sont heurtées les différentes théories dites des probabilités résultent de l'utilisation d'un même mot « probabilité » pour désigner quatre concepts entièrement différents : la fréquence mathématique, la fréquence empirique, la probabilité objective, et le coefficient de vraisemblance.*

*Les modèles des théories mathématiques sont des modèles fréquentiels qui ignorent le hasard et sont entièrement déterministes. En dernière analyse tous leurs théorèmes, qu'ils s'appliquent à des ensembles discrets ou à des ensembles continus, ne sont en fait que des théorèmes d'analyse combinatoire. Les quantités qu'elles étudient sont des fréquences mathématiques que d'une manière totalement inappropriée on qualifie de probabilités.*

*Le concept de probabilité, indissociablement relié à une prévision humaine de l'avenir, n'existe pas dans la nature. De même, le hasard résulte de jugements purement subjectifs qui n'existent que dans notre esprit et que la nature ignore.*

*Que certains phénomènes puissent apparaître comme imitant le « hasard » est indéniable, mais ils n'en deviennent pas par là même aléatoires. Cette simulation du hasard ne peut en réalité dériver d'une cause fortuite. En fait, elle doit et elle peut être expliquée, comme le montre par exemple la simulation du hasard par des fonctions presque périodiques.*

*Une seule question apparaît réellement fondamentale : pourquoi la nature lorsqu'elle est considérée comme aléatoire peut-elle être représentée, au moins en première approximation, et très souvent avec une grande précision, par des modèles mathématiques qui en réalité sont fondamentalement des modèles déterministes?*

*The only real difficulties encountered by the various theories of the so-called probabilities stem from their use of the same word « probability » to represent four entirely different concepts: mathematical frequency, empirical frequency, objective probability, and the coefficient of plausibility.*

*The models of the mathematical theories are frequential models which do ignore chance and are completely deterministic. In the final analysis, all their theorems whether they apply to discrete or continuous sets, are merely theorems in combinatorial analysis. The quantities studied are mathematical frequencies, which are referred to most improperly as probabilities.*

* Communication faite le 16 mars 1983 devant les Sociétés de statistique de Paris et de France.

Journal de la Société de statistique de Paris, tome 124, n° 2, 1983.

*The concept of probability, which is indissociably associated with human forecasting of the future, does not exist in nature. Similarly, chance stems from purely subjective judgments existing only in our minds and unknown in nature.*

*Some phenomena undeniably simulate "chance", but this does not make them random phenomena. In reality, this simulation of chance cannot stem from a fortuitous cause; it should be and can be explained, as it is shown, for example, by the simulation of chance by almost periodic functions.*

*In fact we are always finally confronted with only one question, a fundamental one indeed, on which depend both the interpretation of theories as regards concrete reality and their "applicability" to the study of reality: how does it happen that nature when it is considered as random can be represented, at least approximately and often with great precision, by mathematical models which are in fact fundamentally deterministic models?*

## SOMMAIRE



** Ce mémoire a été présenté en anglais sous le titre : *"Frequency, Probability and Chance"* comme *Adresse* à la *"First International Conference on Foundation of Utility and Risk Theory"* qui s'est tenue à Oslo du 26 au 29 juin 1982. Il a été accompagné de deux Appendices : *"Empirical Frequencies and Mathematical Frequencies — Illustration"* et *"Simulation of Chance by Almost Periodic Functions"* qui ont fait l'objet de deux communications séparées.

Ce mémoire et ces Appendices seront prochainement publiés dans le volume *Foundations of Utility and Risk Theory with Applications*, B. Stigum et F. Wenstop, édit., Reidel, Dordrecht, 1983.

Les versions françaises de ces trois mémoires sont publiées dans ce *Journal* avec l'accord des *Éditions Reidel*.

*** L'Appendice II, « *La simulation du hasard par des fonctions presque périodiques* », sera publié dans le prochain numéro du *J.S.S.P.*

> Les idées fondamentales jouent un rôle essentiel dans la formation d'une théorie. Les ouvrages sont remplis de formules mathématiques compliquées. Mais c'est la pensée, ce sont les idées qui sont à l'origine de toute théorie.
>
> Albert EINSTEIN et Léopold INFELD ([1])

> L'histoire des sciences montre que les progrès de la Science ont été constamment entravés par l'influence tyrannique de certaines conceptions que l'on avait fini par considérer comme des dogmes. Pour cette raison, il convient de soumettre périodiquement à un examen très approfondi les principes que l'on a fini par admettre sans plus les discuter.
>
> Louis de BROGLIE ([2])

> Autant il y aurait de folle présomption à vouloir résoudre dans les sciences une de ces questions dont une multitude d'esprits et beaucoup de grands esprits ont cherché la solution sans la trouver, et à vouloir terminer doctrinalement un litige que les siècles ont laissé pendant; autant il est permis, sans blesser les règles de la sagesse et de la modestie, de proposer quelques éclaircissements nouveaux, quelques essais de coordination nouvelle, qui ne tendent au contraire qu'à écarter toute prétention de décision doctrinale et de dogmatisme absolu.
>
> Augustin COURNOT ([3])

Les discussions passionnées, parfois acerbes et polémiques, auxquelles la Théorie de la Décision a donné lieu au cours de ces trente dernières années en ce qui concerne les deux concepts fondamentaux sur lesquels elle se fonde, le concept d'utilité et le concept de probabilité, me paraissent reposer pour la plus grande part, dans un cas comme dans l'autre, sur la confusion sémantique de concepts entièrement différents.

Le présent mémoire se borne à présenter quelques observations critiques sur le concept de probabilité et les concepts qui lui sont associés ([4]).

## 1. LE CONCEPT DE PROBABILITÉ

Bien que la théorie des probabilités remonte aujourd'hui à plus de trois siècles et que ses fondateurs et leurs successeurs n'aient cessé de comprendre dans leurs rangs des esprits d'une intelligence extrêmement pénétrante, on doit constater que le mot de probabilité n'a cessé d'être utilisé par les différents auteurs *dans des sens tout à fait incompatibles recouvrant des réalités entièrement différentes.*

Pour certains, la probabilité est une probabilité objective correspondant à une réalité physique dans le cas d'événements qui se répètent. Pour d'autres, la probabilité est essentiellement subjective, mais, dans le cas d'événements qui se répètent, elle correspond à une réalité physique, et elle s'identifie alors à la probabilité objective. Pour d'autres, il n'existe aucune probabilité objective. Pour ces trois groupes la probabilité peut se définir indépendamment de la considération de tout choix aléatoire. Pour un quatrième groupe, l'existence d'une probabilité subjective est démontrée en même temps que l'existence d'un indice d'utilité à partir d'un certain système d'axiomes relatifs aux choix aléatoires. Pour un dernier groupe enfin, la probabilité est un concept purement mathématique dont l'étude se développe dans le cadre de théories axiomatiques, indépendamment de toute réalité concrète.

---

1. Albert EINSTEIN et Léopold INFELD, 1938, *L'Évolution des Idées en Physique.*
2. Louis de BROGLIE, 1953, *La Physique Quantique restera t elle Indéterministe?*
3. Augustin COURNOT, 1851, *Essai sur les Fondements de nos Connaissances*
4. Sans aucun doute, le présent mémoire et ses deux appendices contiennent beaucoup de propositions qu'il est nécessaire de justifier Ces justifications seront pleinement données dans mon ouvrage *"Frequency, Probability and Chance"* qui sera prochainement publié par les *Éditions Reidel* Ce livre inclura notamment une *Bibliographie* étendue sur les travaux les plus significatifs de la littérature dans les domaines abordés dans le présent mémoire

*Il résulte de là de multiples confusions et des débats sans fin sur la nature du concept de probabilité, et sur ses relations avec les données de l'observation dans les sciences de la nature, dans les sciences de la vie et dans les sciences de l'homme.*

Il n'est pour s'en convaincre que de parcourir les commentaires sur le concept de probabilité, le concept de hasard, et la loi dite des grands nombres, qui sont présentés dans les ouvrages qui ont marqué ces trois derniers siècles jusqu'à nos jours. Certes on y trouve souvent des remarques très profondes, mais elles laissent généralement l'esprit insatisfait *quant à la liaison qu'il convient d'établir entre les calculs rigoureux de la théorie et les régularités empiriques qui se dégagent de l'analyse de la réalité, et quant aux critères qu'il convient d'appliquer pour effectuer cette liaison.*

En fait, les difficultés que l'on rencontre ne résultent pas des calculs mathématiques qui sont effectués et sur la cohérence desquels tout le monde est d'accord. *Elles proviennent fondamentalement de la liaison à réaliser entre la théorie et l'expérience,* de l'interprétation des données de l'observation, et de l'applicabilité des calculs à la prévision ainsi que de l'interprétation à donner aux éléments de cette prévision au regard de l'expérience antérieure.

De toute évidence, il ne saurait être question de présenter ici une analyse critique exhaustive de toutes les théories des probabilités, ni *a fortiori* de proposer une théorie générale positive des probabilités qui soit exempte de toute contradiction et de toute confusion.

Je m'efforcerai seulement de présenter différentes observations sur la définition, la signification et l'utilisation du concept de probabilité, observations qui me paraissent susceptibles d'éclairer les différentes approches qui s'opposent si radicalement, en retenant de chacune d'elles ce qu'elle me paraît contenir de profondément valable.

Il va sans dire que je ne prétends naturellement pas épuiser un sujet aussi difficile que fascinant, que beaucoup ont déjà eu l'occasion d'approfondir, mais peut-être pourrai-je préciser quelques lignes directrices susceptibles de dégager les différentes théories des impasses artificielles dans lesquelles elles me paraissent s'être enfermées. Certaines de mes réflexions pourront sans doute apparaître comme correspondant à des évidences, mais je pense qu'elles peuvent peut-être contribuer à dissiper bien des confusions et à éviter bien des controverses, tout aussi spécieuses qu'inutiles.

Pour l'essentiel, et comme je vais m'efforcer de le montrer, *les seules difficultés véritables auxquelles se sont heurtées les différentes théories résultent de l'utilisation d'un même mot « probabilité » pour désigner quatre concepts entièrement différents : la fréquence mathématique, la fréquence empirique, la probabilité objective, et le coefficient de vraisemblance.*

## 2. Fréquence mathématique

Toutes les théories mathématiques, dites du calcul des probabilités, admettent à leurs points de départ soit comme théorèmes, soit comme axiomes, soit comme définitions, les trois principes des probabilités totales, des probabilités composées et des probabilités inverses (ou probabilités des causes). *A partir de là, toutes aboutissent au même corps de propositions.*

Quant à leur signification du point de vue de l'analyse des phénomènes réels, leurs auteurs ne diffèrent les uns des autres que sur deux points : *Quelle définition et quelle interprétation doit-on donner au concept de probabilité? Comment convient il d'appliquer la théorie à la réalité concrète?*

Un examen attentif de toutes ces théories mathématiques montre qu'à tous les stades leurs développements sont *totalement indépendants de toute réalité concrète,* que toute incertitude en est totalement absente, et que *le hasard, dont d'ailleurs aucune définition mathématique n'a jamais pu être donnée, n'y intervient en aucune façon.* Ces théories sont *totalement déterministes,* et les quantités qui interviennent dans leurs calculs *ne sont pas des « probabilités »,* mot qui est indissociablement attaché à des événements incertains, *mais des fréquences purement mathématiques.*

Le concept fondamental qui se trouve à la base de toutes ces théories est en effet celui de *fréquence mathématique,* et il convient de dénommer ces théories, non pas par l'expression usuelle de *« Calcul des probabilités »,* totalement inappropriée en l'espèce, mais par l'expression, *« Calcul des fréquences mathématiques »,* seule appropriée. Les variables que ces théories considèrent *ne sont pas du tout des variables aléatoires,* mais des variables fréquentielles.

Lorsqu'il s'agit d'ensembles discrets, toutes ces théories reposent fondamentalement sur le développement de l'expression multinomiale $(a_1 + a_2 + .... + a_h)^n$ et sur l'analyse des propriétés des différents sous-ensembles que l'on peut dériver de ce développement. Lorsqu'il s'agit d'ensembles continus l'analyse devient plus abstraite, mais le processus reste fondamentalement le même dès que l'on a défini l'égalité des mesures de deux éléments, et *il s'agit toujours et seulement de calculs d'analyse combinatoire.*

Tous les théorèmes fondamentaux des théories mathématiques du soi-disant *« Calcul des probabilités »,* qu'il s'agisse de la loi des grands nombres de Bernoulli, du théorème central limite de la convergence vers la loi normale, de la loi du logarithme itéré, des lois de l'arc sinus, ... *ne sont que des propriétés asymptotiques des distributions de fréquences reposant sur des calculs d'analyse combinatoire.*

Si l'on considère par exemple et pour simplifier le développement du binôme $(1\text{-}1)^n$, il y a, pour une valeur donnée $n$ de l'exposant, $2^n$ trajectoires possibles. Au terme des différentes trajectoires les fréquences des différents cas possibles sont proportionnelles aux coefficients du binôme, et lorsque $n$ augmente indéfiniment leur distribution tend vers la distribution normale. *Cette convergence a lieu au sens de l'analyse mathématique.*

Chaque trajectoire est caractérisée par une certaine fréquence des $+ 1$ avec un certain ordre de succession des $+ 1$ et des $- 1$, mais à chacune d'elles, on peut associer une trajectoire ayant une fréquence égale des $- 1$ pour laquelle l'ordre de succession est le même, les $+ 1$ étant remplacés par les $- 1$ et réciproquement. Il y a une seule trajectoire où il n'y a que des $+ 1$, et une seule trajectoire où il n'y a que des $- 1$.

Mais si l'on distribue les différentes trajectoires $T_i$ suivant la fréquence $f_i$ des $+ 1$, la fréquence des trajectoires pour lesquelles la valeur absolue de la différence $f_i - 1/2$ excède une certaine valeur tend vers zéro lorsque $n$ augmente indéfiniment. La convergence est une convergence *au sens de l'analyse mathématique.*

De même encore quel que soit l'exposant $n$ la valeur moyenne de toutes les valeurs $+ 1$ et $- 1$ pour l'ensemble de toutes les trajectoires est toujours nulle. Toutes les valeurs $+ 1$ et $- 1$ se réalisent en nombre égal. *Du point de vue mathématique elles apparaissent ainsi comme également possibles.*

Encore une fois *le hasard est totalement absent de toutes ces théories mathématiques.* Toutes se caractérisent par des décomptes purement déterministes de configurations correspondant fondamentalement à un développement multinomial et ayant des caractéristiques déterminées. Lorsque l'exposant $n$ augmente indéfiniment, toutes les distributions qu'on peut dériver du développement multinomial tendent vers leurs expressions asymptotiques *au sens de l'analyse.*

*Aucune incertitude n'intervient.* Tous les modèles mathématiques de fréquences sont des modèles *totalement déterministes* qui reposent sur des calculs d'analyse combinatoire dépourvus de toute incertitude. Toutes les configurations qu'elles considèrent *sont supposées simultanément réalisées,* hypothèse qui généralement n'apparaît pas *explicitement et n'est pas soulignée.* Pour représenter ces modèles la dénomination de *« probabilistes »* est *tout à fait inappropriée,* et elle ne peut conduire qu'à de redoutables confusions et à des idées erronées, tant les mots que l'on emploie s'accompagnent inévitablement des interprétations attachées à leur usage dans le langage courant.

De même, et contrairement aux assertions de nombreux probabilistes et non des moindres, ce qu'il est convenu d'appeler le *« calcul des probabilités »* ne saurait être considéré comme une théorie du *« hasard »,* car le *« hasard »* en est totalement exclu.

En fait, toutes les théories mathématiques, dites des « *probabilités* », pourraient être présentées sans jamais se servir des mots hasard, probable, aléatoire, ni d'aucun vocable de la même famille. S'ils s'y trouvent, c'est qu'il a plu aux mathématiciens de les introduire et de les y maintenir, peut-être pour rendre leurs théories plus attractives, mais plus probablement par la simple force de l'habitude et de la tradition. Mais rien ne serait changé si l'on substituait au mot « *probabilité* » le mot « *grandeur* G ». En tout état de cause, le sens profond des calculs deviendrait alors beaucoup plus clair. Mais, de toute façon, c'est le vocable « *fréquence mathématique* » qui est *le seul indiqué* comme corespondant *effectivement* à ce qui est considéré.

*Naturellement ces modèles sont purement mathématiques, et ils ne peuvent par eux-mêmes rien nous apprendre sur la réalité concrète.*

Alors qu'on ne saurait compter le nombre de mathématiciens éminents qui ont parlé des *lois mathématiques du hasard,* il est pour le moins symptomatique qu'à de très rares exceptions près personne n'ait souligné l'absence du concept de hasard dans la théorie dite du calcul des probabilités. Bien plus rares encore, à supposer même qu'il en existe, sont ceux qui ont tiré de cette constatation toutes les conséquences qu'elle implique ([5]).

## 3. Fréquence empirique

En étudiant certains phénomènes et en groupant des résultats assez nombreux, on constate des permanences : les fréquences de sortie des différents chiffres dans les loteries, ou des différentes faces d'un dé, la fréquence des accidents de la circulation, la fréquence des suicides, etc., restent à peu près constantes. De plus, non seulement les fréquences moyennes sont peu variables, mais les distributions empiriques des grandeurs considérées restent relativement stables.

Deux classes de distributions empiriques peuvent être distinguées : les distributions spatiales à un moment donné, comme la distribution des individus d'une population suivant leur taille; et les distributions temporelles comme par exemple la distribution des cours de bourse au cours du temps.

Il est très remarquable que ces distributions puissent généralement bien se représenter à partir de modèles mathématiques fréquentiels déduits de l'analyse combinatoire. Ainsi, les tailles et les poids des individus se représentent bien par la distribution lognormale; de même les tirages successifs dans une urne comprenant des boules noires et blanches peuvent se représenter avec une très bonne approximation par la loi binomiale.

On peut interpréter chacune de ces distributions empiriques en considérant qu'elle n'est que la manifestation d'*une régularité sous jacente* correspondant au modèle mathématique fréquentiel susceptible de la représenter. Naturellement, comme c'est le cas pour toutes les lois de la nature, qu'il s'agisse par exemple de la Mécanique céleste ou de l'Électromagnétisme, chaque distribution n'est représentée par son modèle théorique qu'avec une certaine approximation. Les paramètres du modèle sont choisis de manière que la représentation soit aussi bonne que possible, à moins qu'il ne résulte de l'expérience antérieure qu'il faille leur assigner des valeurs *a priori* bien déterminées.

*Pour simplifier l'exposé,* considérons une urne contenant des boules blanches et noires, physiquement aussi semblables qu'il est possible de les réaliser, et dans laquelle des personnes différentes effectuent des tirages successifs avec remplacement. Supposons que l'on effectue $s$ séries $S_i$ de $n$ tirages, à chacune desquelles correspond une fréquence empirique $f_{i,\,n}$ de sorties de boules blanches.

L'expérience montre que tout se passe comme s'il existait une fréquence $f$, en l'espèce égale à 1/2, telle que la fréquence $F_{s,\,n,\,\varepsilon}$ des séries $S_i$ pour lesquelles la valeur absolue de la différence $f_{i,\,n} - f$ excède une valeur positive déterminée $\varepsilon$ devient de plus en plus petite à mesure que le nombre $n$ de tirages de

5. Sur tous ces points, voir l'Appendice I ci dessous, *Fréquences empiriques et Fréquences mathématiques.*

chaque série et le nombre $s$ des séries augmentent. C'est là ce que l'on peut appeler *la loi empirique des grands nombres.*

Les différentes fréquences empiriques $f_\iota$ correspondant aux $s$ suites considérées peuvent être interprétées *comme les mesures expérimentales d'une même constante physique* $f$ qui caractérise le processus de tirage dans l'urne considérée et qu'on peut appeler « *fréquence intrinsèque* ». Si des conditions de symétrie sont assurées, on peut assigner à cette fréquence intrinsèque une valeur *a priori* bien déterminée.

Il est essentiel de souligner que rien ne permet de déduire des données de l'observation que pour une série donnée $S_\iota$ de $n$ tirages, la fréquence $f_{\iota,\, n}$ converge vers la fréquence intrinsèque $f$ au sens de l'analyse lorsque $n$ prend des valeurs de plus en plus élevées. Tout ce que l'on peut dire, c'est que l'observation montre qu'*en moyenne* la fréquence $F_{s,\, n}$ des séries d'épreuves au cours desquelles les fréquences empiriques $f_{\iota,\, n}$ diffèrent notablement de la fréquence intrinsèque $f$ devient de plus en plus faible lorsque pour chaque série le nombre $n$ d'épreuves augmente et lorsque le nombre considéré $s$ des séries augmente.

De même que l'on s'attend seulement, en effectuant plusieurs mesures d'une même longueur, à obtenir des nombres voisins, de même on s'attendra seulement en effectuant des séries nombreuses de tirages à trouver des valeurs voisines pour la fréquence.

*En fait, trop souvent, les auteurs dérivent cette loi empirique des grands nombres de la loi mathématique des grands nombres de Bernoulli, alors que la loi de Bernoulli ne constitue qu'une propriété mathématique asymptotique de la distribution binomiale, et alors que par elle-même cette loi mathématique ne peut rien nous apprendre sur la réalité concrète.*

Il ne pourrait en être autrement *que si* on postulait qu'en moyenne les boules blanches et les boules noires ont une égale possibilité de sortie. *Si on admet cet axiome d'égale possibilité en moyenne le modèle mathématique fréquentiel fournit non seulement une représentation, mais également une « explication » du phénomène constaté.*

*Si on admet l'axiome d'égale possibilité en moyenne on peut estimer a priori la fréquence intrinsèque du modèle fréquentiel dans le cas considéré des tirages dans une urne en la prenant égale au rapport du nombre des boules blanches au nombre total des boules, toutes les boules étant considérées comme également possibles.*

Dans la mesure même où on assimile le processus des tirages successifs dans une urne au modèle mathématique fréquentiel, une telle assimilation *pour être parfaite* reviendrait à supposer que si l'on effectuait $s = 2^n$ séries de $n$ tirages, ces $s$ séries de tirages se répartiraient exactement comme dans le modèle mathématique fréquentiel, *ce qui reviendrait effectivement à dire que tout se passe comme s'il y avait égale possibilité de tirage pour les boules blanches et noires.*

Si l'on y réfléchit on constate que dans tous les cas où il est possible de représenter une distribution statistique par un modèle mathématique fréquentiel, *tout se passe comme si un axiome d'égale possibilité pouvait effectivement être admis quelque part. Cet axiome, comme les modèles mathématiques fréquentiels qui lui correspondent et comme le concept de fréquence intrinsèque, constituent essentiellement une « idéalisation » de l'expérience.*

En fait, *tous* les modèles mathématiques fréquentiels reposent *nécessairement* sur une hypothèse d'égale possibilité. La formulation explicite de cette hypothèse est particulièrement évidente dans la discussion du problème discuté par Joseph Bertrand de la *« probabilité pour que dans une circonférence, une corde soit plus grande que le côté du triangle équilatéral inscrit ».* Suivant qu'on la formule d'une manière ou d'une autre, on trouve des *« probabilités »* différentes.

Pour que les modèles mathématiques fréquentiels s'appliquent aux distributions empiriques de la réalité concrète, il faut que cette hypothèse d'égale possibilité se retrouve dans la structure des données empiriques.

Il faut donc admettre un axiome de « *représentabilité* » qui permettra cette application. Le fondement de cet axiome, c'est l'axiome d'égale possibilité en moyenne. Cet axiome, qui permet d'appliquer la théorie à la réalité concrète, *il faut l'énoncer explicitement.*

Lorsque les modèles mathématiques fréquentiels utilisés représentent efficacement la réalité, la qualité de cette représentation ne soulève ni plus ni moins de problèmes que la qualité de la représentation des mouvements des planètes par les lois de la mécanique céleste.

Si on considère une suite suffisamment longue de tirages dans le cas de loteries, de jets de dés ou de pièces, *on ne peut en fait que s'émerveiller de la concordance quasiment rigoureuse que l'on constate entre les distributions empiriques et les modèles mathématiques fréquentiels qui les représentent. Cette concordance est d'autant plus remarquable que rien a priori ne permet de postuler l'adéquation des modèles déterministes fréquentiels aux processus aléatoires considérés où le « hasard » joue un rôle déterminant.*

En fait, et malheureusement, on constate une disproportion très regrettable entre le nombre des travaux théoriques consacrés à l'élaboration des modèles théoriques et celui des travaux empiriques destinés à les confronter avec les données de l'expérience. C'est là pourtant *une tâche essentielle,* tout à fait indispensable, *dont la nécessité a été ressentie par tous ceux que préoccupe justement la liaison entre la théorie et la réalité concrète.* La première recherche connue est celle de Buffon qui a analysé une série de 4 040 jetés d'une pièce de monnaie. Au XIX^e^ siècle l'astronome suisse Wolf a réalisé plus de 280 000 jetés de deux dés, et il y a quelques années Herman Wold a analysé des séries simulant 600 000 tirages. Dans tous les cas on constate que tout se passe comme si les modèles mathématiques fréquentiels représentaient correctement la réalité, *ce qui conduit à la conclusion que l'axiome d'égale possibilité en moyenne peut être considéré comme admissible.*

Encore plus rares sont les auteurs qui se sont efforcés d'expliquer *pourquoi* les fréquences empiriques reproduisent approximativement les fréquences mathématiques; *pourquoi* des tirages successifs dans une urne, ou des processus analogues, conduisent à des distributions qui ne sont jamais très éloignées de la loi normale; *pourquoi* la nature semble ainsi obéir à la loi normale. *Ce sont là de toute évidence des questions fondamentales.* C'est Henri Poincaré, dans des analyses remarquables, qui le premier en a aperçu tout l'intérêt, et dégagé quelques approches explicatives très suggestives à partir de l'utilisation de *fonctions arbitraires de fréquence.*

Pour illustrer la génération empirique de la loi normale, Francis Galton a réalisé une machine dont il rend compte des résultats de son fonctionnement dans son ouvrage « *Natural Inheritance* ». Il s'agissait de petites billes tombant verticalement dans un espace parsemé par une série d'aiguilles, régulièrement espacées, et disposées en rangées successives, suivant une disposition utilisée de nos jours dans certains appareils à sous. En bas de l'appareil se trouvaient un certain nombre de récipients dans lesquels venaient se loger finalement les billes. On constate que leur distribution est celle de la loi normale avec une approximation d'autant meilleure que leur nombre est plus grand.

*Le processus de la machine de Galton est physiquement déterministe. Comment donc expliquer qu'il suive la loi du soi-disant « hasard »*. Il ne peut en être ainsi que si l'axiome d'égale possibilité est effectivement satisfait en moyenne lors du choc de chaque bille avec les aiguilles qu'elle rencontre. Les actions qui en résultent se distribuent selon des fonctions de fréquence, fonctions arbitraires au sens de Poincaré, de sorte qu'effectivement l'axiome d'égale possibilité se trouve vérifié en moyenne.

Ce qu'il faut expliquer dans le cas du dispositif expérimental de Galton, *c'est pourquoi les billes viennent se placer précisément là où elles doivent venir se placer pour que leur distribution soit effectivement approximativement normale.*

Dans l'appareil de Galton ce ne sont pas des probabilités qui interviennent dans l'action des aiguilles lors des chocs; ce sont des fréquences représentables par des fonctions arbitraires au sens de

Poincaré, ces fonctions se combinant d'après le théorème central limite applicable aux fréquences, et cette combinaison aboutit à une représentation correcte des fréquences observées.

Par elle-même la théorie mathématique des modèles déterministes de fréquence ne peut rien nous enseigner sur la nature : elle peut seulement définir les lois déterministes des modèles fréquentiels qui peuvent être confrontés avec l'expérience. C'est à cette confrontation qu'ont procédé des savants comme Buffon, Weldon, Wolf, Galton et Wold ainsi que je viens de l'indiquer.

*En tout état de cause, ce que l'on convient d'appeler les lois du hasard ne sont que les propriétés du développement binomial ou du développement multinomial, ou des formulations qui leur correspondent dans le cas continu. Et en dernière analyse ce que l'expérience vérifie, lorsqu'il apparaît que ces lois représentent correctement la réalité concrète, c'est la validité de l'axiome d'égale possibilité en moyenne.*

La représentation de la réalité par un modèle mathématique fréquentiel *n'est généralement qu'approximative, si bonne que puisse être cette approximation* dans un très large domaine. Ainsi, et par exemple, on peut affirmer que dans toute population humaine, il n'y a aucun individu d'une taille dépassant quelques mètres. De même en ce qui concerne la distribution des vitesses de Maxwell, fondement de la théorie cinétique des gaz, on peut affirmer qu'il n'y a certainement aucune particule ayant une vitesse égale à mille fois la vitesse de la lumière.

Du point de vue de la Théorie de la Décision les valeurs extrêmes peuvent présenter une très grande importance, et les distributions communément envisagées ne peuvent être admises qu'avec de grandes précautions dès lors que l'on considère de grandes valeurs des variables.

Considérée en elle-même l'analyse statistique des fréquences empiriques ne porte que sur des événements *déjà réalisés.* Elle n'implique aucune considération sur l'avenir. *Elle ne comporte aucune incertitude,* les distributions qu'elle étudie étant parfaitement déterminées. Elle repose sur la représentation, et éventuellement *« l'explication »* des distributions empiriques de fréquences *par des modèles mathématiques fréquentiels totalement déterministes.* Ici encore le *« hasard »* n'intervient en aucune façon et l'utilisation de vocables tels que *« probabilité »* ou *« aléatoire »* est totalement inappropriée, en tant qu'impliquant un jugement subjectif sur l'avenir, ou suggérant des interprétations dont rien ne prouve qu'elles puissent être valides. En fait toutes les propositions auxquelles nous avons été habitués restent valables à condition de remplacer le mot *« probabilité »* par le mot *« fréquence empirique ».* Il en est ainsi notamment de la théorie de la corrélation dont les bases ont été élaborées par Bravais, tout à fait indépendamment du concept de probabilité ([5]).

## 4. Probabilité objective et coefficient de vraisemblance

En opposition avec le concept déterministe de fréquence mathématique et le concept de fréquence empirique qui se rapporte à des événements déjà réalisés, *le concept de probabilité concerne essentiellement la prévision d'un avenir incertain.*

Si cette prédiction s'appuie sur la considération de distributions statistiques déjà constatées, la terminologie la plus adéquate est celle de *« probabilité objective ».* Si cette prédiction porte sur des événements pour lesquels aucune analyse statistique antérieure n'est disponible, il s'agit d'une supputation de l'avenir, d'une estimation de la vraisemblance de tel ou tel événement dont tous les caractères sont entièrement différents de ceux de la probabilité objective telle que je viens de la définir. Ici, la terminologie qui paraît la plus adéquate est celle de *« coefficient de vraisemblance ». Mais dans les deux cas, il s'agit d'une prévision sur l'avenir dont le caractère est essentiellement subjectif.*

5 Sur tous ces points, voir l'Appendice I ci dessous, *Fréquences empiriques et Fréquences mathématiques*

*Dans le premier cas,* celui de la probabilité objective, on fait *une double hypothèse* de caractère subjectif :

– la première admet *la validité de la représentation des distributions empiriques par des modèles mathématiques fréquentiels* dont le caractère en fait est *totalement déterministe;*

– la seconde admet implicitement un *postulat d'invariance des lois de la nature* suivant lequel ce que l'on a régulièrement observé dans le passé continuera à s'observer dans l'avenir.

*Dans le second cas,* celui de la vraisemblance, la prédiction de l'avenir est pratiquement détachée de tout élément objectif, c'est-à-dire de tout élément indépendant de celui qui formule cette prédiction. Dans ce cas on pourrait envisager d'utiliser le vocable de « *probabilité subjective* » pour désigner ce que je suis conduit à appeler « *coefficient de vraisemblance* ». Mais une telle dénomination serait fâcheuse pour au moins deux raisons. Tout d'abord elle tendrait à masquer *le caractère subjectif du concept de probabilité objective.* En second lieu elle suggérerait que les modèles probabilistes déduits des enseignements de l'observation antérieure s'appliqueraient tout aussi bien aux appréciations sur la vraisemblance des événements sur lesquels on ne dispose d'aucune donnée objective, c'est-à-dire communément admise, ce qui serait inexact.

En tout état de cause, il convient de souligner que *le concept de probabilité, indissociablement relié à une prévision humaine de l'avenir, n'existe pas dans la nature. Il n'existe que dans l'esprit de l'homme. La nature ne connaît que des fréquences; elle ignore les probabilités.*

## 5. Probabilité objective

La prédiction de l'avenir à partir de la connaissance des distributions statistiques observées dans le passé se fonde essentiellement sur la *probabilité objective* qui repose sur l'estimation de ce que j'ai appelé la *fréquence intrinsèque* caractérisant le processus considéré.

Deux cas d'une nature très différente doivent être envisagés. *Dans le premier* on ne dispose d'aucune information décisive quant à la possibilité respective des différents événements possibles dans le cas précis considéré. Dans ce cas on peut prendre comme fréquence intrinsèque la valeur déduite de l'analyse des distributions antérieures déjà constatées pour des cas analogues. Tel sera le cas de jetés de dés *sur lesquels on ne dispose d'aucune information particulière,* et cela même si on peut légitimement s'attendre *a priori* à ce qu'ils présentent quelque biais. *Dans le second cas,* si on dispose de la distribution correspondant à des jetés antérieurs *correspondant aux mêmes dés,* le mieux sera d'adopter comme probabilité la valeur de la *fréquence intrinsèque* qui assure la meilleure représentation de la distribution constatée dans le passé par le modèle mathématique fréquentiel qui lui correspond.

Cependant, ce principe peut parfaitement ne pas être le meilleur. A titre d'illustration considérons le tirage dans une urne contenant un nombre égal de boules blanches et de boules noires et assurant les meilleures conditions de symétrie réalisables. Dans ce cas on considérera les tirages d'une boule blanche et d'une boule noire comme *également possibles a priori,* et on prendra *a priori* comme probabilité la valeur 1/2, *et cela même si on vient de constater que dans une suite de quinze tirages on a tiré dix fois une boule blanche. Cette inférence vient du fait qu'une longue expérience antérieure nous conduit à la conclusion que lorsque des conditions de symétrie sont effectivement assurées, il est raisonnable de considérer a priori tous les cas possibles comme également possibles.* Cette approche est celle de la théorie classique des probabilités qui a culminé avec la théorie de Laplace et qui s'est développée en admettant plus ou moins explicitement *l'axiome d'égale possibilité dans le modèle mathématique fréquentiel et l'axiome d'égale possibilité en moyenne dans les applications empiriques.*

A chaque modèle mathématique fréquentiel on peut naturellement faire correspondre un modèle probabiliste, mais dans tous les cas le fait que toute la théorie mathématique du calcul des probabilités peut être considérée comme s'identifiant à des calculs d'analyse combinatoire *prouve qu'un axiome d'égale possibilité s'y introduit d'une manière ou d'une autre. Dès lors, l'axiome d'égale possibilité doit être considéré comme l'idéalisation la plus simple de la réalité concrète.*

Un modèle probabiliste peut être appliqué à la prédiction d'un événement unique ou à la prédiction d'une série d'événements. Dans le cas d'une urne on peut procéder à un seul tirage ou à une suite de tirages successifs. Ce qu'il est essentiel de souligner, c'est que *le résultat observé ne sera jamais incompatible avec le modèle considéré.*

Le tirage d'une boule blanche dans une urne contenant un nombre égal de boules blanches et de boules noires ne peut ni infirmer ni confirmer le modèle utilisé, puisque précisément ce modèle repose sur l'axiome d'égale possibilité en moyenne, et qu'il faut bien que lors d'un tirage on sorte effectivement une boule blanche ou une boule noire.

L'obtention de $n$ boules blanches dans une série de $n$ tirages ne pourra pas plus contredire le modèle utilisé, puisque chacune des $2^n$ trajectoires possibles doit être considérée *a priori* comme également possible, donc comme également probable.

Ainsi, le caractère fondamental de l'analyse probabiliste, c'est tout à la fois qu'elle ne peut jamais aboutir à une prédiction certaine et qu'elle ne peut jamais être contredite par l'expérience. *Quel qu'il soit l'événement qui se réalise peut toujours se concilier avec le jugement formulé antérieurement sur sa probabilité objective.*

Cependant, si l'on considère une distribution empirique constatée dans le passé et si on peut la représenter par un modèle mathématique fréquentiel avec une certaine approximation, rien ne nous empêche de calculer après coup la probabilité qu'on aurait pu assigner à une telle approximation avant de connaître cette distribution, dès lors que l'on aurait admis comme critère l'obéissance au modèle mathématique fréquentiel; et au vu de cette probabilité de rejeter, ou non, ce modèle, la distribution empirique une fois connue. C'est là la démarche effective de tous les tests de signification.

Ce qui en tout état de cause est essentiel, c'est que *tout modèle probabiliste, dès lors qu'il est appliqué à la réalité, repose sur un modèle mathématique fréquentiel déterministe dont l'usage se trouve justifié par son succès antérieur.* En définitive, c'est *sur l'expérience antérieure* que repose l'application de tout modèle probabiliste à la réalité concrète. *La théorie mathématique par elle-même ne peut rien nous apprendre sur cette réalité.*

En tout cas de même que les distributions statistiques empiriques ne peuvent être représentées correctement par les modèles mathématiques fréquentiels que si en fait les phénomènes étudiés satisfont quelque part, au moins approximativement, à l'*axiome d'égale possibilité en moyenne,* de même les modèles mathématiques probabilistes ne peuvent être utilisés pour prévoir correctement l'avenir que si *la même hypothèse d'égale possibilité en moyenne* est faite quelque part.

Dans la mesure même où les distributions empiriques sont représentées correctement par les modèles mathématiques fréquentiels et où l'on utilise cette donnée de l'expérience pour prévoir l'avenir, il suffit de remplacer dans les modèles mathématiques fréquentiels le vocable « *fréquence mathématique* » par le vocable « *probabilité mathématique* » pour transposer les modèles mathématiques fréquentiels en modèles mathématiques probabilistes. *Mais cette transposition ne saurait nous masquer la nature de l'opération qui est faite et qui est essentiellement d'ordre subjectif.*

*La probabilité objective, quoique fondée sur une fréquence empirique, n'existe pas dans la nature; elle n'existe que dans l'esprit des hommes. La nature ne connaît que des fréquences.* Le concept de probabilité correspond à un jugement humain effectué à l'avance par un esprit humain. *Ce jugement n'a pas de signification physique intrinsèque quant à la réalisation effective de l'événement considéré. La nature ne fait jamais de prédiction sur l'avenir.*

## 6. LE CONCEPT DE VRAISEMBLANCE

Dans le langage ordinaire le mot *« probable »* correspond le plus souvent à un concept dont la nature est différente de celle du concept de *probabilité objective* correspondant à des événements susceptibles de se répéter et se manifestant avec des fréquences qui ont un caractère objectif. Plutôt que de parler de probabilité, il vaut mieux parler ici de *coefficient de vraisemblance.*

Les coefficients de vraisemblance peuvent se déterminer par référence aux probabilités objectives. On pourra dire par exemple que la réalisation de tel ou tel événement est plus ou moins vraisemblable que le tirage successif de trois boules blanches dans une urne dont la probabilité *a priori* est égale à 1/8 si l'urne contient un nombre égal de boules blanches et noires.

L'utilisation du concept de plus ou moins grande vraisemblance est inévitable, car *en dernière analyse, et par exemple, toutes les applications de l'analyse statistique au monde réel sont fondées sur des jugements sur la plus ou moins grande vraisemblance de l'adéquation des modèles fréquentiels considérés pour représenter la réalité concrète.*

*Le principe du maximum de vraisemblance* de R.A. Fisher, déjà utilisé d'une façon systématique sous une forme plus générale par Laplace, ne constitue qu'une illustration de cette proposition. Il peut paraître commode, sinon attractif, de l'accepter, mais *il est indémontrable.*

*Le principe de Bayes* en constitue une seconde illustration. Si l'on n'a aucune information sur la probabilité *a priori,* est il pourtant légitime de considérer toutes les valeurs comprises entre 0 et 1 comme également probables, alors qu'en fait les conditions d'une ignorance complète ne sont jamais réalisées? *C'est là un principe indémontrable* auquel on ne peut qu'attacher une plus ou moins grande vraisemblance suivant le cas d'espèce considéré et qui en fait a été justement critiqué dans le passé. L'arbitraire de l'estimation des probabilités *a priori* ne disparaît que lorsque le nombre des observations devient suffisamment élevé. Encore faut-il que ces observations soient effectivement indépendantes. Il est de toute façon quelque peu étrange que personne ne paraît remarquer que si on admet le principe de Laplace le principe de R.A. Fisher revient mathématiquement à admettre la validité du principe de Bayes.

De même encore l'adoption de tel ou tel *seuil de signification statistique* ne peut trouver de justification que dans un jugement sur la plus ou moins grande vraisemblance à attacher aux modèles considérés lorsque d'après ces modèles la probabilité d'un écart donné de la distribution constatée par rapport à la distribution théorique est inférieure à une valeur donnée.

Il en est de même encore du principe souvent adopté, mais cependant *très arbitraire,* réellement contestable, et à vrai dire *logiquement indéfendable,* suivant lequel les événements de très faible probabilité peuvent être considérés comme pratiquement impossibles. Ainsi Buffon considérait que les probabilités de l'ordre de $10^{-4}$ peuvent être négligées alors que Borel a fixé à $10^{-6}$ la limite des probabilités négligeables à l'échelle humaine. Sans fixer de limite précise, Laplace a fait dans son Traité de nombreuses applications de ce principe à l'astronomie, en considérant comme invraisemblable le fait que certaines régularités très frappantes ne puissent s'expliquer alors que leur probabilité calculée dans l'hypothèse du hasard était très faible.

Borel a même fait de ce principe la *« Loi unique du hasard ».* Il traduit simplement le fait que dans la totalité des distributions empiriques de fréquence les valeurs extrêmes de la loi de Laplace-Gauss *ne sont jamais observées.* Ainsi dans les distributions des tailles des individus, les valeurs extrêmes ont des limites bien déterminées, et la loi normale ne peut être considérée ainsi que comme une approximation.

D'une manière générale l'acceptation de *l'axiome d'égale possibilité a priori,* ou d'une hypothèse de symétrie sur les cas possibles, qui ne sont que des idéalisations de l'expérience, *ne relève que d'un jugement de vraisemblance.*

*En fait, si l'on renonçait au concept de plus ou moins grande vraisemblance, toute confrontation de la théorie des probabilités avec la réalité serait impossible sans faire intervenir de nouveaux postulats.*

En dernière analyse, pour juger de la validité d'un modèle, *qu'il soit, ou non, déterministe,* il faut faire intervenir des considérations de plus ou moins grande vraisemblance dont le caractère est éminemment subjectif. Ainsi, lorsque dans un travail de recherche on aboutit à une concordance numérique, la question qui se pose immédiatement est de savoir si elle correspond à une réalité intrinsèque, ou si elle n'est que l'expression d'une régularité fortuite. On est inéluctablement amené à estimer la vraisemblance du résultat obtenu, estimation dont le caractère est naturellement *fondamentalement subjectif.*

## 7. Le concept de hasard et la réalité

Dans son sens vulgaire, le hasard se caractérise communément par l'incertitude, l'imprévisibilité, le caractère fortuit ou inexplicable des événements, leur dépendance d'un très grand nombre de causes inconnues ou trop complexes pour qu'elles puissent être analysées ...

De même qu'à mon avis, on ne peut, pour définir la probabilité à l'état pur, que se référer au tirage de boules dans une urne de référence et suivant un processus assurant des conditions de symétrie aussi parfaites que possible, de même *on ne peut définir le hasard pur que par référence à un tel tirage. Le hasard pur se caractérise par une totale imprévisibilité.*

Le hasard pur, comme la probabilité à l'état pur, sont des notions conceptuelles primordiales qui *ne sont en fait que des créations subjectives de notre esprit,* liées à l'impossibilité où il est de prévoir quel sera le résultat d'un tirage donné. *Le hasard, comme la probabilité, résulte de jugements purement subjectifs qui n'existent que dans notre esprit et que la nature ignore.* En fait, ces deux concepts sont indissociables l'un de l'autre; ils ne sauraient être considérés indépendamment l'un de l'autre.

*La nature en effet ne se préoccupe pas de prévoir, ni d'ailleurs d'expliquer. C'est pourquoi les concepts de probabilité et de hasard lui sont totalement étrangers,* et c'est ce qui explique l'impossibilité où nous sommes de donner une définition objective de ces deux concepts, la seule définition susceptible d'être donnée ne pouvant l'être que par une référence *subjective* au tirage dans une urne.

*En fait, l'impossibilité absolue de prévoir dans le cas du tirage dans une urne est liée au fait que nous jugeons a priori toutes les alternatives comme également possibles.* Ce jugement ne peut naturellement valoir qu'en moyenne, puisque pour tout tirage nous sommes sûrs qu'une boule sortira, et qu'elle sera ainsi privilégiée par rapport aux autres.

*Ce jugement sur l'égale possibilité a priori équivaut ainsi à l'axiome d'égale possibilité en moyenne,* axiome qui permet d'expliquer pourquoi la distribution fréquentielle multinomiale permet généralement de représenter d'une manière remarquable la distribution des fréquences observées.

De là résulte ce paradoxe, qui n'en est un qu'en apparence, que l'impossibilité de prévoir le résultat d'*un tirage particulier* permet en général de prévoir avec une quasi-certitude la distribution des résultats d'*un très grand nombre de tirages.* Dans cette perspective c'est le hasard le plus pur qui permet de préciser et d'expliquer les *« lois du hasard ». Le hasard pur trouve donc son aboutissement logique dans le déterminisme le plus absolu.*

L'explication dans certains cas de cette conclusion paradoxale doit être recherchée dans l'approche d'Henri Poincaré fondée sur la considération de fonctions de fréquence arbitraires et sur l'utilisation du théorème central limite qui permet de prévoir l'influence d'ensemble de ces fonctions arbitraires.

*En fait, ce dont en dernière analyse il convient de s'étonner, et à vrai dire de s'étonner profondément, c'est de la manière dont certains événements paraissent obéir à l'axiome d'égale possibilité en moyenne, qui seul peut expliquer la concordance des distributions empiriques, qu'on n'est que trop enclin* *à attribuer au hasard, avec les modèles mathématiques fréquentiels dont le caractère est essentiellement déterministe.*

C'est ce paradoxe généralement passé sous silence dans toute la littérature qu'il convient précisément d'« *expliquer* », et cette « *explication* » par elle-même est à elle seule tout aussi importante, *sinon plus importante,* que tous les théorèmes relatifs aux modèles déterministes fréquentiels.

Pour qu'une telle concordance se constate, il faut par exemple qu'il se produise à la longue une certaine « *compensation* » entre les sorties des boules blanches et celles des boules noires lors de tirages successifs dans une urne. C'est là même le principe de compensation auquel croient tous les joueurs et qu'en toute logique nous devons *a priori* rejeter, toute suite de blanches et de noires devant être considérée comme également possible *a priori.* Il n'en reste pas moins que si l'on considère *le modèle mathématique fréquentiel* qui représente ce processus pour un nombre *n* de tirages augmentant indéfiniment, on vérifie qu'*il y a effectivement un nombre infini de trajectoires pour lesquelles il n'y a jamais compensation, mais que leur fréquence tend vers zéro lorsque* n *augmente indéfiniment.* Ce résultat implique bien qu'il y ait *compensation en moyenne* dans la réalité concrète *dans la mesure même* où elle peut être valablement représentée par le modèle mathématique fréquentiel qui lui correspond.

En fait, les théories mathématiques que beaucoup désignent par « *théories mathématiques du hasard* » ignorent, comme la nature, mais pour d'autres motifs, le hasard, l'incertain et la probabilité. Comme je l'ai déjà souligné, les modèles qu'elles considèrent sont *des modèles purement déterministes,* et en fait, les quantités qu'elles étudient ne sont en dernière analyse que des fréquences de configurations particulières dans l'ensemble des configurations également possibles dont le calcul se fonde sur l'analyse combinatoire. *L'appareillage mathématique souvent très complexe et très abstrait dont ces théories s'entourent ne saurait masquer cette réalité fondamentale.*

En définitive la notion de hasard est indissociable des notions psychologiques de probabilité et de vraisemblance. *Aucune définition axiomatique du hasard n'est concevable. La théorie axiomatique des « probabilités » ne fait aucunement appel au concept de hasard, et il est inconcevable qu'elle puisse le faire.*

## 8. Fréquence, probabilité et hasard

Il résulte de ce qui précède que *dans toute la littérature le même mot probabilité recouvre en réalité quatre concepts fondamentalement différents : le concept de fréquence mathématique, le concept de fréquence empirique, le concept de probabilité objective, et le concept de degré de vraisemblance.*

Si ces quatre concepts sont distingués, toutes les difficultés, les contradictions, les obscurités disparaissent. Si on les confond, les oppositions deviennent irréductibles dès que l'on s'efforce de faire la liaison entre les théories abstraites et l'analyse des phénomènes réels ou subjectifs.

*Les modèles des théories mathématiques sont des modèles fréquentiels qui ignorent le hasard et sont entièrement déterministes.* En dernière analyse tous leurs théorèmes, qu'ils s'appliquent à des ensembles discrets ou à des ensembles continus, ne sont en fait que des théorèmes d'analyse combinatoire. Les quantités qu'elles étudient sont des fréquences mathématiques *que d'une manière totalement inappropriée on qualifie de probabilités.*

Il y a même un véritable abus à utiliser le mot de probabilité. C'est de cet abus qu'est résultée notamment la croyance généralement admise que la loi *empirique* des grands nombres a été démontrée par Bernoulli, alors que cette démonstration ne peut être faite qu'en conjuguant la loi *mathématique* des grands nombres de Bernoulli *avec un axiome d'égale possibilité en moyenne, axiome indémontrable,* et qui en réalité ne peut être déduit que de l'observation.

*Les théories statistiques* dans tous les domaines où elles sont appliquées, qu'il s'agisse des sciences de la nature, des sciences de la vie ou des sciences de l'homme, *ne connaissent que des fréquences empiri-*

*ques,* et elles n'étudient que des distributions qui appartiennent au passé. Si elles utilisent avec succès les modèles mathématiques fréquentiels, *c'est que la nature paraît obéir à des mécanismes dont l'effet se traduit par la validité pratique de l'axiome d'égale possibilité en moyenne.*

*Les concepts de probabilité et de hasard apparaissent au contraire comme attachés à la prévision de l'avenir et à son caractère contingent et incertain. Ce sont des créations de l'esprit humain que la nature tout aussi bien que les mathématiques ignorent.* Ce sont là les raisons pour lesquelles ils apparaissent comme totalement absents des théories mathématiques et des analyses statistiques *dès lors que l'on en examine la substance, et non la sémantique qu'elles utilisent d'une manière tout à fait indue.*

Il n'est donc pas étonnant que l'on constate des oppositions fondamentales entre les différentes théories puisque leurs propositions s'appliquent à des réalités *entièrement différentes.*

Dans toute cette analyse on est toujours finalement confronté avec une seule question, *à vrai dire fondamentale,* dont dépend à la fois l'interprétation des théories au regard des réalités concrètes et leur applicabilité à l'étude de ces réalités : *pourquoi la nature, lorsqu'elle est considérée comme aléatoire, peut-elle être représentée, au moins en première approximation, et très souvent avec une très grande précision, par des modèles mathématiques qui reposent implicitement sur un axiome d'égale possibilité et qui en réalité sont fondamentalement des modèles déterministes?* Malheureusement, dans la presque totalité des ouvrages, cette question n'est même pas abordée.

Ma conviction personnelle est que *la nature elle-même est totalement déterministe,* mais qu'en première approximation les sommes d'effets déterministes, s'ils sont suffisamment nombreux et d'importance relative pas trop différente, se distribuent suivant les modèles mathématiques fréquentiels, dont à tort selon moi on attribue la validité à des causes purement aléatoires. J'en donnerai plus loin une illustration ([6]).

En fait, *l'axiome tout à fait fondamental d'égale possibilité* se présente sous trois aspects différents étroitement liés les uns aux autres : *l'axiome d'égale possibilité des modèles mathématiques fréquentiels* dont tous les théorèmes reposent sur la considération simultanée de *tous* les cas possibles, qui, au moins implicitement, sont supposés se réaliser *simultanément; l'axiome d'égale possibilité en moyenne relatif aux processus empiriques; l'axiome d'égale possibilité a priori* relatif aux prévisions faites *a priori* pour les processus de tirages dans une urne, ou pour des processus analogues pour lesquels des conditions de symétrie sont considérées comme réalisées.

L'approche générale que je viens d'exposer est, dans son ordre, inverse de l'ordre historique. L'histoire de la pensée est partie du concept de plus ou moins grande vraisemblance des combinaisons auxquelles les joueurs étaient confrontés. De là elle est passée au calcul des probabilités à partir de l'axiome généralement non explicité, et en tout cas insuffisamment discuté, de *l'égale possibilité a priori* des cas possibles. Puis les chercheurs ont abordé l'étude des distributions empiriques. Et finalement, les mathématiciens ont élaboré des théories axiomatiques rigoureuses qui ont permis la formalisation de modèles mathématiques fréquentiels applicables à l'analyse des phénomènes réels et à celle des prédictions relatives à l'incertitude de l'avenir.

De toute évidence, il y a eu constamment interpénétration de ces quatre approches, mais à chaque époque l'importance attachée à chacune d'elles correspond bien à ce processus d'ensemble. Et c'est ce qui explique que tous les théoriciens, tous les chercheurs se sont trouvés en quelque sorte emprisonnés dans un cadre conceptuel et sémantique dominé par les vocables de probabilité, de hasard et d'aléatoire, issus de l'étude des jeux de hasard, *même lorsque l'objet effectif de leurs recherches les excluait tota lement.*

En fait, si les recherches s'étaient centrées d'abord sur les modèles fréquentiels représentatifs d'événements passés, puis ultérieurement seulement sur les jeux de hasard dominés par l'incertitude de

6 Voir *Section 10* ci dessous

l'avenir, la sémantique utilisée aujourd'hui aurait été certainement toute différente. Mais il faut reconnaître qu'il nous est maintenant quelque peu difficile de renoncer à des habitudes invétérées de langage et de pensée, et pourtant ne faut-il pas également reconnaître qu'une sémantique inappropriée ne peut qu'être éminemment dangereuse en tant qu'elle peut suggérer presque irrésistiblement bien des idées tout à fait inexactes?

## 9. La simulation du « hasard »

Au regard de ce qui précède que faut-il entendre par *« choix au hasard », « simulation du hasard », « séries de nombres au hasard », variables aléatoires, processus aléatoires?*

Une seule réponse valable me paraît pouvoir être donnée à cette question. *Pour choisir au hasard, il faut à mon avis faire dépendre ce choix d'un tirage dans une urne de référence.* Une série de nombres au hasard ne peut être définie que par une suite de tirages en utilisant un processus expérimental assurant des conditions de symétrie réelle.

Mais de tels procédés sont laborieux, et on est amené à recourir à des processus dont on pense qu'ils peuvent simuler le hasard. Deux classes de procédés sont utilisés, d'une part l'utilisation de procédés mécaniques ou physiques, d'autre part l'utilisation des propriétés des nombres irrationnels.

Ces procédés peuvent apparaître à première vue comme convenables, et ils conduisent en général à des séries satisfaisant, au moins approximativement, aux principaux tests caractérisant ce que l'on convient d'appeler des *« séries aléatoires ».* Mais ils ne sont pas exempts de biais qui dans certains cas sont susceptibles de donner des effets inacceptables.

Considérons par exemple le procédé fondé sur le dénombrement des particules radioactives. On admet généralement que les séries obtenues sont dépourvues de toute régularité. Cependant les expériences de Jean Thibaud et de ses collaborateurs ont *démontré l'existence de perturbations de caractère périodique* telles qu'elles ne sauraient être représentées valablement par les lois de probabilité habituellement admises. Il me paraît vraisemblable que les procédés mécaniques peuvent être influencés par des effets analogues.

Considérons maintenant l'utilisation des nombres irrationnels pour réaliser une simulation déterministe du hasard. On part de l'idée qu'à la différence des nombres rationnels dont les décimales au bout d'un certain rang finissent par se reproduire identiquement à des intervalles réguliers, les nombres irrationnels, dont la suite des décimales ne peut présenter aucune périodicité de cette sorte, peuvent servir à imiter le hasard. Cependant, par exemple et contrairement à ce que suggèrent un certain nombre d'auteurs, il a été démontré par Franel que lorsque $n$ augmente indéfiniment la moyenne des $n$ décimales d'ordre $i$ des logarithmes décimaux des nombres entiers successifs 1, 2, ..., $n$ ne tend pas vers 4,5, et qu'elle fluctue constamment autour d'une valeur, certes très voisine de 4,5, mais qui est fonction de l'ordre $i$, l'ordre de grandeur de l'amplitude de cette fluctuation étant elle-même une fonction de $i$. La fréquence de la décimale $l$ (égale à l'un des nombres 0, 1, 2, ..., 9) croît avec $l$. Il est donc tout à fait inexact d'affirmer comme le fait Joseph Bertrand que la distribution des i[èmes] décimales des logarithmes décimaux des nombres entiers se conforme aux *« lois du hasard »,* que les dix chiffres 0, 1, 2, ..., 9 sont également probables, et surtout que leur ordre de succession n'obéit à aucune loi. J'ai moi-même constaté que les décimales d'ordre 4 ou plus des logarithmes népériens des nombres entiers successifs présentent des régularités très remarquables et en fait inattendues. J'ai également trouvé des régularités analogues pour d'autres séries constituées par les parties décimales de nombres irrationnels ([7]). Cela montre que l'imitation du hasard par les décimales des nombres irrationnels *peut n'être tout au plus qu'appro chée.*

7 En fait, j'ai étudié les parties décimales des séries suivantes : $\sqrt[4]{23}\ \sqrt{n}$ et $n^{\cdot}\sqrt{2}$ où $n$ représente les entiers successifs : 1, 2, , $N$

Il convient en tout état de cause de parler ici *de fréquences, et non de probabilités,* car par exemple la succession des $i^{èmes}$ décimales des logarithmes décimaux des nombres entiers est un phénomène *entièrement déterministe qu'on ne saurait en aucune façon assimiler à un phénomène aléatoire relevant du hasard.* On relève ici chez Bertrand la même confusion sémantique entre les deux concepts de fréquence et de probabilité que celle qui empoisonne littéralement toute la littérature.

En fait, aucun procédé mathématique ne saurait imiter le hasard puisque la caractéristique essentielle du hasard est l'imprévisibilité et que tout processus mathématique est par essence déterministe.

Le fait que le déterminisme le plus absolu puisse *dans certains cas et dans certaines limites apparaître comme imitant en quelque sorte* les propriétés des fréquences constatées dans des séries de tirages dans une urne, ne saurait en aucune façon conduire à la conclusion que c'est là une manifestation d'un soi-disant hasard.

### 10. Fonctions presque périodiques, hasard et hypothèse du « Facteur X »

Lors de l'analyse des résultats des expériences sur le mouvement du pendule paraconique auxquelles j'ai procédé de 1954 à 1960, j'ai constaté que les valeurs successives de la somme de treize sinusoïdes, dont les périodes étaient celles considérées dans l'analyse des marées et dont les amplitudes résultaient de l'ajustement par les moindres carrés de cette somme aux séries observées des azimuts du plan d'oscillation du pendule, se distribuaient remarquablement suivant la loi normale.

Cela m'a amené à étudier la distribution des valeurs $X_n$ de fonctions presque périodiques considérées à des instants $t_n$ régulièrement espacés. De telles fonctions sont des sommes de composantes sinusoïdales dont certaines périodes sont incommensurables. Les résultats essentiels de cette étude dont j'ai établi le principe en 1959 sont exposés dans l'*Appendice II* à ce mémoire.

On peut facilement démontrer par application du théorème central limite que la distribution des valeurs $X_n$ de la fonction considérée est très voisine d'une distribution normale, à condition que les amplitudes $\alpha_i$ des différentes composantes soient d'un ordre de grandeur comparable, que la longueur $N$ des séries analysées soit suffisamment grande, qu'il en soit de même du nombre $l$ de composantes sinusoïdales, et que les fréquences $1/T_i$ soient irrationnelles et qu'il n'existe aucune relation linéaire à coefficients entiers entre ces fréquences. La distribution considérée est d'autant plus voisine de la loi normale que ces quatre conditions sont mieux réalisées ([8]).

On constate en fait que lorsque le nombre $l$ de composantes sinusoïdales augmente, la convergence vers la loi normale est rapide, même pour des séries de longueur relativement limitée.

On constate de plus que les valeurs $r_q$ des coefficients d'autocorrélation d'ordre $q$ de la série des valeurs $X_n$ se distribuent approximativement suivant la loi normale, et que, *pour une valeur donnée de* $N$ et sous des conditions très générales, la série des $X_n$ *présente toutes les apparences d'une suite de termes indépendants.*

Pour de telles fonctions presque périodiques la distribution suivant leur longueur des suites de valeurs $X_n$ de même signe diffère très peu de celle correspondant au modèle binomial correspondant à une fréquence intrinsèque égale à 1/2 pour une suite de $N$ tirages. On constate qu'il en est de même pour la série des coefficients d'autocorrélation de la série des $X_n$.

*On obtient ainsi pour des séries d'une longueur donnée une simulation presque parfaite de ce que l'on convient d'appeler le hasard.*

Non seulement ces propriétés remarquables de certaines fonctions presque périodiques peuvent fournir facilement des suites artificielles de nombres au hasard, mais elles contribuent à appuyer une

8. Voir le *Théorème* (T) de l'Appendice II, *La simulation du hasard par des fonctions presque périodiques.*

hypothèse que pour simplifier j'appelle l'hypothèse du « *Facteur* X », suivant laquelle les fluctuations des séries temporelles que nous observons dans les phénomènes qui relèvent des sciences de la nature, des sciences de la vie et des sciences de l'homme, pourraient résulter par des effets de résonance de l'influence des innombrables vibrations qui sillonnent l'espace dans lequel nous vivons et dont l'existence est aujourd'hui une certitude. *Ainsi pourrait s'expliquer la structure quasi-périodique* ([9]) *que l'on constate dans un très grand nombre de séries temporelles.*

Comme ces fluctuations se manifestent par des suites stationnaires dont toutes les apparences simulent ce qu'il est convenu d'appeler le hasard, *on les considère généralement comme parfaitement aléatoires.* Ainsi de nombreux économistes déduisent de la distribution normale des fluctuations des cours de bourse qu'il ne s'agit là que de fluctuations parfaitement aléatoires et qu'elles ne résultent pas de causes systématiques suivant un processus déterministe. La valeur de cette déduction est naturellement *contredite* par les propriétés que je viens de mentionner des fonctions presque périodiques, lorsqu'elles satisfont à des conditions très générales.

*Dans l'état actuel de la science l'existence du « Facteur* X *» n'est naturellement qu'une hypothèse,* mais c'est une hypothèse à laquelle ont été amenés depuis longtemps et plus ou moins explicitement, le plus souvent implicitement, bien des chercheurs. En ce qui me concerne, c'est une hypothèse qui n'a cessé de m'apparaître de plus en plus vraisemblable depuis quelque trente ans. *En tout cas, c'est là une hypothèse qu'il ne serait pas scientifique d'éliminer à partir de positions dogmatiques a priori* ([10]).

## 11. Hasard et déterminisme

On constate depuis un demi-siècle une tendance de toutes les sciences à abandonner les conceptions déterministes du XIX^e^ siècle, en remplaçant pour une large part le concept de causalité par le concept de hasard.

Cette crise du déterminisme se manifeste par exemple dans deux disciplines aussi éloignées que la physique avec la mécanique quantique et que l'économie avec la théorie spectrale des séries temporelles considérées comme ayant des spectres continus.

Certains auteurs ont même prétendu pouvoir ramener toute l'interprétation des phénomènes réels à la conception d'un univers entièrement aléatoire. Suivant cette tendance contemporaine le hasard ne serait plus, comme le concevaient les théoriciens et les physiciens au XIX^e^ siècle, « *une apparence due à notre incapacité d'analyser complètement des causes trop faibles, trop nombreuses ou trop complexes et d'en tenir compte correctement* », comme l'écrit Louis de Broglie. « *Le hasard résulterait au contraire d'une sorte de rupture de la causalité permettant à plusieurs éventualités de se produire indépendamment sans qu'il soit possible de leur attribuer davantage que des probabilités respectives. Ce serait là le hasard véritable, le hasard pur. Il ne serait pas dû à notre incapacité de prévoir, mais bien à la nature même des choses.* »

*La conception de Laplace suivant laquelle ce qu'il est convenu d'appeler le hasard recouvrirait simplement l'ordre déterministe de tout ce que nous ignorons, serait ainsi remplacée par l'intervention de la « contingence pure »*, pour reprendre ici encore une expression de Louis de Broglie.

J'éprouve à vrai dire une grande difficulté en ce qui me concerne à comprendre ce que peut représenter une telle *« contingence pure » dont le caractère m'apparaît comme d'essence métaphysique.* Cette conception ne résulte-t-elle pas des confusions si nombreuses que l'on constate dans la littérature sur la probabilité et le hasard, et que je viens de rappeler?

---

9. L'expression « *structure quasi périodique* » est utilisée ici pour désigner la structure d'une série temporelle empirique présentant toutes les apparences d'une fonction presque périodique.

10. Sur tous ces points, voir l'Appendice II, *La simulation du hasard par des fonctions presque périodiques*

Un tel sujet ne saurait naturellement être épuisé ici; je me limiterai seulement à quelques remarques.

Tout d'abord, quand un mathématicien aussi réputé qu'Émile Borel écrit que l'analyse de la distribution des nombres premiers *« confirme l'hypothèse du hasard »*, une telle affirmation est tout simplement absurde. Il ne peut s'agir là en effet que d'un phénomène *entièrement déterministe,* et on ne saurait parler ici de probabilités, mais de fréquences. *Que ce phénomène puisse imiter « le hasard » est indéniable, mais il n'en devient pas par là même aléatoire.* Cette simulation du hasard ne peut en réalité dériver d'une cause fortuite. En fait, elle doit et elle peut être expliquée.

En tout état de cause, cet exemple est riche d'enseignement. Nous avons ici en effet une distribution que l'on penserait pouvoir attribuer légitimement au hasard si l'on ne disposait d'aucune information sur son origine. *Cette simple constatation ne suggère-t elle pas que bien des phénomènes que nous attribuons au hasard pourraient bien en réalité être caractérisés par un déterminisme total?*

*Dans cette perspective la réalité concrète imiterait simplement le hasard.* Les modèles mathématiques fréquentiels ne seraient que des approximations, et la *« loi unique du hasard »* de Borel ([11]) se trouverait alors entièrement justifiée.

Il est certain que l'on constate des régularités tout à fait remarquables, *à vrai dire tout à fait extraordinaires*, dans les distributions des fréquences observées dans le monde réel, tout aussi remarquables que celles observées par exemple dans les mouvements planétaires que l'on considère comme totalement déterministes. Mais si l'on y réfléchit bien, ces régularités apparaissent certainement *plus surprenantes encore,* car si on peut comprendre que des lois précises déterminent les phénomènes dans le cadre d'une conception déterministe de l'univers, on comprend bien moins bien que le *« hasard »,* qui par définition échappe au déterminisme, puisse obéir à des lois parfaitement définies. Et, *dans la mesure même où elles sont constamment vérifiées, n'ont elles pas elle-même le caractère de lois déterministes, et ne faut-il pas en conclure qu'elles masquent un ordre caché?* Le fait est que les lois de ce qu'il est convenu d'appeler le *« hasard »* permettent de prédire les résultats d'épreuves répétées avec une certitude comparable avec celle qui correspond aux phénomènes physiques les plus déterministes. Mais à vrai dire, au regard des indications qui précèdent, il n'y a là rien qui ne puisse être expliqué ([12]).

Si l'on considère la qualité de tous les ajustements de fréquences suivant la loi normale réalisés par Karl Pearson dans ses études sur l'hérédité, il n'y a là rien encore qui ne puisse s'expliquer par l'action d'un grand nombre de causes dans un cadre déterministe, *dès lors que l'on énonce le théorème central limite en termes de fréquences et non plus en termes de probabilités.*

Si l'on considère de même la distribution des vitesses des atomes de Maxwell sur laquelle se fonde la théorie cinétique des gaz, la même observation peut être présentée. Il suffit de remplacer le mot *« probabilité »* par le mot *« fréquence »* pour que l'on puisse dégager les fondements d'une approche déterministe. *Pour expliquer l'ordre statistique que suggère la théorie cinétique des gaz, il n'est pas nécessaire de recourir à je ne sais quelle conception métaphysique du hasard;* car on peut le considérer comme l'aboutissement d'un processus impliquant une multitude de causes dont les effets simultanés aboutissent à substituer une régularité fréquentielle au chaos. Il n'en est pas autrement de la loi de Planck relative à la distribution des quanta de lumière, et d'une manière générale de toute la théorie des quanta.

Quant aux séries temporelles stationnaires, il résulte d'un théorème de Wold de 1938 qu'elles peuvent être considérées comme résultant de la sommation d'un processus complètement déterministe et d'un processus complètement non déterministe, en négligeant la partie singulière du spectre comme il paraît généralement possible de le faire. La composante du processus déterministe *dans le cas le plus général* est une fonction presque périodique dont certaines périodes sont incommensurables, et la com-

11 Voir ci dessus *Section 6*
12 Voir ci dessus *Section 7*

posante du processus non déterministe résulte d'une sommation mobile d'une même variable aléatoire non autocorrélée.

La tendance actuelle des théoriciens est de négliger la composante déterministe et de centrer leur analyse sur la composante non déterministe. Mais au regard de la simulation du hasard par des fonctions presque périodiques que je viens d'indiquer, ne peut-on pas mettre valablement en cause cette attitude? *Ne convient il pas de réviser cette conception et les postulats sur lesquels elle se fonde?* Le fait est que les manifestations apparentes du hasard et de la périodicité sont très analogues, que le hasard présente des apparences quasi-périodiques, et que la périodicité peut imiter le hasard.

La simulation du *« hasard »* par des fonctions presque périodiques n'est-elle pas susceptible de faire rentrer les phénomènes considérés comme aléatoires dans un cadre déterministe intelligible en accord profond avec ce que nous pouvons entrevoir actuellement de la structure vibratoire de l'univers.

Partout se révèle cette évidence que le déterminisme le plus absolu peut se manifester par des effets qui se distribuent suivant la loi normale et qui à première vue semblent devoir être attribués au *« hasard »*.

Lorsque l'on ne connaît pas effectivement le processus par lequel se manifestent les régularités constatées, on invoque pour les expliquer le *« hasard »,* mais qui ne voit que ce n'est là qu'un refuge commode qui permet d'éviter de faire face au problème réel, et souvent très difficile, de l'explication du soi disant *« hasard »* par le déterminisme.

En fait le rôle fondamental attribué au *« hasard »* par certaines théories contemporaines constitue en quelque sorte une conception *qui transcenderait l'intelligible.* En dernière analyse, elle se ramène purement et simplement à un refus d'explication. C'est là une position à la fois trop commode et trop simpliste.

Le *« hasard »* considéré comme seul processus du mécanisme ultime de l'univers est en réalité *un concept mythique,* réellement incompréhensible, dès lors qu'on le considérerait comme une cause première qu'il ne serait possible de dériver d'aucune autre, comme une loi dont dériverait toutes les autres lois. Personne ne précise en effet comment la nature pourrait se décider entre les différentes options possibles qui se présentent devant elle, *ou plutôt comment elle ne se déciderait pas puisque tout resterait indéterminé et relèverait d'un pur hasard.*

En appeler au *« hasard », concept qui n'est qu'une pure création de notre esprit,* pour expliquer le monde réel, ce n'est en réalité qu'une manifestation de je ne sais quelle démission de l'intelligence, un principe mythique comme celui auquel font appel les peuples primitifs lorsqu'ils expliquent tout par le surnaturel. Le *« hasard »* est une pseudo-explication, et les phénomènes que l'on considère généralement comme aléatoires ne sont que des effets et non des causes.

Les concepts de hasard et de probabilité ne sont que de pures créations de notre esprit que la nature ignore totalement. Dès lors, vouloir expliquer la réalité concrète par le hasard, c'est l'assujettir à un mécanisme qui en dernière analyse ne peut que se réduire à une conception anthropomorphiste du monde. C'est là substituer à la notion parfaitement claire de la causalité que nous suggère toute notre expérience directe et tangible du monde physique, un concept mythique qui en réalité n'existe que dans notre esprit.

## 12. Les conditions du progrès

Le concept de probabilité est parallèlement au concept d'utilité un des deux piliers sur lesquels repose toute la Théorie de la Décision, qu'on la considère sous son aspect de science fondamentale ou de science appliquée. Mais aucun progrès n'est concevable tant que ces deux concepts ne seront pas clarifiés.

Comment peut-on concevoir qu'il soit possible d'interpréter les données de l'observation; comment prédire l'avenir face à toutes les incertitudes qu'il comporte; comment utiliser nos connaissances pour prendre les décisions les meilleures si les fondements mêmes de la Théorie de la Décision ne sont pas dégagés *du flou dans lequel ils se trouvent actuellement plongés?*

En ce qui concerne le concept de probabilité, je viens d'essayer de dissiper les confusions qui résultent de l'utilisation d'un même mot *« probabilité »* pour désigner quatre concepts totalement différents :

— *la fréquence mathématique,* concept déterministe qui relève de l'analyse combinatoire;

— *la fréquence empirique* qui constitue une donnée de l'observation et qui peut être considérée comme une mesure approchée de la *fréquence intrinsèque* lorsque cette dernière ne peut être déterminée *a priori* par des conditions de symétrie;

— *la probabilité objective, estimation subjective de la fréquence intrinsèque* que les données de l'observation antérieure nous permettent d'inférer pour l'avenir;

— *le degré de vraisemblance* enfin, de caractère éminemment subjectif, dont relèvent en dernière analyse l'interprétation de nos modèles et leur extrapolation pour l'avenir.

En fait, toutes les discussions qui n'ont cessé de se constater sur le concept de probabilité dérivent essentiellement des efforts des uns et des autres pour réserver le vocable de probabilité à l'un seulement de ces quatre concepts en éliminant les autres, ce qui manifestement est impossible, car *à chacun d'entre eux correspond effectivement un aspect fondamental de la réalité tout à fait inéliminable et irréductible aux autres.*

Comme dans toutes les sciences, seule importe vraiment la réalité concrète qui en fait constitue la seule source de notre connaissance; et *ce qui est fondamentalement essentiel, c'est la liaison entre la théorie et l'observation, c'est l'élaboration et l'interprétation de nos modèles au regard des données empiriques.* C'est l'absence de cette liaison nécessaire entre la théorie et la réalité concrète qui constitue la faiblesse de toutes les théories des probabilités *puisque c'est précisément sur ce point essentiel qu'elles s'opposent.* Qui ne voit qu'*en dehors des données de l'observation* la loi mathématique dite des grands nombres ne pourrait rien expliquer et qu'elle ne pourrait permettre aucune prévision par elle-même quant à l'univers réel? Dans toutes les disciplines on ne peut qu'être frappé du si grand nombre de théoriciens qui veulent à toute force faire rentrer la réalité concrète dans le cadre de leurs modèles au lieu de les assujettir à cette réalité, et qui donnent par là même un poids tout à fait excessif à des conceptions *a priori* relativement aux données de l'observation. Il peut paraître étrange que je puisse insister sur un point aussi évident, mais il semble bien que trop de théoriciens ne tendent que trop à l'oublier.

Incontestablement, il convient aujourd'hui de mettre en garde contre certains dangers qui se manifestent dans la littérature contemporaine, tant en Europe occidentale qu'aux États-Unis. Les mathématiques ne sont pas et ne sauraient être un but en soi, sauf pour un petit groupe de mathématiciens professionnels. Les mathématiques sont un outil, un outil indispensable à vrai dire, mais seulement un outil. Il ne convient d'y recourir que dans la mesure, et dans la mesure seulement, où elles peuvent servir pour analyser le réel. *La confrontation des théories avec les données de l'observation constitue leur aboutissement nécessaire.* Il ne saurait y avoir de théorie valable sans vérification par l'expérience. Quelle que puisse en être la valeur rigoureuse ou la beauté esthétique, aucune théorie ne saurait être retenue dès lors qu'elle est infirmée par les données de l'expérience. *C'est là la règle d'or et la condition même de toute science.*

Nous ne tendons que trop à oublier les leçons des grands mathématiciens du passé, des Newton, des Bernoulli, des Euler, des Lagrange, des Laplace, des Gauss, des Poincaré, pour lesquels l'application de leurs théories mathématiques aux données de l'observation constituait *une préoccupation majeure.* Avec un esprit critique impitoyable, Keynes en son temps dénonçait dans son remarquable

« *Treatise on Probability* » cette espèce de « *mathematical charlatanry* » qui s'oppose au progrès de la science. Mais que ne pourrait-il donc dire aujourd'hui de certains travaux?

*C'est précisément l'abus déraisonnable de l'abstraction dans l'enseignement des mathématiques qui aujourd'hui compromet à terme le développement de la pensée scientifique.* Cet enseignement mathématique est totalement détaché du réel et il se désintéresse des applications, qu'il s'agisse des mathématiques appliquées ou des calculs numériques. Il détourne de l'utilisation des mathématiques des esprits foncièrement intelligents, et il aboutit à réaliser une sélection à rebours quant à la formation de tous ceux qui auront à utiliser les mathématiques pour faire progresser les sciences de la nature, les sciences de la vie et les sciences de l'homme.

Que penser par exemple d'un enseignement du calcul des probabilités qui se limite au pur concept de probabilité mathématique et à sa théorie axiomatique, où le principe des probabilités composées est posé comme axiome, sans pratiquement aucune référence à la fréquence empirique, seule donnée de l'observation? Qui ne voit cependant que tous les calculs de probabilité se réduisent en fait à des calculs d'analyse combinatoire, et que le hasard, donnée essentielle inséparable de nos jugements de probabilité, en est totalement exclu. *Tant qu'ils n'auront pas procédé eux-mêmes à des tirages de pile ou face ou à des tirages dans une urne, comment les étudiants pourraient-ils donc apercevoir le problème fondamental que pose l'extraordinaire adéquation des modèles mathématiques fréquentiels, d'un caractère totalement déterministe, pour représenter les distributions empiriques correspondant aux données de l'observation, dont une opinion commune considère qu'elles sont marquées par le « hasard ».*

En réalité, le seul danger réel pour le progrès de nos connaissances, c'est le dogmatisme, c'est l'acceptation quelles qu'elles soient de conceptions héritées du passé et considérées comme définitivement établies. On ne saurait trop méditer ici cette boutade de Pareto : « *L'histoire de la science se réduit à l'histoire des erreurs des hommes compétents* », et cette parole d'Ernst Mach : « *Nous devons toujours adapter la pensée aux faits, et adapter les pensées entre elles* .»

Si je puis conclure cette analyse, je dirai simplement que j'ai soulevé peut-être beaucoup plus de questions que je n'en ai résolues. Mais peut-être cette présentation et cette interprétation d'ensemble sont-elles susceptibles de faire réfléchir à nouveau sur des questions qui n'ont cessé d'être débattues. Et après tout c'était là mon seul objet.

## RÉFÉRENCES

Les références appropriées à la littérature sont *trop nombreuses* (cinq cents environ) pour être présentées ici. Elles seront données dans la *Bibliographie* de mon prochain ouvrage : *"Frequency, Probability and Chance"* (voir la note 4 ci-dessus).

Cette *Bibliographie* est répartie en quatorze sections *correspondant aux différents sujets abordés dans le présent mémoire.* Ces sections sont les suivantes : 1. *Sur le concept de probabilité et les théories des probabilités;* 2. *Théories classiques, 1650 1914;* 3. *Théories fréquentielles;* 4. *Théories subjectivistes;* 5. *Théories axiomatiques et Théorème central limite;* 6. *Analyse statistique;* 7. *Analyse des séries temporelles;* 8. *Applications du calcul des probabilités;* 9. *Probabilités, hasard et théories physiques;* 10. *Fonctions périodiques et presque périodiques;* 11. *Périodicité et hasard;* 12. *Simulation du hasard et tests de normalité et d'arégularité;* 13. *Structures quasi-périodiques dans les phénomènes physiques;* 14. *Structures quasi-périodiques dans les phénomènes économiques et sociaux.*

# APPENDICE I

# FRÉQUENCES EMPIRIQUES ET FRÉQUENCES MATHÉMATIQUES ILLUSTRATION

*Il y a une différence profonde de nature entre les processus empiriques aléatoires et les modèles fréquentiels déterministes qui leur correspondent. Les calculs qui sont effectivement présentés dans les traités sur la « Théorie des Probabilités » ne font intervenir aucun aléa, aucun hasard, aucune probabilité, ni aucun concept de cette sorte. Ils reposent uniquement sur des calculs de fréquences dans des situations où tous les cas possibles sont supposés, au moins implicitement, simultanément réalisés; ils sont ainsi totalement déterministes; et ils ne correspondent en aucune façon à la sémantique utilisée, ni a fortiori à l'interprétation qui généralement en résulte presque inévitablement.*

*There is a fundamental difference of nature between the random empirical processes and the corresponding deterministic mathematical models. The calculations which are effectively presented in the books on the "Probability Theory" do not take into account any uncertainty, chance, or probability, or any related concept; they are based only on the calculation of mathematical frequencies in situations in which all the possible cases are supposed, at least implicitly, to occur simultaneously; and they do not in any way correspond to the semantics used, nor a fortiori to the interpretation which in general inevitably follows.*

> Le fait que les abstractions mathématiques sont utiles et même nécessaires pour le développement des autres sciences ne doit pas avoir la conséquence absurde qui consisterait à traiter d'une manière purement abstraite les questions essentiellement concrètes qui se posent effectivement.
>
> Émile BOREL (1)

> La théorie axiomatique du Calcul des Probabilités... n'a en elle même rien qui évoque les phénomènes naturels. Les mots probabilité, événement fortuit, épreuve, ont un sens plus ou moins net, mais ils en ont un dans la langue vulgaire. Dans la théorie axiomatique ils n'ont aucun sens concret; on pourrait, par exemple, tout aussi bien remplacer le mot probabilité par n'importe quel autre (ayant un sens numérique) pourvu qu'on s'y tienne. Ce serait même plus prudent de le faire, au moins à titre d'exercice mental, pour comprendre par exemple, la portée exacte du théorème de Bernoulli... (Ce faisant) nous ne risquerions plus de nous laisser prendre à la magie des mots.
>
> Maurice FRÉCHET (2)

> Notre langage n'est pétri que d'idées préconçues et ne peut l'être d'autre chose. Seulement, ce sont des idées préconçues inconscientes, mille fois plus dangereuses que les autres...
>
> Ce n'est pas une chose indifférente qu'une langue bien faite.
>
> Henri POINCARÉ (3)

L'objet de cet Appendice est d'illustrer les propositions relatives au concept de probabilité présentées dans l'exposé qui précède, tout particulièrement quant à la *différence profonde de nature* entre les concepts de fréquence empirique et de fréquence mathématique (4).

---

1. Émile BOREL, 1939, *Valeur Pratique et Philosophie des Probabilités*
2. Maurice FRÉCHET, 1946, *Les Définitions Courantes de la Probabilité*
3. Henri POINCARÉ, 1906, *La Science et l'Hypothèse,* et 1913, *La Valeur de la Science*
4. Voir *Sections 1 6* ci dessus

Il ne s'agit pas de présenter de nouveaux calculs, mais simplement de montrer que les calculs qui sont *effectivement* présentés dans les traités sur le « *Calcul des Probabilités* » ne font intervenir aucun aléa, aucun hasard, aucune probabilité, ni aucun concept de cette sorte; qu'ils reposent *uniquement* sur des calculs de fréquences mathématiques dans des situations *où tous les cas possibles sont supposés se trouver simultanément réalisés;* et qu'ils ne correspondent en aucune façon à la sémantique utilisée, ni *a fortiori* à l'interprétation qui généralement en résulte presque inévitablement ([5]).

Pour illustrer cette proposition tout en simplifiant l'exposé autant qu'il est possible, je me bornerai à commenter les propositions fondamentales du calcul dit des probabilités dans le cas correspondant à la distribution binomiale, les conclusions de ce commentaire restant valables dans les cas les plus complexes ([6]).

## A. ILLUSTRATION DU CARACTÈRE DÉTERMINISTE DES CALCULS DE LA « THÉORIE DES PROBABILITÉS »

### A.1. *Processus aléatoire concret du tirage dans une urne — Fréquences empiriques*

Pour illustrer le caractère déterministe des calculs de la « *Théorie des Probabilités* », considérons le cas de tirages successifs dans une urne avec remplacement.

#### A.1.1. *Cas d'une fréquence intrinsèque égale à 1/2*

On considère une urne contenant un nombre *égal* de boules blanches et noires. On procède à une série de $n$ tirages avec remplacement. La proportion des boules blanches dans l'ensemble des boules est

$$f = 1/2 \qquad (1)$$

Pour le processus considéré la *fréquence intrinsèque* ([7]) est égale à $f$. Avant chaque tirage, il y a *une égale possibilité a priori de tirer une boule blanche ou une boule noire.* Un tel processus peut être considéré comme caractérisant « *le hasard pur* ».

#### A.1.2. *Représentation par une trajectoire d'une série de* n *tirages avec remplacement*

On considère un joueur qui gagne + 1 si on tire une boule blanche et zéro si on tire une boule noire ([8]). Pour la série considérée de $n$ épreuves, on porte le nombre de tirages en abscisse et la quantité

$$u_n = 2X_n - n \qquad (2)$$

avec

$$X_n = x_1 + \ldots + x_k + \ldots + x_n \qquad (3)$$

en ordonnée. On prend $x_k = +1$ ou 0 suivant que la boule tirée est blanche ou noire. Si au cours des $n$ tirages on a tiré $m$ boules blanches on a

$$X_n = m \qquad (4)$$

Sur la *figure 1* les points $M_1, M_2, \ldots, M_n$ dont les ordonnées sont $u_1, u_2, \ldots, u_n$ représentent la trajectoire $T_i$ correspondant à une série de $n$ tirages. La fréquence de sortie des $m$ boules blanches sur cette trajectoire est désignée par $f_n$.

Avant de procéder à la série considérée de $n$ tirages il y avait $2^n$ trajectoires *également possibles a priori.* Lorsque les $n$ tirages ont été effectués *une seule* a été réalisée qui ainsi a été privilégiée.

Si maintenant on effectue $s$ séries $S_i$ de $n$ tirages, on obtiendra successivement $s$ trajectoires que l'on pourra faire figurer sur un même diagramme illustré par la *figure 1**, où, pour simplifier, deux trajectoires seulement $T_i$ et $T_j$ sont représentées.

---

5 Comme les théories physiques contemporaines en constituent une excellente illustration (voir *Section 11* ci dessus)

6 Le texte qui suit est extrait d'une étude d'ensemble beaucoup plus étendue « *La Théorie Mathématique des Fréquences et la Réalité* » (ALLAIS, 1982) Cette étude sera intégrée dans l'ouvrage « *Frequency, Probability and Chance* » (note 4 ci dessus p. 72)

7 Voir *Section 3* ci dessus

8 Harald CRAMER, 1946, *Mathematical Methods of Statistics,* § 16 1 et 16 2, p 192 194

PROCESSUS ALÉATOIRE CONCRET

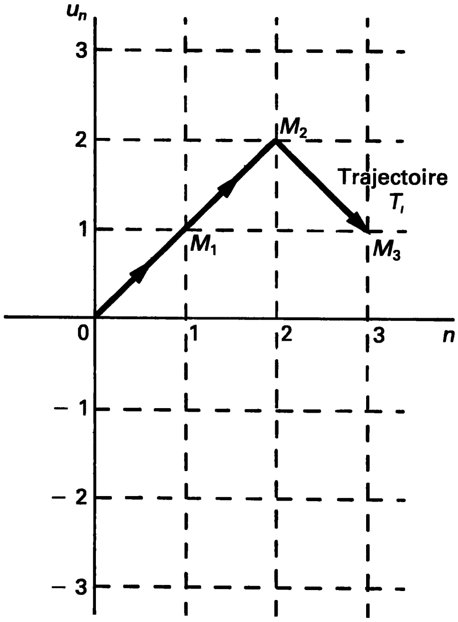


FIGURE 1

*Représentation d'une trajectoire* $T_i$
*correspondant à*
*une série de* n *tirages*

Cas f = 1/2

$X_n = m \qquad m \leq n$

$u_n = 2X_n - n = 2m - n$

$f_n = \frac{m}{n}$

$f_n - f = \frac{1}{2}\frac{u_n}{n}$

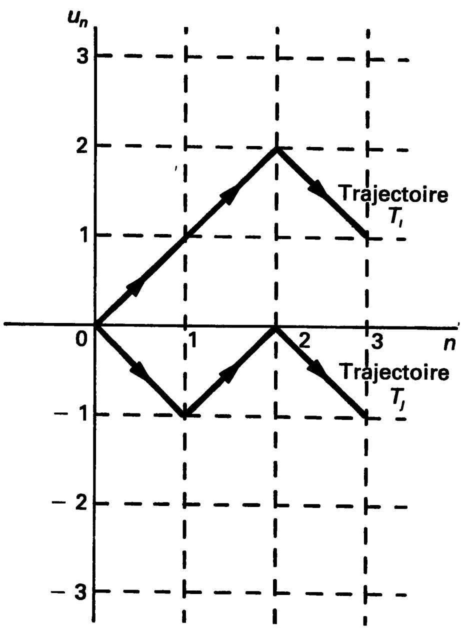


FIGURE 1*

*Représentation*
*du faisceau des trajectoires*
*correspondant à* s *séries* $S_i$
*de* n *tirages*

Cas f = 1/2

$f_{i,n} = \frac{m_i}{n}$

$f_{j,n} = \frac{m_j}{n}$

## MODÈLE MATHÉMATIQUE FRÉQUENTIEL

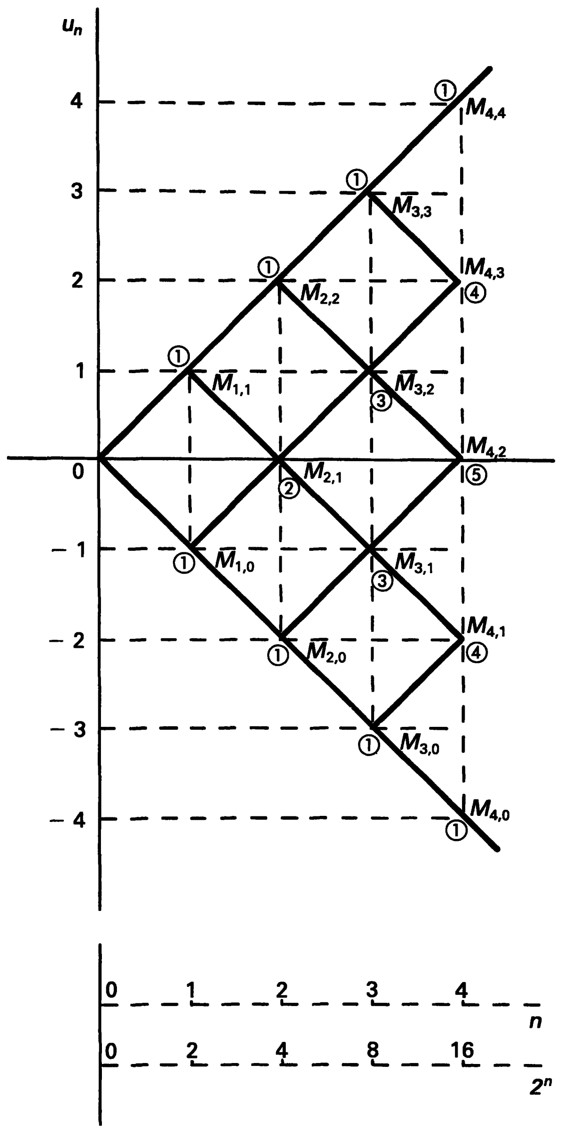


FIGURE 2

*Représentation*
*de l'ensemble des trajectoires*
*fréquentielles*

Cas f = 1/2

$X_n = m \qquad m \leqslant n$

$u_n = 2X_n = 2\,m - n$

$M_{n,m}$ = point correspondant à la présence de $m$ boules blanches sur la trajectoire considérée

$C_n^m = \dfrac{n!}{m!\,\overline{n-m}!}$
= nombre de trajectoires, aboutissant au point $M_{n,m}$ (nombre cerclé)

$$\sum_{m=0}^{m=n} C_n^m = (1+1)^n = 2^n$$

$$f_{n,m} = \frac{C_n^m}{2^n}$$

### A.2. *Modèle mathématique fréquentiel — Fréquences mathématiques*

Considérons maintenant le modèle mathématique fréquentiel correspondant au processus aléatoire du § A.1. Il est représenté par la *figure 2* où figurent *toutes* les trajectoires possibles, toutes étant *également possibles.*

#### A.2.1. *Fréquence des trajectoires correspondant à la présence de* m *boules blanches sur une trajectoire*

Il y a en tout $2^n$ trajectoires également possibles, et parmi elles, il y a $C_n^m$ trajectoires qui aboutissent au point $M_{n,m}$ correspondant à la présence de $m$ boules blanches sur une même trajectoire (fig. 2). La fréquence correspondante est

$$f_{n,m} = \frac{C_n^m}{2^n} = \frac{1}{2^n} \frac{n!}{m!\,\overline{n-m}!} \tag{5}$$

Naturellement, pour chaque trajectoire on a

$$u_n = 2X_n - n \tag{6}$$

avec

$$X_n = x_1 + \dots + x_k + \dots + x_n \tag{7}$$

où $x_k = +1$ ou zéro suivant qu'il s'agit d'une boule blanche ou d'une boule noire.

Le calcul effectué revient à considérer que *toutes les boules intervenant de manière symétrique,* chacune des $2^n$ trajectoires est *également possible* et à les considérer simultanément; ce qui revient à supposer qu'elles sont toutes *simultanément réalisées.*

On voit ainsi que *ce que le calcul des probabilités appelle probabilité* $p_{n,m}$ *de l'obtention de* m *boules blanches en* n *tirages n'est autre que la fréquence* $f_{n,m}$ *des trajectoires correspondant à la présence de* m *boules blanches, fréquence qui est donnée par l'expression (5) correspondant au développement binomial* $(1+1)^n$.

*On vérifie ainsi sur ce cas particulier que toute la théorie dite des « probabilités » repose purement et simplement sur des calculs déterministes d'analyse combinatoire.* En fait, alors que le processus concret des urnes privilégie *une seule* trajectoire dans une série $S_t$ de tirages, le modèle fréquentiel n'en privilégie *aucune* et considère *simultanément toutes* les trajectoires également possibles.

Il est *essentiel* de souligner que si la fréquence des boules blanches le long de chaque trajectoire varie d'une trajectoire à l'autre, *sa moyenne pour l'ensemble des trajectoires du modèle mathématique fréquentiel est égale à la fréquence intrinsèque* f correspondant au processus aléatoire du § A.1.

Ce modèle peut naturellement se généraliser à des cas de plus en plus complexes.

#### A.2.2. *Cas binomial dans le cas général*

Des représentations diagrammatiques analogues aux représentations précédentes peuvent être utilisées lorsque la fréquence intrinsèque $f$ est différente de 1/2 tout en restant égale au rapport de deux nombres entiers. On a alors

$$f_{n,m} = \frac{n!}{m!\,\overline{n-m}!} \frac{K_1^m K_2^{n-m}}{K^n} \tag{8}$$

où $K_1$ et $K_2$ représentent respectivement les nombres de boules blanches et noires de l'urne considérée avec

$$K = K_1 + K_2 \tag{9}$$

A.2.3. *Cas multinomial*

Dans le cas d'une urne contenant $K_1, \ldots, K_i, \ldots, K_h$ boules de types $1, \ldots, i, \ldots, h$ différents avec

$$K_1 + \ldots + K_i + \ldots + K_h = K \tag{10}$$

il y a $K^n$ trajectoires, et toute la théorie du calcul des « *probabilités* » se fonde de même sur l'analyse combinatoire des propriétés du développement multinomial

$$[K_1 + \ldots + K_i + \ldots + K_h]^n = \sum \frac{n!}{m_1! \ldots m_i! \ldots m_h!} \; K_1^{m_1} \ldots K_i^{m_i} \ldots K_h^{m_h} = K^n \tag{11}$$

avec

$$m_1 + \ldots + m_i + \ldots + m_h = n \tag{12}$$

La fréquence correspondant à la présence de $m_1, \ldots, m_i, \ldots, m_h$ boules des types $1, \ldots, i, \ldots, h$ est

$$f_n(m_1, \ldots, m_i, \ldots, m_h) = \frac{n!}{m_1! \ldots m_i! \ldots m_h!} \; k_1^{m_1} \ldots k_i^{m_i} \ldots k_h^{m_h} \tag{13}$$

les $k_i$ représentant les fréquences intrinsèques

$$k_i = K_i/K \tag{13'}$$

On vérifie immédiatement que dans ce cas encore ce que l'on désigne communément par la « *probabilité* » du tirage de $m_1, \ldots, m_i, \ldots, m_h$ boules de type $1, \ldots, i, \ldots, h$ n'est autre que la *fréquence* des trajectoires correspondantes suivant le développement multinomial. Ici encore il convient de souligner que si les fréquences des différentes sortes de boules varient d'une trajectoire à l'autre, leurs valeurs *moyennes pour l'ensemble des trajectoires* sont exactement égales aux fréquences intrinsèques $k_1, \ldots, k_i, \ldots, k_h$.

On constate *qu'aucune espèce de hasard n'intervient et que tous les cas possibles sont simultanément réalisés. Il s'agit d'un modèle totalement déterministe.*

Il convient de souligner encore une fois que dans le cas de tirages concrets dans une urne, *une seule* boule sort à chaque tirage. Il y a donc *une différence de nature tout à fait fondamentale* entre le processus concret du tirage *successif* de boules dans une urne et le modèle fréquentiel correspondant pour lequel on considère *en même temps toutes* les trajectoires. *Dans ce modèle aucune trajectoire n'est privilégiée; toutes les trajectoires sont considérées simultanément.*

A.2.4. *Cas des probabilités continues*

Dans le cas des probabilités continues le calcul des « *probabilités* » est plus complexe, mais il se ramène toujours à un calcul de fréquences dans des modèles totalement déterministes. Aux nombres des trajectoires possibles satisfaisant à certaines caractéristiques correspondent les mesures de certains sous-ensembles. Aux trajectoires *également possibles* correspondent des sous-ensembles *d'égale mesure.*

Rien d'essentiel ne saurait être modifié à ce qui vient d'être indiqué : *tous les calculs de « probabilités » ne sont en réalité que des calculs de fréquences mathématiques excluant tout hasard dans des modèles déterministes où loin de s'exclure les unes des autres toutes les éventualités sont considérées, au moins implicitement, comme simultanément réalisées.* Leur nature relève fondamentalement de l'analyse combinatoire.

A.2.5. *Théorèmes des fréquences totales et des fréquences composées*

Dans le cas multinomial, comme dans le cas binomial, les propositions que l'on appelle communément *principe des probabilités totales et principe des probabilités composées* résultent en fait de deux théorèmes qui se déduisent *immédiatement* du dénombrement des trajectoires, et qu'il convient d'appeler : *théorème des fréquences totales et théorème des fréquences composées* (9).

### A.3. *Signification des calculs de la théorie dite des probabilités*

Ces quelques indications permettent de vérifier que *ce que l'on convient d'appeler le « hasard » n'intervient en aucune façon dans la théorie dite des probabilités dont tous les calculs reposent fondamentalement sur des modèles totalement déterministes.* Les mathématiques se développent uniquement dans le domaine de la certitude.

Tous les calculs de *« probabilités »* reviennent à compter, par application de l'analyse combinatoire, les nombres de configuration offrant certains caractères. *Ce sont en réalité des calculs déterministes de fréquences, et rien de plus,* dans des situations où *toutes* les éventualités se trouvent *simultanément réalisées* ainsi qu'il résulte de la représentation diagrammatique de la *figure 2* ci-dessus.

Par eux-mêmes ces calculs *ne peuvent rien nous apprendre sur la réalité concrète. Leur applicabilité à cette réalité ne peut dériver que d'un postulat* (10).

### A.4. *Processus aléatoires et modèles déterministes fréquentiels*

La *différence profonde de nature* entre les *processus aléatoires* et les *modèles déterministes fréquentiels* qui leur correspondent est illustrée par les *figures 1 et 1** qui représentent le processus aléatoire du cas considéré et la *figure 2* qui représente le modèle déterministe fréquentiel qui lui est associé.

Pour éviter toute confusion, il est préférable de désigner par *variable aléatoire* une variable qui correspond à un processus de tirages *successifs*, tel que celui qui est examiné dans le § A.1 ci dessus auquel correspond la variable $x_k$ de ce paragraphe, et par *variable fréquentielle* une variable qui correspond à un modèle de réalisation *simultanée* de toutes les trajectoires possibles, tel que celui qui est examiné dans § A.2 ci-dessus auquel correspond la variable $x_k$ de ce paragraphe.

*Les variables aléatoires correspondent aux processus aléatoires où le hasard intervient effectivement, et les variables fréquentielles correspondent aux modèles fréquentiels déterministes dont il est totalement exclu. Les premières correspondent à la réalité aléatoire concrète et les secondes aux modèles fréquentiels déterministes de la théorie.*

## B. Loi empirique et loi mathématique des grands nombres

### B.1. *Loi empirique des grands nombres*

Si on procède à des tirages successifs avec remplacement dans une urne contenant des boules blanches et noires (§ A.1 ci-dessus), on constate des régularités quant aux fréquences observées. L'analyse de ces régularités conduit *par induction* à la loi *empirique des grands nombres* qui peut s'énoncer comme il suit :

> *Si on effectue* s *séries* $S_i$ *de* n *tirages* ($1 \leqslant i \leqslant s$) *à chacune desquelles correspond une fréquence* $f_{i,n}$ *de tirages d'une boule blanche, il existe un nombre* f, *qu'on peut appeler la fréquence intrinsèque*

---

9. Les théories axiomatiques contemporaines admettent comme postulat le principe des *« probabilités composées »*. Cependant ce principe est loin d'être évident. Il convient de souligner que dans les théories classiques ce principe résulte d'un théorème.

10. Voir ci-dessous § B.3 et ci-dessus *Section 3.*

*du processus considéré, tel que la fréquence* $F_{s,n}$ *des séries* $S_i$ *pour lesquelles la valeur absolue* $|f_{i,n} - f|$ *excède une valeur déterminée* $\varepsilon$ *devient de plus en plus petite à mesure que* s *et* n *deviennent plus grands.*

On peut ainsi écrire

$$\begin{cases} F_{s,n} = \text{Fréquence}\,\{|f_{i,n} - f| \geqslant \varepsilon\} \leqslant \delta \quad \text{pour} \quad s \geqslant s_0,\ n \geqslant n_0 \\ s_0 = s_0(\varepsilon, \delta) \qquad n_0 = n_0(\varepsilon, \delta) \end{cases} \tag{14}$$

*L'expérience montre que* $\varepsilon$ *et* $\delta$ *ont des valeurs très petites dès lors que* $n_0$ *et* $s_0$ *sont suffisamment grands.*

La fréquence $F_{s,n}$ est égale au rapport $r/s$ du nombre $r$ de séries $S_i$ pour lesquelles $|f_{i,n} - f| \geqslant \varepsilon$, au nombre total $s$ des séries.

*Par induction également,* on peut considérer que la fréquence $F_{s,n}$ tendrait vers zéro si $s$ et $n$ augmentaient indéfiniment, autrement dit que l'on aurait

$$\underset{s \to \infty,\ n \to \infty}{\text{limite}} \ F_{s,n} = 0 \tag{15}$$

et cela quelque petit que soit $\varepsilon$ ([11]).

B.2. *Loi mathématique des grands nombres de Bernoulli*

Dans le cas du modèle binomial correspondant à des tirages dans une urne contenant deux sortes de boules et pour lequel la fréquence intrinsèque est $f$ (§ A.2. ci-dessus), la loi des grands nombres de Bernoulli s'exprime pour $n$ tirages par la condition.

$$F_n = \text{Fréquence}\,\{|f_n - f| \geqslant \varepsilon\} \leqslant \frac{f(1-f)}{n\varepsilon^2} \tag{16}$$

où $F_n$ représente le rapport $r^*/K^n$ du nombre $r^*$ des trajectoires pour lesquelles $|f_n - f| \geqslant \varepsilon$ au nombre total des trajectoires([12]) ([13]).

On a naturellement

$$\lim_{n \to \infty} F_n = 0 \tag{17}$$

Telle qu'elle est énoncée habituellement la *loi des grands nombres de Bernoulli* s'exprime par la relation (16) où l'on remplace les fréquences $f$ et $F_n$ par les *« probabilités » p* et $P_n$, mais ces dénominations sont *parfaitement injustifiées,* car le calcul qui conduit à la relation (16) est un calcul déterministe, totalement exempt de tout concept de probabilité. *Il ne s'agit dans ce calcul que de fréquences et non de probabilités.*

B.3. *Correspondance de la loi empirique des grands nombres et de la loi mathématique des grands nombres de Bernoulli*

Le rapprochement des deux lois empirique et mathématique des grands nombres appelle un certain nombre d'observations tout à fait essentielles :

11. Les relations (14) et (15) n'ont jamais été indiquées dans la littérature, à ma connaissance tout au moins, comme *lois empiriques des grands nombres* Les auteurs se bornent généralement à constater d'une manière très vague que les fréquences *« se massent »* autour d'une même valeur qui est d'autant mieux déterminée que les groupes contiennent plus d'épreuves.

12 CRAMER, 1946, id , § 16 3, p 196 198, relation 16 3 1.

13. La relation (16) est la contrepartie théorique de la loi empirique des grands nombres représentée par la relation (14). Le paramètre $s$ de cette relation ne figure plus dans la relation (16) pour cette simple raison que la quantité $F_n$ y correspond à la fréquence de l'inégalité $|f_n - f| \geqslant \varepsilon$ pour une valeur de $s$ qui est parfaitement déterminée en fonction de $n$, savoir pour $s = K^n$ trajectoires, où $K$ représente le nombre des cas également possibles pour chaque tirage De même, la relation (17) est la contrepartie théorique de la relation (15).

### B.3.1. *La loi des grands nombres de Bernoulli et la réalité concrète*

Tout d'abord, et contrairement à ce que semblent suggérer la plupart des auteurs, *la loi des grands nombres de Bernoulli ne peut absolument rien nous apprendre sur la réalité observée* ([14]), et en particulier sur une suite concrète de tirages dans une urne. Elle résulte d'un simple dénombrement *déterministe* de configurations correspondant au développement binomial $(K_1 + K_2)^n$, d'où tout « *hasard* » est totalement exclu.

### B.3.2. *La loi mathématique des grands nombres, modèle représentatif de la loi empirique des grands nombres*

Le rapprochement des relations (14) et (16) ci-dessus montre que *tout se passe comme si* le modèle déterministe qui permet de démontrer la relation (16) était effectivement susceptible de représenter la réalité concrète représentée par la relation (14).

### B.3.3. *Le postulat de représentabilité de la réalité concrète par le modèle déterministe fréquentiel*

Cette constatation permet une nouvelle induction, savoir que *toutes* les propriétés des distributions spatiales ou temporelles observées peuvent être représentées correctement par le modèle *déterministe* fréquentiel correspondant au développement de l'expression multinomiale $(K_1 + \ldots + K_i + \ldots + K_h)^n$ et à ses diverses généralisations dans le cas continu. *En fait, cette induction se trouve remarquablement vérifiée par les données empiriques, et c'est là une circonstance dont presque personne ne paraît réellement s'étonner alors qu'elle est réellement extraordinaire.*

On est ainsi amené à admettre un postulat que l'on peut désigner par (*P*) permettant le passage de la théorie à l'expérience, et qui exprime que *la théorie déterministe fréquentielle représente valablement la réalité concrète.* C'est ce *postulat de « représentabilité », dicté par l'expérience mais théoriquement indémontrable,* qu'il convient d'expliciter et autant que possible de justifier.

### B.3.4. *L'axiome d'égale possibilité en moyenne*

En fait, si on y réfléchit, le Postulat (*P*) qu'aucune intuition ne peut justifier *a priori* peut être considéré comme résultant lui-même d'un axiome, que l'on peut désigner par (*A*), « *l'Axiome d'égale possibilité en moyenne* ».

Dans le cas du tirage dans une urne par exemple cet axiome correspond à notre intuition puisque, *avant chaque tirage,* le tirage de chaque boule paraît *également possible,* mais *il est également indémontrable. Il peut simplement être considéré comme une idéalisation de l'expérience* ([15]).

Il résulte de là que le Postulat (*P*) et l'Axiome (*A*) sont en fait équivalents. L'un résulte de l'autre. *Indémontrables l'un et l'autre,* ils sont *indispensables* pour permettre l'application aux données de l'observation du modèle déterministe fréquentiel général et de tous les modèles particuliers que l'on peut en déduire.

---

14 La méconnaissance de cette proposition conduit à des confusions regrettables dans toute la littérature, même de la part de probabilistes *tout à fait éminents* Trop souvent leurs commentaires suggèrent *que grâce au théorème de Bernoulli, la théorie mathématique des probabilités a pu à elle seule prouver* que la convergence de la *fréquence empirique* vers la « *probabilité* » *mathématique* (c'est à dire la *fréquence mathématique intrinsèque*) est pratiquement certaine

15. Voir *Section 6* ci dessus. On doit distinguer soigneusement « *l'égale possibilité en moyenne* » de « *l'égale possibilité a priori* » du § A. 1 et de « *l'égale possibilité* » du § A. 2 (voir *Section 8* ci dessus) Naturellement l'égalité des fréquences intrinsèques du processus aléatoire du § A.1 et de son modèle déterministe représentatif du § A. 2 résulte du postulat (P) de représentabilité. Pour la clarté il peut être utile, au moins dans certains cas, de les désigner respectivement par les expressions · *fréquence empirique intrinsèque* et *fréquence mathématique intrinsèque*

## C. Théorème central limite pour les distributions de fréquence

### C.1. *Le théorème central limite, propriété asymptotique d'un modèle fréquentiel déterministe*

A titre d'illustration je me propose de montrer que le *théorème central limite* de la littérature, suivant lequel sous des conditions très générales, la somme de $n$ variables « *aléatoires* » indépendantes se distribue asymptotiquement suivant la loi normale, correspond simplement à une propriété asymptotique d'un modèle déterministe fréquentiel *d'où tout hasard est exclu;* que cette propriété asymptotique repose sur un simple décompte de configurations fondé sur l'analyse combinatoire; et que dans ce calcul tous les cas possibles sont considérés, *au moins implicitement,* comme *simultanément* réalisés.

### C.2. *La démonstration du théorème central limite dans le cas particulier considéré par de Moivre*

Pour se rendre compte de la nature effective des démonstrations du théorème central limite, et pour simplifier l'exposé, le mieux est d'examiner quelle est la signification exacte des calculs effectués dans les démonstrations de ce théorème dans le cas relativement simple du modèle mathématique fréquentiel du §A.2.2 ci-dessus. C'est le cas considéré par de Moivre ([16]).

Considérons ainsi le modèle fréquentiel du § A.2.2. ci-dessus correspondant à une urne contenant

$$K = K_1 + K_2 \tag{18}$$

boules dont $K_1$ blanches et $K_2$ noires.

Au $k^{ième}$ *point de chacune des* $l = K^n$ trajectoires $T_i$ du graphique représentatif correspondant au graphique de la figure 2 du § A.2.1. considérons la variable

$$x_k = \begin{cases} 1 \text{ s'il s'agit d'une boule blanche} \\ 0 \text{ s'il s'agit d'une boule noire} \end{cases} \tag{19}$$

Posons

$$K_1/K = f \qquad K_2/K = g = 1 - f \tag{20}$$

Pour l'ensemble des $nK^n$ points du diagramme on a pour la moyenne et la variance de $x_k$

$$\text{moyenne } (x_k) = 1 \,.\, \text{f} + 0\,(1 - f) = f \tag{21}$$

$$\text{variance } (x_k) = (1 - f)^2 f + (0 - f)^2\,(1 - f) = fg \tag{22}$$

Considérons pour chaque trajectoire $T_i$ la somme

$$X_n = x_1 + \dots + x_k + \dots + x_n \tag{23}$$

considérée dans le § A.2.1. Si on a $m$ boules blanches sur cette trajectoire on a $X_n = m$. D'après (21) et (22) on a

$$\text{moyenne } (X_n) = nf \tag{24}$$

$$\text{variance } (X_n) = \sigma^2 = nfg \tag{25}$$

Dans l'ensemble des $K^n$ trajectoires, la fréquence des trajectoires pour lesquelles on a $m$ boules blanches est

$$f_m = \frac{n!}{m!\,\overline{n-m}!}\, f^m\, g^{n-m} \tag{26}$$

Posons

$$\lambda = \frac{m - nf}{\sqrt{nfg}} \tag{27}$$

16. Cramer, 1946, id., § 16 4, p. 198-203

A partir des expressions (26) et (27), on démontre facilement par application du théorème de Stirling que

$$f_m = \frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma} e^{-\frac{\lambda^2}{2}} + 0\left(\frac{1}{n}\right) \tag{28}$$

la quantité 0 $(1/n)$ étant indépendante de $\lambda$, et tendant vers zéro lorsque $n$ augmente indéfiniment ([17]).

Il en résulte que

$$\lim_{n\to\infty} \text{Fréquence } (\lambda_1 \leqslant \lambda \leqslant \lambda_2) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{\lambda_1}^{\lambda_2} e^{-\frac{u^2}{2}} du \tag{29}$$

On voit ainsi que lorsque $n$ augmente indéfiniment les $l = K^n$ sommes $X_n$ des $n$ variables $x_k$ relatives à chaque trajectoire se distribuent suivant la loi normale. Ce n'est là qu'une *illustration particulière* dans un cas très simple du *théorème central limite* suivant lequel sous des conditions très générales la distribution de la somme de $n$ variables « *aléatoires* » est asymptotiquement normale.

En réalité, on voit que dans le cas considéré le théorème central limite n'est autre qu'*une propriété asymptotique du développement binomial* $(K_1 + K_2)^n$ correspondant à la fréquence des trajectoires satisfaisant à la condition

$$\lambda_1 \leqslant \lambda \leqslant \lambda_2 \tag{30}$$

Le décompte des trajectoires satisfaisant à une telle condition suppose que *toutes les trajectoires également possibles sont effectivement réalisées et qu'elles le sont simultanément. Il n'y a rien dans cette démonstration qui puisse être qualifié d'aléatoire et le hasard n'y joue aucun rôle.*

*Dans le cas multinomial* le théorème central limite apparaît de même comme une propriété asymptotique du développement multinomial (11). En fait, il en est encore de même dans le cas beaucoup plus complexe de distributions continues; et *dans le cas le plus général* correspondant au théorème central limite *il n'y a aucun hasard.* En fait *toutes* les valeurs de *toutes* les variables sont considérées, *au moins implicitement,* comme se réalisant *simultanément,* et l'on considère la fréquence des configurations pour lesquelles la condition (30) est satisfaite. *C'est là, quelles que soient ses apparences souvent très complexes, un calcul d'analyse combinatoire entièrement déterministe.*

### *C.3. Le théorème central limite et la réalité concrète*

Par lui-même le théorème central limite est *purement mathématique et il ne peut rien nous apprendre sur la réalité concrète.*

Dans le cas par exemple de tirages dans une urne contenant un nombre

$$K = K_1 + \ldots + K_i + \ldots + K_h \tag{31}$$

de boules de type 1, ..., $i$, ..., $h$, il ne peut nous apprendre quelque chose que *dans la mesure et dans la mesure seulement* où l'on admet comme *postulat* que la distribution des fréquences effectivement observées ne peut être en général que « *peu différente* » de la distribution des fréquences correspondant au modèle déterministe multinomial, ce qui revient à admettre *l'axiome d'égale possibilité en moyenne.*

Dans ce cas, et si en fait on constate que des variables empiriques se distribuent suivant la loi normale de Laplace-Gauss, le théorème central limite permettra de dire que *tout se passe comme si* ces variables résultaient de la sommation de nombreux effets représentables par des distributions fréquentielles satisfaisant aux conditions d'application du théorème central limite, *l'axiome d'égale possibilité en moyenne étant supposé vérifié* ([18]).

---

17. CRAMER, 1946, id , § 16.4, relation 16.4 7., p 200

18 *En ce sens ce théorème,* qui en tout état de cause est un des plus beaux des mathématiques, *est d'une importance fondamentale pour comprendre la réalité concrète* (voir Appendice II).