

MARC BERTONECHE

**Existence d'hétéroscédasticité dans le modèle de marché appliqué  
aux bourses européennes de valeurs mobilières**

*Journal de la société statistique de Paris*, tome 120, n° 4 (1979), p. 270-276

[http://www.numdam.org/item?id=JSFS\\_1979\\_\\_120\\_4\\_270\\_0](http://www.numdam.org/item?id=JSFS_1979__120_4_270_0)

© Société de statistique de Paris, 1979, tous droits réservés.

L'accès aux archives de la revue « Journal de la société statistique de Paris » (<http://publications-sfds.math.cnrs.fr/index.php/J-SFdS>) implique l'accord avec les conditions générales d'utilisation (<http://www.numdam.org/conditions>). Toute utilisation commerciale ou impression systématique est constitutive d'une infraction pénale. Toute copie ou impression de ce fichier doit contenir la présente mention de copyright.

NUMDAM

Article numérisé dans le cadre du programme  
Numérisation de documents anciens mathématiques  
<http://www.numdam.org/>

# EXISTENCE D'HÉTÉROSCÉDASTICITÉ DANS LE MODÈLE DE MARCHÉ APPLIQUÉ AUX BOURSES EUROPÉENNES DE VALEURS MOBILIÈRES

MARC BERTONECHE

*Professeur de finance à l'Institut d'administration des affaires (I. N. S. E. A. D.)  
chargé d'enseignement à l'Université de Bordeaux I*

*L'hypothèse d'homoscédasticité constitue un élément essentiel du modèle de marché. Lorsqu'elle n'est pas respectée, les tests traditionnels d'hypothèses sur les estimateurs  $\alpha_i$ ,  $\beta_i$  et  $\varepsilon_i$  ne peuvent plus être appliqués car leurs variances d'échantillonnage sont biaisées.*

*A l'aide d'un échantillon de 146 actions de sociétés européennes provenant de six pays différents (Belgique, République Fédérale Allemande, Italie, Pays Bas, France et Royaume-Uni) l'existence d'hétéroscédasticité est mise en évidence sur la période 1966-1974 pour les six marchés européens étudiés ce qui met en doute l'application à ces différents marchés du modèle de marché.*

*The hypothesis of homoscedasticity constitutes a fundamental element of the market model. When it is not respected, traditional tests of hypothesis on estimators  $\alpha_i$ ,  $\beta_i$  and  $\varepsilon_i$  can no longer be applied because their sampling variances are biased.*

*Through a sample of 146 shares of European firms from six different countries (Belgium, West Germany, Italy, the Netherlands, France and the United Kingdom), the existence of heteroscedasticity has been evidenced over the period 1966-1974, for the six European markets involved, which makes the application of the Market Model to these various markets questionable.*

*Die Hypothese der Homoscédasticité ist ein wesentliches Element für das Modell einer Wirtschaft. Wenn ihr nicht Rechnung getragen wird, können die üblichen Teste der Hypothesen für die Schätzungswerte  $\alpha_i$ ,  $\beta_i$  und  $\varepsilon_i$  nicht mehr angewendet werden, denn die Varianten der Probebeispiele werden falsch.*

*An Hand eines Beispiels von 146 Aktien europäischer Wirtschaftsunternehmen von sechs Ländern (Belgien, Bundesrepublik Deutschland, Italien, Holland, Frankreich und England) ist die Existenz der Hétéroscédasticité bewiesen für den Zeitraum 1966-1974 für die sechs europäischen Märkte, die untersucht wurden. Diese Studie lässt Zweifel aufkommen hinsichtlich der Anwendung auf diese Märkte des "Modells einer Wirtschaft".*

Le modèle de marché, créé par H. Markowitz (1) et développé par W. F. Sharpe (2) a fait l'objet de nombreuses améliorations et extensions (3). La relation fondamentale peut s'écrire :

$$\tilde{R}_{it} = \alpha_i + \beta_i \tilde{R}_{Mt} + \tilde{\varepsilon}_{it}$$

- $\tilde{R}_{it}$  représente le taux de rentabilité procuré par le titre  $i$  au cours de la période  $t$ ,  
 $\tilde{R}_{Mt}$  est le taux de rentabilité du marché, mesuré par un indice général, au cours de la période  $t$   
 $\beta_i$  est un paramètre propre à chaque valeur  $i$ , qui indique la relation entre les fluctuations du titre et celles de l'indice du marché, c'est-à-dire la volatilité du titre.  
 $\alpha_i$  est un paramètre spécifique à la valeur  $i$ , qui représente l'espérance mathématique de  $R_{it}$  lorsque  $R_{Mt}$  est égal à zéro.  
 $\tilde{\varepsilon}_{it}$  est une variable aléatoire, propre au titre  $i$ , qui représente la composante du risque total non liée au marché.

Ce terme est supposé satisfaire les hypothèses habituelles du modèle de régression linéaire, à savoir :

$$E(\tilde{\varepsilon}_{it}) = 0 \text{ pour tout } t$$

$$\text{Cov}(\tilde{\varepsilon}_{it}, \tilde{\varepsilon}_{i(t+k)}) = 0 \text{ pour tout } k \neq 0$$

La variance de la variable d'erreur  $\tilde{\varepsilon}_{it}$  est constante pour toute valeur de  $t$ , ce qui peut s'écrire :

$$\text{Var}(\tilde{\varepsilon}_{it}) = \sigma_i^2$$

Cette dernière hypothèse est connue sous le nom d'hypothèse d'homoscédasticité, et constitue un élément essentiel pour tester si le modèle de marché s'applique à un pays spécifique (4). Lorsqu'elle est violée, « les tests traditionnels d'hypothèses sur les estimateurs  $\alpha_i$ ,  $\beta_i$  et  $\tilde{\varepsilon}_i$  ne peuvent plus être appliqués car leurs variances d'échantillonnage sont biaisées » (5) et l'hétéroscédasticité peut expliquer, au moins en partie, l'instabilité dans le temps des coefficients beta des titres individuels.

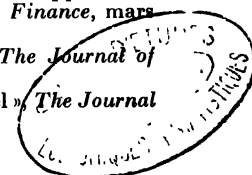
1. H. MARKOWITZ, « Portfolio Selection », *The Journal of Finance*, VII, n° 1, mars 1952, pp. 77-91. Voir également H. MARKOWITZ, *Portfolio Selection · Efficient Diversification of Investment*, John Wiley and Sons, New York 1959.

2. W. F. SHARPE, « A simplified Model for Portfolio Analysis » *Management Science*, janvier 1963, pp. 277-293. Voir également W. F. SHARPE, « Capital Asset Prices : A theory of Market Equilibrium under Condition of Risk », *The Journal of Finance*, XIX, Septembre 1964, pp. 425-442; et W. F. SHARPE, *Portfolio Theory and Capital Markets*, McGraw Hill, Series in Finance, 1970.

3. Voir, en particulier, J. LINTNER, « The Valuation of Risk Assets and the Selection of Risk Investments in Stock Portfolios and Capital Budgets », *Review of Economics and Statistics*, 47, février 1965, pp. 13-37; et E. F. FAMA, « Risk, Return and Equilibrium : Some Clarifying Comments », *The Journal of Finance*, mars 1968, pp. 29-40.

4. A. BELKAOUI, « Canadian Evidence of Heteroscedasticity in the Market Model », *The Journal of Finance*, XXXII, 4, septembre 1977, p. 1320.

5. J. D. MARTIN, R. C. KLEMKOSKY, « Evidence of Heteroscedasticity in the Market Model », *The Journal of Business*, 48, 1, janvier 1975, p. 81.



## I

E. Fama, L. Fisher, M. C. Jensen et R. Roll <sup>(1)</sup> ont étudié ce problème sur un échantillon de 47 sociétés américaines, au cours de la période allant de janvier 1927 à décembre 1959. La méthode utilisée est assez rudimentaire et repose sur une analyse visuelle des diagrammes de dispersion :

- des rendements mensuels des actions individuelles et des rendements mensuels du marché,
- des rentabilités résiduelles estimées en  $t + 1$  par rapport aux rentabilités résiduelles en  $t$ ,
- des graphiques de distribution normale de probabilités des termes résiduels.

Leur analyse visuelle les conduit à conclure que l'hypothèse d'homoscédasticité est tout à fait vérifiée.

P. D. Praetz <sup>(2)</sup> analyse un échantillon comprenant :

1. 16 indices de cours hebdomadaires de la Bourse de Sydney sur la période 1958-1968,
  2. les variations de cours hebdomadaires des 20 principales actions australiennes cotées à Melbourne et Sydney sur la même période,
  3. deux séries mensuelles d'indices de cours de la Bourse de Sydney de 1875 à 1966.
- Il conclut à l'existence significative d'hétéroscédasticité <sup>(3)</sup>.

J. D. Martin et R. C. Klemkosky <sup>(4)</sup> ont testé les rentabilités mensuelles d'un échantillon de 355 actions cotées au New York Stock Exchange sur une période de 112 mois allant d'avril 1964 à juillet 1973. En recourant à plusieurs tests (paramétriques et non paramétriques), ils concluent que moins de 15 % des actions étudiées montrent l'existence d'hétéroscédasticité et que le modèle de marché constitue donc un modèle solide en ce qui concerne l'hypothèse d'homoscédasticité.

I. G. Morgan <sup>(5)</sup> a testé un échantillon comprenant deux catégories d'actions. Le premier groupe comprend 17 titres sur la période allant de juillet 1962 à décembre 1965 (soit 216 périodes de 4 jours). Le second rassemble les cours mensuels de 44 valeurs sur les 254 mois de la période mai 1947 juin 1968. Il conclut à l'existence très nette d'hétéroscédasticité en démontrant que la variance des rentabilités n'est pas constante dans le temps mais dépend du volume de transactions.

S. J. Brown <sup>(6)</sup> a établi, en utilisant les données de Fama et McBeth <sup>(7)</sup> sur la période allant de janvier 1961 à juin 1968, l'existence d'hétéroscédasticité. Avec les données de Martin et Klemkosky, il conclut que l'hypothèse nulle d'homoscédasticité est rejetée, au seuil de 5 %, dans environ 30 % des cas étudiés.

1. E. FAMA, L. FISHER, M. C. JENSEN et R. ROLL, « The Adjustment of Stock Prices to New Information », *International Economic Review*, 10, février 1969, pp. 1-21.

2. P. D. PRAETZ, « Australian Share Prices and the Random Walk Hypothesis », *Australian Journal of Statistics*, 11, 1969, pp. 123-139.

3. Le test de Bartlett a été utilisé et les résultats montrent que toutes les séries, sauf deux, font apparaître une hétéroscédasticité significative au seuil de 1 %.

4. *Op. cit.*, pp. 81-86.

5. I. G. MORGAN « Stock Prices and Heteroscedasticity », *The Journal of Business*, 49, 4, octobre 1976, pp. 496-508.

6. S. J. BROWN, « Heteroscedasticity in the Market Model : A Comment », *The Journal of Business*, 50, 1, janvier 1977, pp. 80-83.

7. E. FAMA, J. MCBETH, « Risk, Return and Equilibrium : Empirical Tests », *Journal of Political Economy*, 81, 1973, pp. 607-637.

A. Belkaoui <sup>(1)</sup> a appliqué divers tests à un échantillon de 45 actions, choisies au hasard parmi les titres cotés à la Bourse de Toronto, sur une période de 48 mois allant de janvier 1971 à décembre 1974. Ses résultats confirment l'existence d'hétéroscédasticité, ce qui l'amène à conclure que « l'hétéroscédasticité peut être considérée comme un problème sérieux pour le modèle de marché dans la majorité des actions canadiennes étudiées » <sup>(2)</sup>.

Jusqu'à présent, aucun résultat portant sur les marchés européens n'a été, à notre connaissance, publié.

## II

Dans cette section, nous appliquerons des tests paramétriques et non paramétriques <sup>(3)</sup> à notre échantillon de 146 actions européennes, en utilisant des rendements bihebdomadaires.

Le premier test repose sur le coefficient de corrélation des rangs de Spearman <sup>(4)</sup> entre les écart types des termes résiduels de l'équation du modèle de marché  $\sigma_{\epsilon_{it}}$  et les rendements du marché correspondants  $R_{Mt}$ , pour chacune des 146 actions. Si  $n > 11$ , on obtient une bonne approximation du coefficient de corrélation des rangs de Spearman  $X$  en comparant  $(\sqrt{n-2}X)/(1-X^2)$  à une distribution de Student avec  $n-2$  degrés de liberté ou, de manière équivalente, en comparant  $[(n-2)X^2]/(1-X^2)$ , à une distribution  $F$  avec  $v_1 = 1$  et  $v_2 = n-2$  degrés de liberté. Avec  $n = 210$  observations, soit 208 degrés de liberté, les valeurs critiques de  $t$  pour un test à deux bornes sont égales à 1,645 pour un seuil de 10 % et 1,96 pour un seuil de 5 %. 108 valeurs s'avèrent être supérieures à la valeur critique de  $t$  au seuil de 10 %, soit 74 % de l'échantillon. Au seuil de 5 %, ce nombre est encore de 79, soit environ 54 % de l'échantillon. Les résultats par pays sont reproduits au tableau 1.

Un test plus précis, le test de Bartlett <sup>(5)</sup>, a été conduit. 4 sous échantillons, couvrant chacun une période de deux années, ont été constitués, et des régressions séparées ont permis de calculer les variances résiduelles pour chacun d'eux. L'hypothèse testée est qu'il n'existe aucune différence entre les variances résiduelles des différents sous-échantillons. Le paramètre du test de Bartlett, appelé paramètre  $B$ , est calculé de la manière suivante :

$$B = \frac{Q}{L}$$

avec

$$Q = n \log \left( \sum_{j=1}^k \frac{n_j}{n} s_j^2 \right) - \sum_{j=1}^k n_j \log s_j^2$$

$$L = 1 + \frac{1}{3(k-1)} \left( \sum_{j=1}^k \frac{1}{n_j} - \frac{1}{n} \right)$$

$$n = \sum_{j=1}^k n_j$$

1. A. BELKAOUI, *op. cit.*, pp. 1320-1324.

2. *Ibid.*, p. 1323.

3. Les mêmes tests que ceux utilisés par J. D. Martin et R. C. Klemkosky d'une part et A. Belkaoui d'autre part seront appliqués à l'échantillon d'actions européennes.

4. C. H. KRAFT et C. VAN EEDEN, *A Nonparametric Introduction to Statistics*, the Macmillan Company, 1968, pp. 176-177. Voir également : D. C. MILLER, *Handbook of Research Design and Social Measurement*, David McKay Company, New York, 1970, pp. 138-140.

5. M. S. BARTLETT, « The Use of Transformations », *Biometrics*, 11, 1947, p. 39. Voir également pour une discussion de l'utilisation du test de Bartlett dans le cas de séries économiques, E. J. KANE, *Economic Statistics and Econometrics*, New York, Harper and Row, 1968, en particulier pp. 373-376.

$k$  = nombre de sous-échantillons retenus; ici  $k = 4$ .

$S_j^2 = \text{Var}(\tilde{\epsilon}_{jt})$  pour le  $j^{\text{ème}}$  sous-échantillon ( $j = 1, 2, \dots k$ ).

TABLEAU 1

*Test des coefficients de rangs de Spearman entre les termes d'erreur résiduels et les rentabilités du marché*

Pays	Nombre de titres	Nombre de valeurs supérieures à la valeur critique de $t$	
		Au seuil de 10 %	Au seuil de 5 %
Belgique . . . . .	11	9	6
France . . . . .	48	38	28
R. F. A . . . . .	30	20	16
Italie . . . . .	19	13	10
Pays Bas . . . . .	12	10	6
Royaume Uni . . . . .	26	19	13
Total	146	108	79

L'éventail va d'environ 67 %, pour l'Allemagne, à 82 % pour la Belgique, au seuil de 10 %, et de 50 % pour les Pays Bas et le Royaume Uni à 58 % pour la France, au seuil de 5 %.

Si les  $\tilde{\epsilon}_{jt}$  sont normalement distribués et remplissent les conditions d'indépendance,  $Q/L$  suivra une distribution de  $\chi^2$ , avec  $k - 1$  degrés de liberté. En utilisant une distribution de  $\chi^2$  avec 3 degrés de liberté <sup>(1)</sup>, 75 des 146 actions, soit plus de 50 %, font apparaître des variances résiduelles pour les différents sous échantillons significatives au seuil de 10 %. Ces 75 actions recouvrent 67 actions déjà rejetées par le coefficient de corrélation des rangs de Spearman. Au seuil de 5 %, le nombre de valeurs tombe à 55, soit près de 38 % de l'échantillon total, parmi lesquelles on compte 49 titres précédemment rejetés par le test de corrélation des rangs. Les résultats par pays figurent au tableau 2.

TABLEAU 2

*Test de Bartlett sur les variances résiduelles*

Pays	Nombre d'actions	Nombre d'actions ayant des variances résiduelles significatives au seuil de 10 %	% de l'échantillon total	Nombre d'actions ayant des variances résiduelles significatives au seuil de 5 %	% de l'échantillon total
Belgique . . . . .	11	6 (6)	54,5	4 (4)	36,4
France . . . . .	48	25 (22)	52,1	19 (17)	39,6
R. F. A . . . . .	30	16 (15)	53,3	13 (12)	43,3
Italie . . . . .	19	11 (10)	57,9	7 (6)	36,8
Pays Bas . . . . .	12	6 (5)	50,0	4 (4)	33,3
Royaume Uni . . . . .	26	11 (9)	42,3	8 (6)	30,8
Total . . . . .	146	75 (67)	51,4	55 (49)	37,7

*Note* : Les chiffres entre parenthèses représentent le nombre d'actions déjà rejeté par le test des coefficients de corrélation des rangs de Spearman.

1. T. H. WONNACOTT et R. J. WONNACOTT, *Introductory Statistics*, John Wiley and Sons, Inc., 1969, pp. 163 165.

Afin de vérifier ces conclusions, un autre test proposé par Goldfeld et Quandt <sup>(1)</sup> a été utilisé. Ce test, comme celui de Bartlett, analyse les différences de variances résiduelles de sous-échantillons. Mais il exige que les sous échantillons soient séparés en omettant les valeurs centrales de  $R_{M_t}$ , ce qui confère une plus grande sensibilité au test. Le test comprend donc les étapes suivantes :

- ordonner les différents  $R_{M_t}$  par valeurs croissantes,
- omettre  $c$  observations centrales de l'ensemble ordonné des  $R_{M_t}$ . La puissance du test varie de manière inversement proportionnelle à la valeur de  $c$ .
- calculer des régressions séparées sur les premières  $(n - c)/2$  observations et sur les dernières  $(n - c)/2$  observations,
- si l'on appelle  $S_1$  la somme au carré des écarts par rapport à la régression, en prenant les valeurs inférieures de  $R_{M_t}$  et  $S_2$  la somme au carré des écarts par rapport à la régression en prenant les valeurs supérieures de  $R_{M_t}$ , on définit le paramètre  $R$

$$R = \frac{S_2}{S_1}$$

$R$  suivra, dans l'hypothèse d'homoscédasticité, une distribution  $F$  avec

$$\frac{n - c - 2(m + 1)}{2} \text{ et } \frac{n - c - 2(m + 1)}{2}$$

degrés de liberté,  $(m + 1)$  représentant le nombre de variables indépendantes.

Il faut faire un choix entre puissance et sensibilité du test. Plus  $c$  est élevé, moins le test est puissant. Mais, au fur et à mesure que l'on augmente  $c$ , la puissance ajoutée au test, provenant du nombre plus important d'observations, est en partie compensée par une baisse de la sensibilité du test à détecter des différences dans  $S_1$  et  $S_2$  <sup>(2)</sup>. Goldfeld et Quandt recommandent un ratio de 8/30 pour  $c/n$  qui permet de combiner une puissance et une sensibilité acceptables.

Pour 210 observations, on a retenu pour  $c$  la valeur 56. Les degrés de libertés sont donc 76.

Au seuil de 10 %, les valeurs critiques de  $F$  sont les suivantes :

$$F_1(0,05, 76, 76) = 1,45$$

$$F_2(0,95, 76, 76) = 0,665$$

Comme on pouvait s'y attendre, le test de Goldfeld et Quandt s'est relevé plus sensible pour déceler les différences dans les variances résiduelles que le test de Bartlett. 88 valeurs observées de  $F$  se situaient dans les zones, supérieures ou inférieures, de rejet de l'hypothèse selon laquelle il n'existe pas de différences entre les variances résiduelles au seuil de 10 %. Parmi ces 88 actions, 75 appartenaient à la liste de rejet de l'hypothèse en utilisant le test de corrélation des rangs de Spearman et 69 à celle résultant de l'application du test de Bartlett.

Au seuil de 5 %, 70 actions, parmi lesquelles 55 avaient été rejetées par le test de Spearman et 51 par celui de Bartlett, se situaient dans les zones, supérieures et inférieures, de rejet <sup>(3)</sup>.

1. S. M. GOLDFELD et R. E. QUANDT, « Some Tests for Homoscedasticity », *Journal of the American Statistical Association*, 60, 1965, pp. 539 547.

2. *Ibid.*, p. 541.

3. Des résultats tout à fait similaires ont été trouvés en utilisant le test non paramétrique, fondé sur le nombre de pointes observées. Voir S. M. GOLDFELD et R. E. QUANDT, *op. cit.*, pp. 541 543.

Il est dès lors possible de conclure que l'hétéroscédasticité constitue un sérieux problème pour la majorité des actions européennes testées. Cette conclusion s'oppose à celle de Fama, Fisher, Jensen et Roll <sup>(1)</sup> et à celle de Martin et Klemkosky <sup>(2)</sup> pour les actions cotées sur le New York Stock Exchange. En revanche, elle concorde avec les résultats présentés pour les marchés australien <sup>(3)</sup> et canadien <sup>(4)</sup>.

#### CONCLUSION

La conclusion générale apparaît donc claire et indiscutable : avec les données utilisées et l'échantillon retenu pour cette recherche, le modèle de marché ne constitue pas, pour les bourses européennes de valeurs mobilières, un modèle solide et fiable en ce qui concerne l'efficience des estimateurs et leur propension à respecter l'hypothèse d'homoscédasticité. L'existence d'hétéroscédasticité mise en évidence sur la période 1966-1974 pour les six marchés européens (Belgique, France, Allemagne, Italie, Pays-Bas et Royaume-Uni) contribue indéniablement à l'instabilité des coefficients Bêta des titres individuels, et met en doute l'application aux différents marchés européens du modèle de marché, tant au niveau de la recherche empirique sur le cours des actions, qu'à celui de la gestion de portefeuille.

1. E. FAMA, L. FISHER, M. C. JENSEN et R. ROLL, *op. cit.*
2. J. D. MARTIN et KLEMKOSKY, *op. cit.*
3. P. D. PRAETZ, *op. cit.*
4. A. BELKAOUI, *op. cit.*